Sous la direction de
C. **ROLAND** & P. **DARTHOS**

NOUVEAU LYCÉE 2019

1re

Variations

SPÉCIALITÉ

maths

Hatier

Variations Maths 1re

Sous la direction de

Paul DARTHOS
Lycée Jaufré Rudel, Blaye (33)

Christophe ROLAND
Lycée Paul Duez, Cambrai (59)

Auteurs

Laurent CHARLEMAGNE
Lycée Marguerite Yourcenar, Beuvry (62)

Thomas DE VITTORI
ESPE Lille-Nord de France (59)

Stéphanie FAVERO
Cité scolaire Jean-Baptiste Say, Paris (75)
ESPE de Paris

Paul FLAMBARD
Lycée Max Linder, Libourne (33)

Vincent JOLY
Collège Frédéric Joliot-Curie, Lallaing (59)

Guillaume JOUVE
ESPE Lille-Nord de France (59)

Marie-Christine LÉVI
Lycée Fustel de Coulanges, Massy (91)
ESPE de Versailles

Armelle MORAND
Lycée Le Corbusier, Illkirch-Graffenstaden (67)

Didier REGHEM
Lycée Marguerite de Flandre, Gondecourt (59)

Christophe RIVIÈRE
Lycée Albert Einstein, Sainte-Geneviève-des-Bois (91)

Magali SCHAEGIS
Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse (68)

Sandra TANCOGNE
Lycée Václav Havel, Bègles (33)

Stéphane VOINOT
Lycée français d'Irlande, Dublin (AEFE)

Les directeurs de collection et les auteurs remercient chaleureusement Paolo Calciano et Tristan Perrine pour leur relecture critique.

Les éditions Hatier remercient tous les enseignants qui ont, par leurs remarques pertinentes, contribué à l'amélioration de cet ouvrage.

Hatier

SOMMAIRE

ALGÈBRE

ANALYSE

© Hatier, Paris, 2019 - ISBN : 978-2-401-05405-9

GÉOMÉTRIE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Des exercices d' **ALGORITHMIQUE** et de **PROGRAMMATION** en python figurent également dans **chaque chapitre**.

En fin de manuel

SOMMAIRES THÉMATIQUES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Des **exercices** et **activités** traitant d'histoire des mathématiques sont également proposés **dans les chapitres.**

Les Rappels de PRENDRE UN BON DÉPART

LOGIQUE et RAISONNEMENT

Nous listons ici les **démonstrations exemplaires** citées dans le BO du 22 janvier 2019. D'autres démonstrations sont proposées en exercices dans les pages *Démontrer les propriétés*.

Les démonstrations exemplaires

ALGORITHMES et PROGRAMMES

Nous listons ici les **exemples d'algorithmes** cités dans le BO du 22 janvier 2019. D'autres algorithmes et programmes sont proposés en exercices et problèmes.

Exemples d'algorithmes

Un manuel qui vous accompagne tout au long de l'année

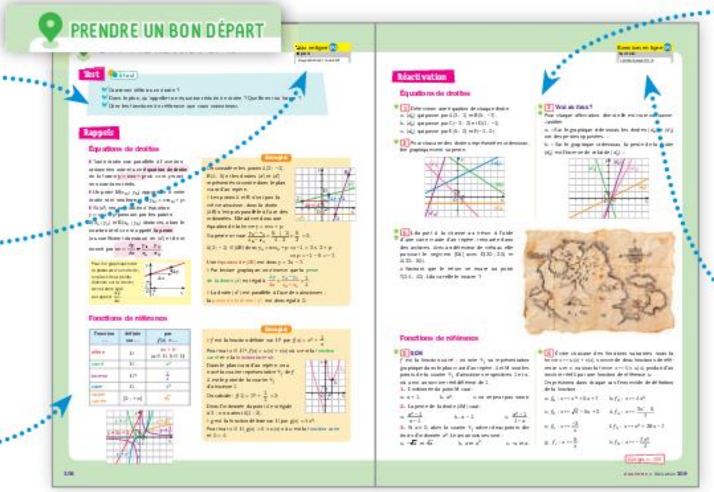
Pour revoir ce que vous savez déjà

Des questions pour vérifier, seul ou en groupe, ce dont vous vous souvenez.

Quiz en ligne

Vous pouvez aussi vous tester avec le quiz diagnostique en ligne donné par votre professeur.

Si nécessaire, consultez les **rappels**.



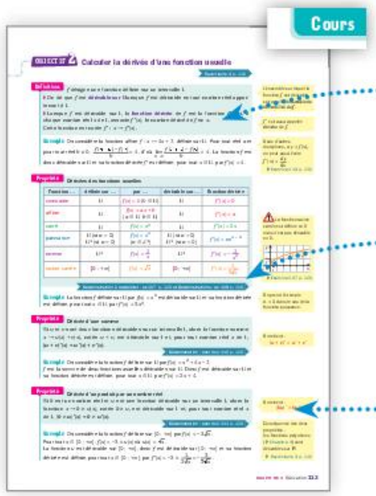
Faites les exercices pour **réactiver vos acquis**. Ces exercices sont **corrigés** en fin de manuel (p. 368).

Exercices en ligne

Vous pouvez aussi faire les exercices de réactivation en ligne sur variations.kwyk.fr/1re.

Pour comprendre les nouvelles notions

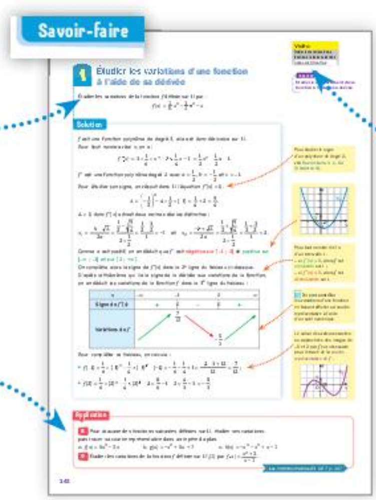
En complément du cours noté en classe, vous pouvez lire le **Cours** et les **Savoir-faire** proposés dans votre manuel.



Les **définitions** et **propriétés** à connaître, illustrées avec des exemples simples.

Des renvois vers les **démonstrations**, rédigées ou proposées en exercices.

Des notes pour préciser le vocabulaire, les notations, un cas particulier, etc.



Un **exercice résolu** pour vous approprier chaque savoir-faire du chapitre.

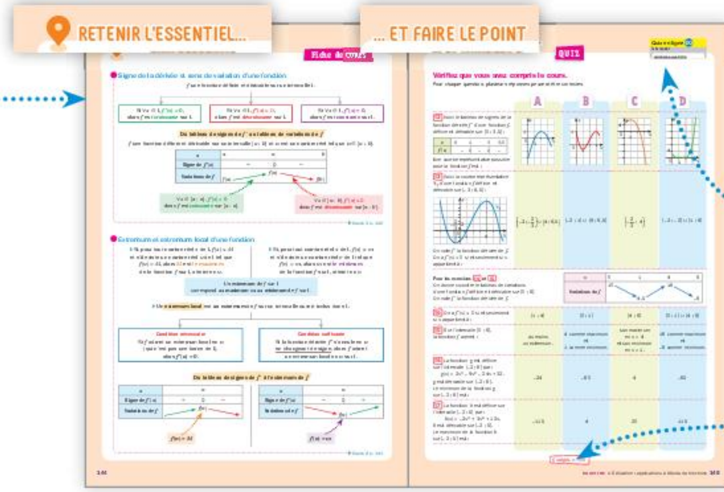
Faites les **exercices d'application** pour vérifier que vous maîtrisez la méthode.

Vidéo

Vous pouvez aussi regarder certaines méthodes en vidéo.

Pour accéder aux ressources hatier-clic, il vous suffit de taper l'adresse indiquée dans la barre d'adresse de votre navigateur.

✓ Pour réviser



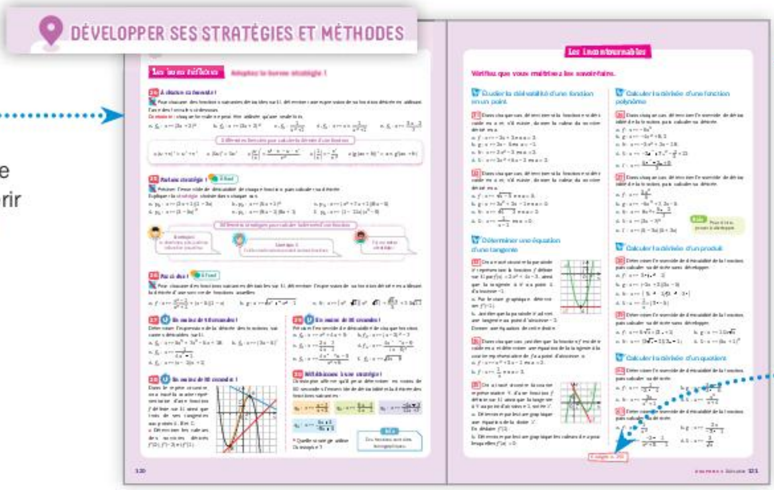
Votre **cours** résumé en une **fiche** visuelle.

Un **quiz** pour vérifier si vous avez bien compris le cours.

Quiz en ligne

Vous pouvez aussi vous tester avec le quiz en version interactive sur variations.kwyk.fr/1re.

Le quiz est **corrigé** en fin de manuel (p. 368).



Des exercices pour réfléchir aux **stratégies** à mettre en place et acquérir les bons **réflexes**.

Faites les exercices « **incontournables** » : ce sont les fondamentaux du chapitre.

Les incontournables sont **corrigés** en fin de manuel (p. 368).

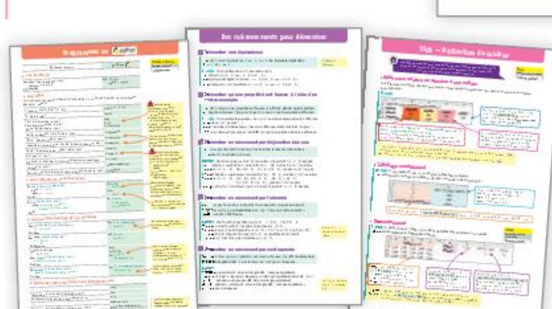
Et aussi :

- Dans chaque chapitre, des **démonstrations** rédigées ou à faire en exercices pour vous entraîner au raisonnement.

Vidéo

Vous pouvez aussi regarder certaines démonstrations en vidéo.

- Dans chaque chapitre, des exercices en lien avec d'autres disciplines et des fiches métiers en numérique pour vous accompagner dans vos choix d'**orientation**.



- Des **outils** à consulter chaque fois que nécessaire :
– rabats sur la **programmation en Python** et les principales fonctionnalités des **calculatrices** ;
– rabats sur les **notations**, le **vocabulaire de la logique**, les **raisonnements** pour démontrer ;
– fiches **TICE** sur l'utilisation des tableurs et du logiciel de géométrie dynamique *GeoGebra*.

PROGRAMME

Mathématiques 1re

Extraits du programme paru au Bulletin officiel spécial n° 1 du 22 janvier 2019

Dans le manuel

ALGÈBRE

Suites numériques, modèles discrets

Contenus

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques.
  Notations : $u(n)$, u_n, $(u(n))$, (u_n).

▶ Chapitre 1

- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général.
  Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines.
  Calcul de $1 + 2 + \cdots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général.
  Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle.
  Calcul de $1 + q + \cdots + q^n$.

▶ Chapitre 2

- Sens de variation d'une suite.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

▶ Chapitres 1 et 2

Capacités attendues

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
  Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.

▶ Chapitre 1

- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.

▶ Chapitre 2

- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

▶ Chapitre 1

Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
  Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle.
  Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

▶ Chapitre 3

ANALYSE

Dérivation

Contenus

Point de vue local

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

▶ Chapitre 4

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente.
  Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Variations et courbes représentatives des fonctions *Contenus* • Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes. • Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative. *Capacités attendues* • Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums. • Résoudre un problème d'optimisation. • Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives. • Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.	▶ Chapitre 5
Fonction exponentielle *Contenus* • Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'=f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$. • Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x. • Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique. • Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle. *Capacités attendues* • Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle. • Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$. • Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).	▶ Chapitre 6
Fonctions trigonométriques *Contenus* • Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian. • Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel. • Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables. • Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives. *Capacités attendues* • Placer un point sur le cercle trigonométrique. • Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique. • Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques. • Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.	▶ Chapitre 7
GÉOMÉTRIE	
Calcul vectoriel et produit scalaire *Contenus* • Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité. • Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité. • Développement de $\lVert\vec{u} + \vec{v}\rVert^2$. Formule d'Al-Kashi. • Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. *Capacités attendues* • Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace. • En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes). • Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.	▶ Chapitre 8
Géométrie repérée *Contenus* • Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a,b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur. • Équation de cercle. • Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet. *Capacités attendues* • Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite. • Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon. • Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon. • Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$. • Utiliser un repère pour étudier une configuration.	▶ Chapitre 9

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES	
Probabilités conditionnelles et indépendance *Contenus* • Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements. • Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme. • Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales. • Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau. *Capacités attendues* • Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement. • Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité. • Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population). • Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales. • Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ». • Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.	▶ Chapitre 10
Variables aléatoires réelles *Contenus* • Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles. • Loi d'une variable aléatoire. • Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire. *Capacités attendues* • Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement. • Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire. • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Calculer une espérance, une variance, un écart type. • Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable…)	▶ Chapitre 11
ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION	
Notion de liste *Capacités attendues* • Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension). • Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer …) et leurs indices. • Parcourir une liste. • Itérer sur les éléments d'une liste.	▶ Unité D
VOCABULAIRE ENSEMBLISTE ET LOGIQUE	
L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation. Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple et celle de produit cartésien de deux ensembles. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation $\overline{A}$ des probabilités, ou la notation $E \setminus A$. Les élèves apprennent en situation à : • lire et écrire des propositions contenant les connecteurs logiques « et », « ou » ; • mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ; • formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ; • formuler la réciproque d'une implication ; • employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; • identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, inconnue, paramètre) ; • utiliser les quantificateurs (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, particulièrement dans les propositions conditionnelles ; • formuler la négation de propositions quantifiées. Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, et en découvrent la structure.	▶ Rabats I, IV, V et VI

Le programme indique également quelques **démonstrations** exemplaires (▶ p. 5) et propose des exemples d'**algorithmes** (▶ p. 5), des **approfondissements** possibles et des éléments de **contextualisation d'ordre historique, épistémologique ou culturel** (▶ p. 4) pour chaque partie.

Doc+
Programme officiel
hatier-clic.fr/ma1010

Partie A

Algèbre

Archimède
(v. 287-212 av. J.-C.)

Ingénieur et géomètre grec

En inscrivant le cercle successivement dans des polygones réguliers à 6, 12, 24, 48 et 96 côtés, il obtient une bonne approximation du nombre π (▶ Chapitre 1, ex. 152).
Cette **méthode par encadrement** sera reprise par de nombreux mathématiciens.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Philosophe et mathématicien allemand

Il utilise des **suites de nombres pour donner des approximations** de quantités comme π par exemple. Il cherche en particulier à en étudier et à en optimiser la rapidité de convergence.

Léonard de Pise – Fibonacci
(v. 1170-1250)

Commerçant italien

Il étudie l'évolution théorique d'une population de lapins à partir d'un premier couple. Cette **suite de nombres entiers** porte désormais son nom et est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes de croissance végétale (▶ Chapitre 1, ex. 158).

ARCHIMÈDE	HÉRON		FIBONACCI	ORESME		LEIBNIZ		CAUCHY
IIIe siècle avant J.-C.	Ier siècle	XIIe siècle	XIIIe siècle	XIVe siècle	XVIIe siècle		XVIIIe siècle	XIXe siècle

Nicole Oresme
(v. 1322-1382)

Savant et théologien français

Intéressé par l'infini, il étudie des **suites géométriques** (▶ Chapitre 2) décroissantes et leur somme. Il démontre que la somme des inverses des entiers tend vers l'infini (série harmonique).

Héron d'Alexandrie
(Ier siècle après J.-C.)

Ingénieur et mathématicien grec

Il propose une **méthode récursive** permettant d'approcher la racine carrée de tout nombre entier (▶ Chapitre 1, ex. 150).
Héron donne aussi une approximation de la racine cubique de 100.

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

Mathématicien français

Dans le cadre de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, il s'attache à donner une **définition rigoureuse d'une suite et de sa limite**. Comme la majorité des auteurs de l'époque, il utilise des indices pour désigner les termes successifs.

Une **HISTOIRE** des mathématiques

L'algèbre arabe

Dès le IXᵉ siècle, à partir des travaux d'al-Khwārizmī (v. 780-v. 850) (▶ Chapitre 3, act. 3), **les mathématiciens arabes vont raisonner directement sur des quantités abstraites et ainsi développer une toute nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre.**
Médecin et mathématicien, as-Samaw'al (v. 1130-v. 1180) rédige le traité *al-Bāhir fi al-jabr* (*Le merveilleux en algèbre*) dans lequel il cite et commente les travaux d'al-Karajī (v. 953-v. 1029), qui est le premier mathématicien à avoir représenté un polynôme par la suite numérique de ses coefficients sous forme de tableaux. Même si l'ouvrage original d'al-Karajī est perdu de nos jours, on sait par as-Samaw'al que s'y trouvait le développement de $(a + b)^n$ et donc la suite des coefficients connue de nos jours sous le nom de triangle de Pascal.

Le triangle arithmétique d'al-Karajī. ▶

Raisonner avec l'infini

Dès les premiers écrits mathématiques, l'idée de poursuivre un raisonnement à l'infini est présente.
Archimède l'utilise pour l'approximation de π ; quant à Théon de Smyrne (v. 70-v. 135), il l'exprime lors de son étude des nombres triangulaires. En 1659, le magistrat et mathématicien Pierre de Fermat (v. 1601-1665) écrit à Pierre de Carcavi (v. 1600-1684) pour lui présenter une nouvelle méthode qu'il appelle la « descente infinie » :

> *Pour ce que les méthodes ordinaires, qui sont dans les livres, étaient insuffisantes à démontrer des propositions si difficiles, je trouvai enfin une route tout à fait singulière pour y parvenir.*
> *J'appelai cette manière de démontrer la descente infinie ou indéfinie […]*
> *La preuve se fait par réduction par l'absurde […]*

▲ Lettre de Fermat à Carcavi en août 1659.

L'idée générale consiste à enchaîner des propriétés dépendant d'entiers en s'appuyant sur le fait qu'une suite d'entiers strictement décroissante n'existe pas, ce qui conclut le **raisonnement par l'absurde** (▶ Rabat VI, Raisonnements). À la même époque, en 1654, dans son *Traité du triangle arithmétique*, Blaise Pascal (1623-1662) propose lui aussi une méthode qui sera nommée plus tard raisonnement par récurrence et dont la justification complète ne sera donnée qu'au XIXᵉ siècle.

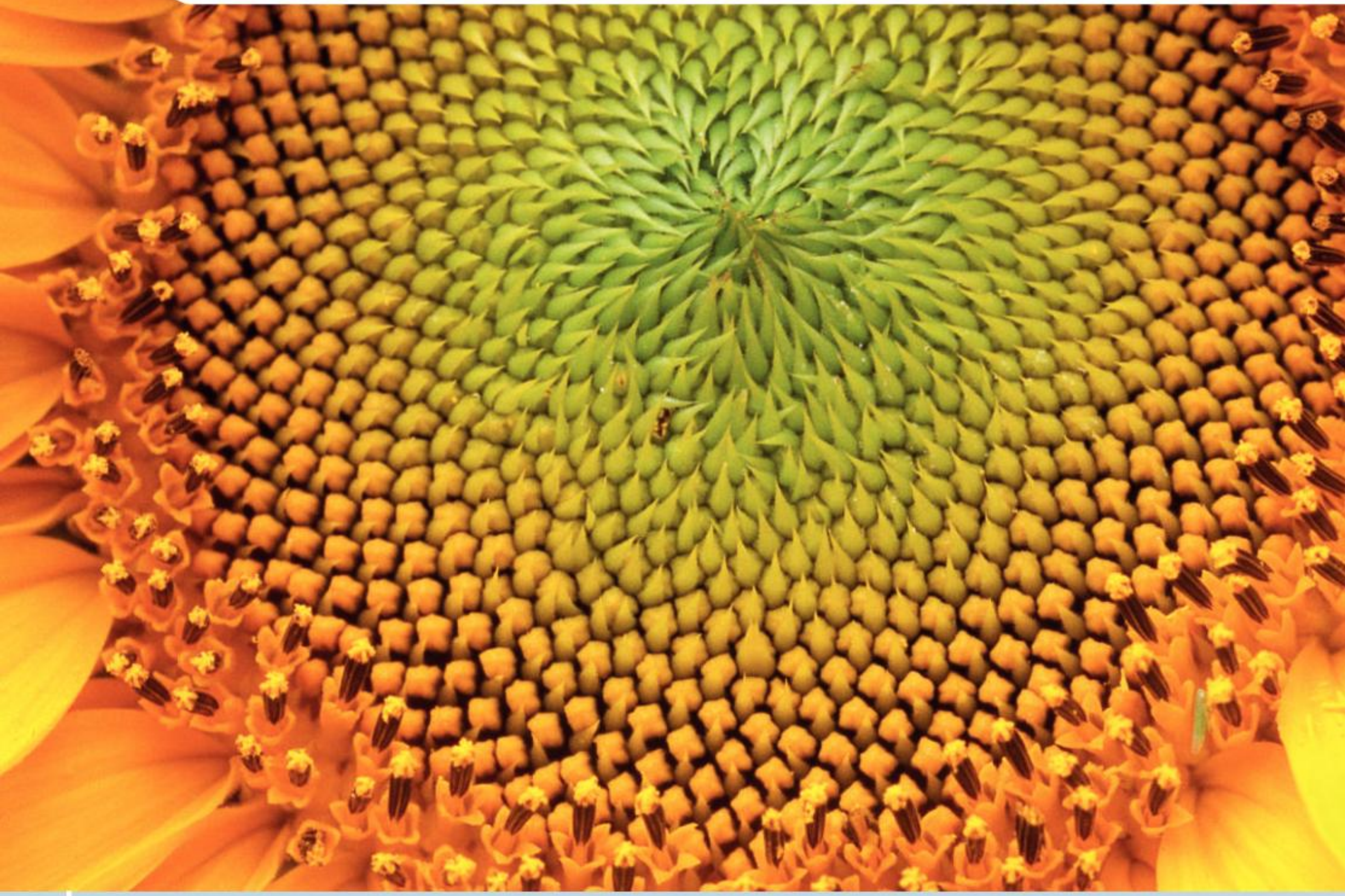
Zoom sur...

Emmy Noether

Brillante étudiante, Emmy Noether (1882-1935) apprend auprès des plus grands mathématiciens de son époque. Pourtant, en dépit de la qualité de ses recherches, sa condition de femme fait qu'elle aura beaucoup de mal à obtenir un poste. Soutenue par David Hilbert (1862-1943) et Felix Klein (1849-1925), elle est finalement nommée assistante en algèbre à l'université de Göttingen.
Ses travaux en algèbre abstraite ont profondément contribué au développement de ce domaine des mathématiques.

CHAPITRE

1 Suites



Les suites sont présentes un peu partout autour de nous dans la vie de tous les jours, comme en économie, mais aussi peut-être plus étonnamment dans la nature : par exemple, dans les spirales de la pomme de pin ou du tournesol, on retrouve les termes d'une suite célèbre, celle de Fibonacci (exercice 158 p. 41).

Itinéraire

OBJECTIF 1

Définir une suite

- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 18 à 21
- Les incontournables 37 à 39
- Entraînement 47 à 66

OBJECTIF 2

Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

- Activités 2 et 3
- Cours 2
- Savoir-faire 2 et 3
- Quiz 22 à 24
- Les incontournables 40 à 43
- Entraînement 67 à 90

OBJECTIF 3

Déterminer le sens de variation d'une suite

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 4 et 5
- Quiz 25 à 29
- Les incontournables 44 à 46
- Entraînement 91 à 122

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Expliquer les termes ou expressions suivants.

liste ordonnée — ENTIER NATUREL — repère — FONCTION CONSTANTE — *coefficient directeur* — précédent

Rappels

Représentation graphique d'une fonction

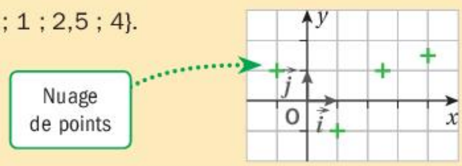
On considère une fonction f, définie sur un ensemble D inclus dans $\mathbb{R}$. Dans un plan muni d'un repère, la représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où $x \in D$.

Exemples

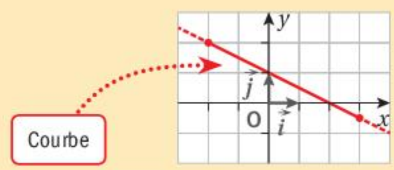
- La fonction f est définie par le tableau de valeurs :

x	-1	1	$2{,}5$	4
$f(x)$	1	-1	1	$1{,}5$

$D = \{-1\,;1\,;2{,}5\,;4\}$.



- La fonction g est définie sur $D = [-2\,;3]$ par son expression algébrique $g(x) = -0{,}5x + 1$.
g est une fonction affine, donc sa courbe représentative est une portion de droite.



Monotonie d'une fonction

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est **croissante** sur I si et seulement si, pour tous nombres réels a et b appartenant à I, si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si et seulement si, pour tous nombres réels a et b appartenant à I, si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$;
- f est **monotone** sur I si et seulement si f est **croissante** sur I **ou décroissante** sur I.

Variations et signes d'une fonction affine

On considère une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Variations de f et signe de $f(x)$	↘	+	0	−	↘

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Variations de f et signe de $f(x)$	↗	−	0	+	↗

Exemple

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -1{,}5x + 3$.

On a $a = -1{,}5$ et $b = 3$, d'où $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{-1{,}5} = 2$.

Comme $a = -1{,}5 < 0$, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $-\dfrac{b}{a} = 2$, la fonction h est positive sur $]-\infty\,;2]$ et négative sur $[2\,;+\infty[$.

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Représentation graphique d'une fonction

1 On considère une fonction f définie par le tableau de valeurs suivant.

x	$-1{,}2$	$-0{,}5$	0	3	5
$f(x)$	6	0	3	$-2{,}4$	$-0{,}4$

● Dans un repère du plan, tracer la représentation de f.

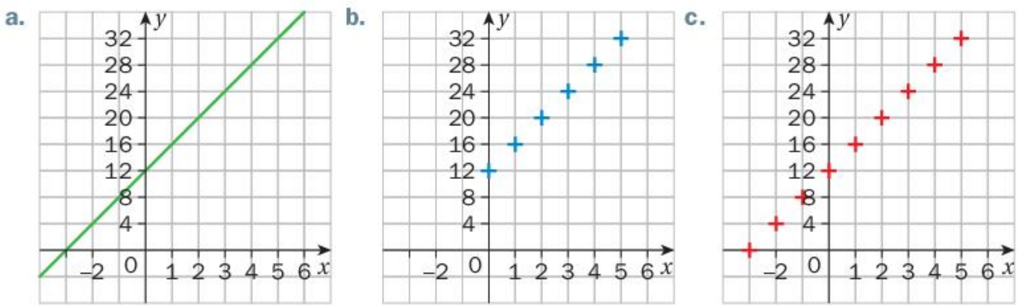
2 On considère une fonction g, définie sur D.
Dans chacun des cas suivants, tracer dans un repère du plan la représentation graphique de g.

a. $D = \mathbb{R}$ et $g(x) = 3x - 5$.

b. $D = [1{,}5 ; 9]$ et $g(x) = \dfrac{2}{1-x}$.

3 Au guichet d'un cinéma, il est proposé d'acheter une carte annuelle à 12 €, puis de payer chaque entrée au prix de 4 €.

● Parmi les trois représentations graphiques suivantes, choisir celle qui illustre la situation en expliquant votre choix.



Monotonie d'une fonction

4 Soit le tableau de variations d'une fonction f :

x	$-\infty$		-2		4		10
Variations de f		↘	-10	↗	5	↘	-3

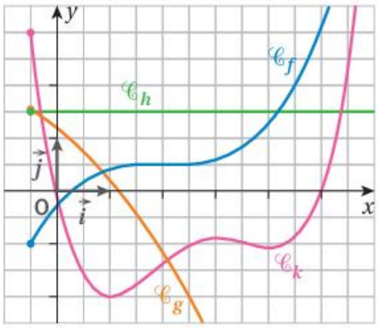
1. Dire sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est :

a. strictement décroissante ;

b. strictement croissante.

2. Quelles sont les variations de f sur $[0 ; 10]$?

5 Dans le plan muni d'un repère, on a tracé les courbes associées aux fonctions f, g, h et k, définies sur $[-0{,}5 ; +\infty[$.



1. Conjecturer la monotonie de f, g et h.

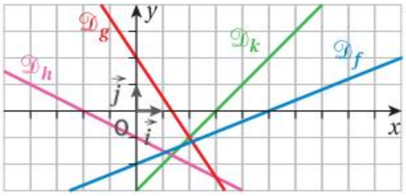
2. Citer un intervalle sur lequel k est :

a. croissante ;

b. décroissante.

Variations et signes d'une fonction affine

6 Pour chaque fonction affine dont la courbe est donnée, dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.



7 Dresser le tableau de variations et le tableau de signes de chaque fonction affine, définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = 5x + 7$ **b.** $g(x) = -6x + 4$

c. $h(x) = -0{,}5x + 3$ **d.** $k(x) = 2{,}5x - 5$

8 On considère les fonctions affines p et q définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 0{,}5x - 3$ et $q(x) = -4x + 9$.

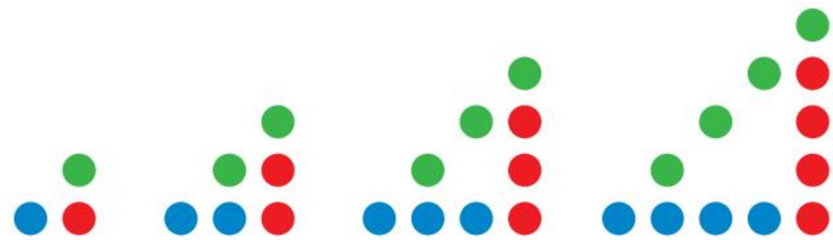
● À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe du produit $p(x) \times q(x)$.

Corrigés p. 368

OBJECTIF 1
Définir une suite

1 Modélisation d'un motif géométrique

On construit une succession de triangles avec des balles bleues, rouges et vertes comme représenté ci-dessous.



Triangle 1 Triangle 2 Triangle 3 Triangle 4

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

Triangle	1	2	3	4
Nombre de balles bleues				
Nombre total de balles				

2. En appliquant le même procédé de construction, combien de balles sont-elles nécessaires pour construire le triangle 5 ?

3. On note t_n le nombre de balles nécessaires pour construire le triangle numéro n.
On a alors $t_1 = 3$ et $t_2 = 6$.

a. Donner les valeurs de t_3, t_4 et t_5.

b. Recopier et compléter les égalités suivantes.

$$t_1 = 3 \times \ldots,\ t_2 = 3 \times \ldots,\ t_3 = 3 \times \ldots,\ t_4 = 3 \times \ldots \text{ et } t_5 = 3 \times \ldots.$$

4. Dans le plan muni d'un repère, placer les points de coordonnées $(n\,;\,t_n)$ pour n nombre entier compris entre 1 et 5.

5. Proposer une expression de t_n en fonction du nombre entier naturel non nul n.

OBJECTIF 2
Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

2 Jeu de construction OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Avec des bâtons identiques, on réalise les figures représentées ci-dessous.

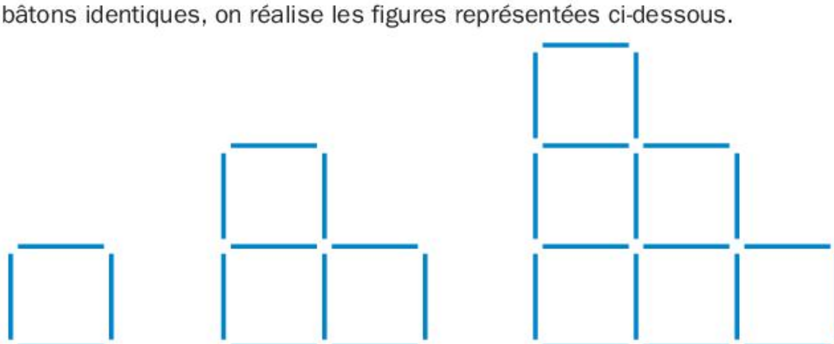


Figure 1 Figure 2 Figure 3

1. On note b_n le nombre de bâtons nécessaires pour construire la figure n, où n est un nombre entier naturel non nul.
Rechercher le nombre de bâtons nécessaires pour construire la figure 5.

2. Proposer une expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

Fichiers Python et logiciel
Activités 3 et 4
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 2
Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

3 De la suite à l'algorithme ALGORITHMIQUE

Gaëlle choisit le nombre 4 et réalise cinquante fois de suite les calculs suivants : elle enlève 3, puis elle double le nombre obtenu. Elle écrit le dernier résultat sur un papier.

1. QCM Quelle(s) suite(s) permet(tent) de modéliser le calcul de Gaëlle ?

a. La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = -3 + 2u_n$.

b. La suite (v_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = 4 - 3n \times 2$.

c. La suite (w_n) définie par $w_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = (w_n - 3) \times 2$.

2. On dispose des quatre algorithmes suivants.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3	Algorithme 4
$A \leftarrow 4$ **Pour** k allant de 1 à 50 $A \leftarrow 2 \times A$ $A \leftarrow A - 3$ **Fin Pour**	$B \leftarrow 4$ **Répéter** 50 fois $C \leftarrow B - 3$ $B \leftarrow 2 \times C$ **Fin**	$D \leftarrow 4$ **Répéter** 50 fois $D \leftarrow 2 \times (D - 3)$ **Fin**	$E \leftarrow 4$ **Pour** k allant de 1 à 50 $E \leftarrow k - 3$ $E \leftarrow E \times 2$ **Fin Pour**

a. Quels sont les algorithmes qui permettent de traduire le calcul de Gaëlle ?

b. En déduire le nombre inscrit par Gaëlle.

OBJECTIF 3
Déterminer le sens de variation d'une suite

4 Suite et tableur TICE

Différenciation
Questions supplémentaires
Manuel numérique enseignant

On considère les suites définies sur ℕ :

$(u_n) : u_n = -3n + 5$ $\quad$ $(v_n) : v_n = 2 - 0{,}02^n$ $\quad$ $(w_n) : w_n = n^2 - 18{,}4n + 54{,}4$

À l'aide d'un tableur, on obtient les valeurs des dix premiers termes de ces trois suites.

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	5	1	54,4
3	1	2	1,98	37
4	2	-1	1,9996	21,6
5	3	-4	1,999992	8,2
6	4	-7	1,99999984	-3,2
7	5	-10	1,999999997	-12,6
8	6	-13	2	-20
9	7	-16	2	-25,4
10	8	-19	2	-28,8
11	9	-22	2	-30,2

1. Conjecturer le sens de variation de chacune de ces trois suites.

2. a. Commenter les résultats affichés par le tableur pour v_7, v_8 et v_9.

b. Pour tout nombre entier naturel n, vérifier que : $v_{n+1} - v_n = 0{,}98 \times 0{,}02^n$.

c. Pour tout nombre entier naturel n, comparer v_{n+1} et v_n. Valider ou invalider la conjecture faite à la question **1**.

3. a. Déterminer la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$.

b. Déterminer le sens de variation de f.

c. Comparer ce résultat avec la conjecture faite à la question **1** sur le sens de variation de la suite (u_n).

4. a. À l'aide d'un tableur, calculer les vingt premiers termes de la suite (w_n), puis tracer le nuage de points associé.

b. Que dire de la conjecture faite à la question **1** sur le sens de variation de la suite (w_n) ?

OBJECTIF 1 Définir une suite

Savoir-faire 1 p. 21

Définitions

- Une **suite** numérique u, également notée (u_n), est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

- Le nombre $u(n)$, image par u du nombre entier n, est appelé le **terme d'indice n** ; il est noté $\boldsymbol{u_n}$.

- u_0 est le terme d'indice 0 ; c'est le premier terme de la suite, appelé terme « de rang 1 ».
- Une suite numérique (u_n) est donc une **liste ordonnée** de nombres réels, qui peut permettre de modéliser un **phénomène discret**.
- Dans le plan muni d'un repère, une suite est représentée par le **nuage de points de coordonnées (n ; u_n)** où $n \in \mathbb{N}$.

> $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
> ▶ Rabat I, Notations

> ⚠ Ne pas confondre le nombre u_n et la suite (u_n).

> Le premier terme d'une suite (u_n) est généralement u_0 mais il est possible de rencontrer des suites qui commencent à u_1 ou à un indice supérieur.

Notations

- Pour tout nombre entier naturel n non nul, le **terme qui précède** u_n est noté $\boldsymbol{u_{n-1}}$.
- Pour tout nombre entier naturel n, le **terme qui suit** u_n est noté $\boldsymbol{u_{n+1}}$.

> « Pour tout nombre entier naturel n » peut se noter : $\forall n \in \mathbb{N}$.
> ▶ Rabat I, Notations

Exemple

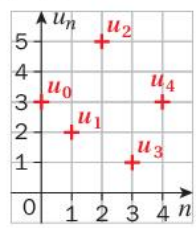
Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, a pour premiers termes les nombres 3, 2, 5, 1, 3.

Indice n	0	1	2	3	4
Terme u_n	3	2	5	1	3

Le premier terme (terme de rang 1) est $u_0 = 3$.

Le troisième terme (terme de rang 3) est $u_2 = 5$.

Le terme qui précède u_3 est u_2. Le terme qui suit u_3 est u_4.
On peut représenter (u_n) par le nuage de points ci-contre.



> L'évolution du chiffre d'affaires annuel d'une entreprise, d'un capital placé, ou l'évolution d'une population sont des exemples de phénomènes discrets pouvant être modélisés par une suite numérique.

Définition

Une suite (u_n) est donnée par une **formule explicite** lorsque le nombre u_n est donné en fonction du nombre entier naturel n. On a donc $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ où f est une fonction.

Exemple La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - x + 1$.
L'écriture $u_n = n^2 - n + 1$ est une **formule explicite** de la suite (u_n).
On a $u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$ et $u_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$.
Pour tout nombre entier naturel n :

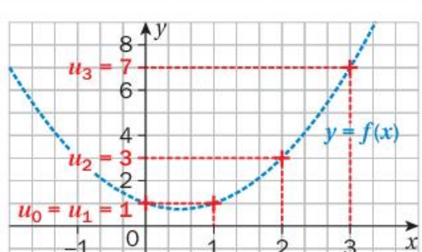
$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1.$$

> Avec la formule explicite, on peut calculer un terme quelconque. Ici, le 16e terme ou terme de rang 16 est :
> $u_{15} = 15^2 - 15 + 1$
> $= 211$.

Conséquence

Dans le plan muni d'un repère, les points du nuage représentant une suite de terme général $\boldsymbol{u_n = f(n)}$, où $n \in \mathbb{N}$, sont situés **sur la courbe représentative de la fonction f**.

Dans l'**exemple** précédent, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - x + 1$.
Les points du nuage ont pour coordonnées :
- $(0 ; u_0)$ soit $(0 ; 1)$;
- $(1 ; u_1)$ soit $(1 ; 1)$;
- $(2 ; u_2)$ soit $(2 ; 3)$;
- $(3 ; u_3)$ soit $(3 ; 7)$;
- etc.



> On peut utiliser un outil logiciel pour représenter ce nuage de points.
> ▶ Rabat III, Calculatrices

OBJECTIF 2 Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

Savoir-faire 2 et 3 p. 22-23

Définition

Une suite (u_n) est donnée **sous forme récurrente** (d'ordre 1) lorsque :
– un terme de la suite est donné ;
– le nombre u_{n+1} est donné en fonction du nombre u_n.
On a donc $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$, appelée **relation de récurrence**, où f est une fonction.

> Avec la forme récurrente, sans la connaissance de l'un des termes, il n'est pas possible de calculer les termes suivants.

> On pourrait aussi donner $\boldsymbol{u_n = f(u_{n-1})}$, avec n non nul.

Exemple

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$.
Comme v_0 est donné, on peut calculer v_1, v_2, etc.
Pour calculer v_1, on remplace n par zéro dans l'égalité $v_{n+1} = 2v_n$.
On a donc $v_1 = v_{0+1} = 2 \times v_0 = 2 \times 3 = 6$.
De la même manière, $v_2 = 2 \times v_1 = 2 \times 6 = 12$, $v_3 = 2 \times v_2 = 2 \times 12 = 24$, etc.

> La relation de récurrence $v_{n+1} = 2v_n$ peut s'écrire $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = 2x$.

Autre cas

Un terme peut être donné en fonction de deux termes précédents.
La forme récurrente est alors dite d'ordre 2.

> On peut aussi déterminer les termes d'une suite graphiquement.
> Savoir-faire 2 p. 22

Exemple

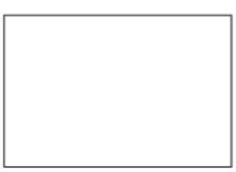
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3$.
On a donc $u_2 = 2u_1 - u_0 + 3 = 2 \times 1 - 2 + 3 = 3$,
$u_3 = 2u_2 - u_1 + 3 = 2 \times 3 - 1 + 3 = 8$, etc.

Modéliser une situation à l'aide d'une suite récurrente consiste à traduire cette situation en explicitant un procédé qui permet de calculer les termes de la suite à l'aide de termes précédents, c'est-à-dire déterminer une relation de récurrence.

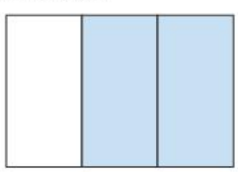
Exemple

Génération d'une suite à partir d'un motif géométrique

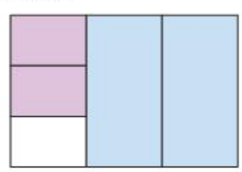
• On dispose d'une feuille de papier blanc de 630 cm^2.



• On partage la feuille en trois parties de même aire, puis on colorie deux des trois parties.



• On réitère ce procédé à la partie non coloriée de la feuille et ainsi de suite.



> Faire des figures permet de mieux comprendre la situation.

• On s'intéresse à l'aire de la partie non coloriée.

Modélisation de cette suite par une relation de récurrence

• Pour modéliser la situation, on note u_0 l'aire de la partie non coloriée au départ.
On a donc $u_0 = 630$ cm^2.
• On note u_n l'aire de la partie non coloriée après n partage(s), où n est un nombre entier naturel. À chaque étape, la partie non coloriée représente un tiers de la partie non coloriée précédente. On a donc $u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 = 210$ cm^2 et $u_2 = \frac{1}{3} \times u_1 = 70$ cm^2.
• On généralise le procédé de calcul et alors, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n.$$

> On introduit une suite (u_n) et on détermine sa relation de récurrence.

Modélisation de cette suite par un algorithme

L'algorithme ci-contre permet de calculer l'aire de la partie non coloriée après n partage(s).

```
A ← 630
Pour k allant de 1 à n inclus
    A ← 1/3 × A
Fin Pour
```

OBJECTIF 3 Déterminer le sens de variation d'une suite

Savoir-faire 4 et 5 p. 24-25

Le nombre p est un entier naturel.

Définitions

- Une suite (u_n) est dite **croissante** (respectivement **strictement croissante**) à partir de l'indice p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) à partir de l'indice p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- Une suite (u_n) qui est (strictement) croissante ou décroissante est dite (strictement) **monotone**.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, il suffit d'étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si **tous les termes** de la suite sont **égaux**, on dit que la suite est constante.

Exemples

- On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n non nul, $v_{n+1} = v_n + n^2$. Pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = v_n + n^2 - v_n = n^2 \geqslant 0, \text{ d'où } v_{n+1} \geqslant v_n.$$

La suite (v_n) est donc croissante à partir de l'indice 1, soit sur $\mathbb{N}^*$.

- On considère la suite (w_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $w_n = (-1)^n$.
On a $w_0 = 1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 1$. On a alors $w_0 > w_1$ mais $w_1 < w_2$.
La suite (w_n) n'est donc pas monotone.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des nombres entiers naturels privé de 0.

Rabat I, Notations

Pour démontrer qu'une suite n'est pas monotone, il suffit de deux inégalités constituant un **contre-exemple**.

Propriété

(u_n) est une suite telle que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à p, **u_n est strictement positif**.

- La suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
- La suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Démonstration à compléter : exercice 123 p. 36

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite est constante.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = \dfrac{1}{2n+7}$.

Pour tout nombre entier naturel n, $n \geqslant 0$, donc $2n + 7 \geqslant 7 > 0$, c'est-à-dire $u_n > 0$.

Pour tout nombre entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{2(n+1)+7}}{\dfrac{1}{2n+7}} = \frac{1}{2n+2+7} \times \frac{2n+7}{1} = \frac{2n+7}{2n+9} < 1 \quad \text{car} \quad 2n+7 < 2n+9.$$

On en conclut que (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

⚠ Il faut toujours vérifier que les termes sont strictement positifs.

Propriété

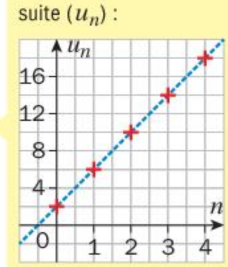
Si f est une fonction définie et monotone sur $[p\ ;+\infty[$ et si (u_n) est la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant p$, par $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) a la même monotonie que la fonction f.

Démonstration rédigée p. 36

Exemple

On considère la suite (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 4n + 2$.
Pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 4x + 2$. Or, f est une fonction affine et, comme 4 est strictement positif, cette fonction est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
On en conclut que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Représentation graphique de la fonction f et des premiers termes de la suite (u_n) :



1 Utiliser une formule explicite

OBJECTIF 1
Définir une suite

1. Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les cinq premiers termes et tracer le nuage de points correspondant.

a. (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = \sqrt{n}$.

b. (v_n) définie, pour tout nombre entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{1}{n}$.

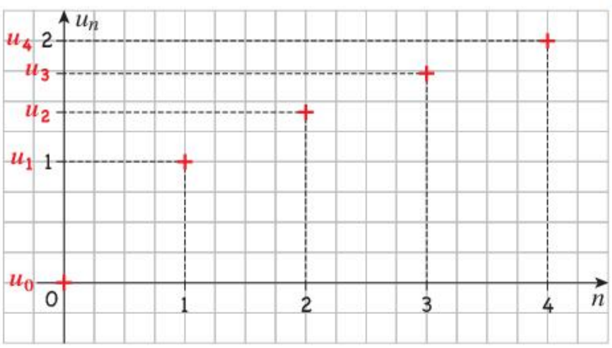
2. Pour chacune des suites précédentes :

a. calculer le dixième terme ;

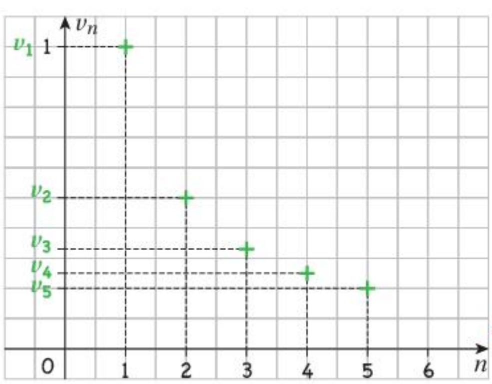
b. exprimer le terme d'indice $n + 1$ en fonction de n.

Solution

1. a. $u_0 = \sqrt{0} = 0$; $u_1 = \sqrt{1} = 1$; $u_2 = \sqrt{2}$; $u_3 = \sqrt{3}$; $u_4 = \sqrt{4} = 2$.



b. $v_1 = \frac{1}{1} = 1$; $v_2 = \frac{1}{2}$; $v_3 = \frac{1}{3}$; $v_4 = \frac{1}{4}$; $v_5 = \frac{1}{5}$.



2. a. $\boxed{u_9 = \sqrt{9} = 3}$ et $\boxed{v_{10} = \frac{1}{10}}$.

b. $\boxed{u_{n+1} = \sqrt{n+1}}$ et $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$.

À partir de la formule explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par la valeur choisie.

Le premier indice est 0, donc le cinquième terme est u_4 (et non u_5).

Le premier indice est 1, donc le cinquième terme est v_5.

Le calcul des termes avant le tracé permet de bien choisir l'échelle sur les axes du graphique.

Pour (u_n), le premier indice est 0, donc le dixième terme est u_9 (et non u_{10}).
Pour (v_n), le premier indice est 1, donc le dixième terme est v_{10}.

Application

9 **1.** Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.

a. (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2} - 7n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b. (v_n) définie par $v_n = 5(n+2)^2 - 3$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer le dix-huitième terme des deux suites précédentes.

10 **1.** Pour chaque suite, calculer les quatre premiers termes et tracer le nuage de points correspondant.

a. (w_n) définie par $w_n = -6n + 4$, avec $n \in \mathbb{N}$.

b. (t_n) définie par $t_n = (-1)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 4$.

2. Pour chacune des suites précédentes, exprimer le terme d'indice $n + 1$, en fonction de n.

Les incontournables 37 à 39 p. 29

2 Utiliser une formule récurrente

OBJECTIF 2
Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

1. Déterminer les quatre premiers termes de chacune des suites ci-dessous.
a. (w_n) définie par $w_0 = 4\,096$ et, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{w_n}$.
b. (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel, $u_{n+1} = -0{,}2u_n\,(u_n - 10)$.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = -0{,}2x(x - 10)$.
Dans le plan muni d'un repère, à l'aide de la courbe représentative de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$, déterminer graphiquement les trois premiers termes de la suite (u_n).

Solution

1. a. $w_0 = \underline{4\,096}$; $w_1 = w_{0+1} = \sqrt{w_0} = \sqrt{4\,096} = \underline{64}$;
$w_2 = w_{1+1} = \sqrt{w_1} = \sqrt{64} = \underline{8}$; $w_3 = w_{2+1} = \sqrt{w_2} = \sqrt{8} = \underline{2\sqrt{2}}$.

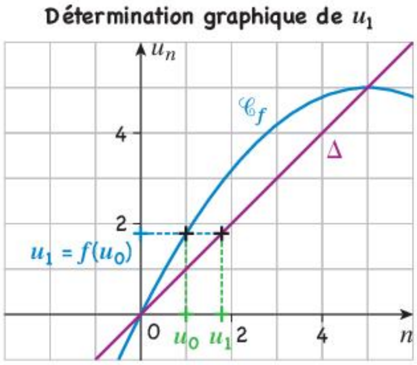
b. $v_0 = \underline{1}$; $v_1 = \sqrt{v_0} = \sqrt{1} = \underline{1}$; $v_2 = \sqrt{v_1} = \sqrt{1} = \underline{1}$; $v_3 = \sqrt{v_2} = \sqrt{1} = \underline{1}$.

Les suites (w_n) et (v_n) sont définies par la même relation de récurrence mais ne sont pas égales : on remarque ainsi l'influence du choix du premier terme de la suite.

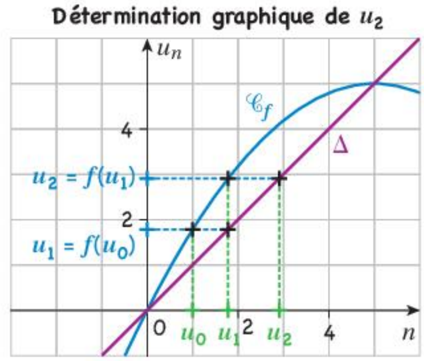
Dans la pratique, il n'est pas nécessaire d'écrire le détail du calcul des indices comme à la question **a**.

2. Pour déterminer graphiquement les trois premiers termes de la suite (u_n) dans un repère du plan, on trace la courbe représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.

Détermination graphique de u_1



Détermination graphique de u_2



- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On construit son image $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- À l'aide de la droite Δ, on place u_1 sur l'axe des abscisses.
- On construit son image $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
- On peut construire de la même façon u_3, u_4, etc.

On a déjà $\boxed{u_0 = 1}$ et par lecture graphique, avec la précision permise, on a :
$\boxed{u_1 \approx 1{,}8}$ et $\boxed{u_2 \approx 2{,}9}$.

Application

11 Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites ci-dessous.
a. (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$, avec $n \in \mathbb{N}$.
b. (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = v_n + 5n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

12 Pour chacune des suites ci-dessous :
– donner la fonction correspondante et en tracer la courbe représentative sur l'intervalle I indiqué ;
– en déduire graphiquement les quatre premiers termes.
a. (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 4$ avec $n \in \mathbb{N}$; $\mathrm{I} = [-2\,;14]$.
b. (v_n) définie par $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{3v_n - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$; $\mathrm{I} = [0{,}5\,;2{,}5]$.
c. (w_n) définie par $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = \dfrac{5}{w_n + 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$; $\mathrm{I} = [0{,}5\,;5]$.
d. (t_n) définie par $t_0 = -2$ et $t_n = {t_{n-1}}^2 - 4$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; $\mathrm{I} = [-6\,;14]$.

Les incontournables 40 et 41 p. 29

3 Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

OBJECTIF 2
Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

1. Avec des jetons, on construit un motif géométrique par une succession de figures dont les quatre premières sont représentées ci-dessous.

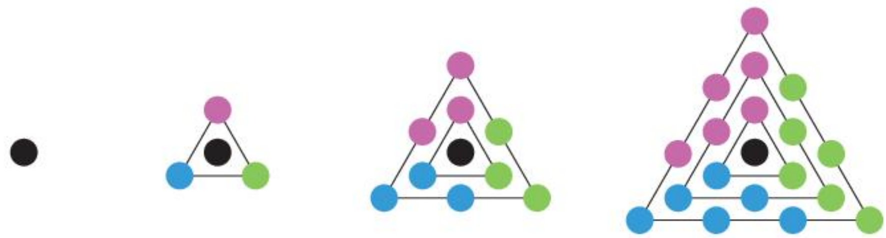


Figure 1 **Figure 2** **Figure 3** **Figure 4**

Pour dénombrer le nombre de jetons utilisés dans chaque figure, modéliser la construction de ce motif géométrique à l'aide d'une suite.

2. Un employeur propose à un nouvel ouvrier la rémunération suivante :

- au 1^er^ janvier 2019, un salaire mensuel de 1 500 € ;
- au 1^er^ janvier de chaque année suivante, une augmentation de 4 % de son salaire mensuel à laquelle il ajoute 20 €.

a. Déterminer le salaire mensuel de cet ouvrier en 2020, puis en 2021.

b. Modéliser à l'aide d'une suite le salaire de cet ouvrier en $(2019 + n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

Solution

1. Si on note u_n le nombre de jetons de la figure n où n est un nombre entier naturel non nul, on a $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 10$, $u_4 = 19$.

> On introduit une suite (u_n) et on indique ses premiers termes (en comptant sur les figures).

On peut remarquer que pour construire une nouvelle figure, on ajoute un même nombre de jetons des trois couleurs, égal au numéro de la figure précédente.

> On verbalise l'augmentation du nombre de jetons.

On a donc la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + 3n}$.

2. a. Augmenter de 4 % revient à multiplier par 1,04.

> L'augmentation de 4 % intervient avant l'ajout des 20 €.

Le salaire de cet ouvrier en 2020 sera : $1{,}04 \times 1\,500 + 20 = 1\,560 + 20 = \underline{1\,580\ €}$.

Le salaire en 2021 sera : $1{,}04 \times 580 + 20 = 1\,643{,}20 + 20 = \underline{1\,663{,}20\ €}$.

b. On note S_n le salaire de cet ouvrier en $(2019 + n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

> On introduit une suite (S_n).

Le salaire en 2019 est $S_0 = 1\,500$ €.

Le salaire en 2019 + 1, soit 2020, est $S_1 = 1{,}04 \times S_0 + 20 = 1\,580$ €.

Le salaire en 2019 + 2, soit 2021, est $S_2 = 1{,}04 \times S_1 + 20 = 1\,663{,}20$ €.

> On met en évidence le procédé récurrent du calcul du salaire.

On en déduit la forme récurrente de la suite (S_n), pour tout nombre entier naturel :

$$\boxed{S_0 = 1\,500 \quad \text{et} \quad S_{n+1} = 1{,}04 \times S_n + 20}.$$

> En généralisant le procédé de calcul, on obtient la relation de récurrence.

Application

13 Avec des carreaux, on construit un motif géométrique par la succession de figures suivantes.

Figure 1 **Figure 2** **Figure 3** **Figure 4**

- Modéliser, à l'aide d'une suite récurrente, le nombre de carreaux de chaque figure.

14 En 2019, un journal régional comptait 62 000 abonnés. On suppose que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et que l'on compte 4 500 nouveaux abonnés.

a. Déterminer le nombre d'abonnés à ce journal en 2020, puis en 2021.

b. Modéliser, à l'aide d'une suite récurrente, le nombre d'abonnés à ce journal.

Les incontournables 42 et 43 p. 29

Vidéo
Déterminer les variations d'une suite en comparant des termes
hatier-clic.fr/ma1024

OBJECTIF 3
Déterminer le sens de variation d'une suite

4 Déterminer les variations d'une suite en comparant des termes

Déterminer les variations de la suite (u_n), dite *harmonique*, définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, en comparant ses termes :

a. à l'aide d'une différence ;

b. à l'aide d'un quotient.

Solution

a. Méthode de la différence de deux termes consécutifs

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

On sait que n est un nombre entier naturel non nul, donc $n > 0$ et $n + 1 > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on a donc :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. Méthode du quotient de deux termes consécutifs

On sait que n est un nombre entier naturel non nul, donc $n > 0$.

Alors, pour tout nombre entier naturel non nul n : $u_n = \frac{1}{n} > 0$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

En effet, $n > 0$, donc $n + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ pour un nombre entier n quelconque.

⚠ Il ne faut pas se contenter de tester quelques termes particuliers.

On écrit l'expression sous la forme d'une seule fraction, puis on simplifie, afin de faciliter l'étude du signe.

On détermine le signe de la différence ; un tableau de signes peut parfois être utile pour justifier.

On commence par vérifier que les termes de la suite sont bien strictement positifs.

On fait apparaître 1 pour faciliter la comparaison à 1, mais on peut aussi conclure directement en remarquant que $n < n + 1$.

Application

15 À l'aide d'une différence de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$.

a. $u_n = n^2$

b. $v_n = -3n + 8$

c. $w_n = n^3$

d. $t_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + 2{,}4n$

16 À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations des suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$.

a. $u_n = n^2$

b. $v_n = 4 \times 3^n$

c. $w_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

d. $t_n = \frac{3}{n+2}$

Les incontournables 44 et 45 p. 29

5 Déterminer les variations d'une suite à l'aide d'une fonction

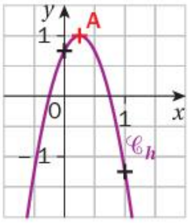
OBJECTIF 3
Déterminer le sens de variation d'une suite

À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

b. (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \sqrt{n}$.

c. (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = h(n)$, avec h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -4(x - 0{,}25)^2 + 1$, dont la représentation graphique ci-contre a pour sommet le point A d'abscisse 0,25.



Solution

a. On identifie la fonction f telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$;

f est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On reconnaît la fonction inverse dont on connaît le sens de variation.

Or la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$ et, par conséquent, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. On identifie la fonction g telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = g(n)$;
g est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

On reconnaît la fonction racine carrée dont on connaît le sens de variation.

Or la fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et, par conséquent, la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. D'après le graphique fourni, le tableau de variations de la fonction h est :

x	$-\infty$	0	0,25	1	$+\infty$
Variations de h	↗	0,75	1	−1,25	↘

La fonction h est donc strictement décroissante sur $[0{,}25\ ;+\infty[$ et, par conséquent, la suite (w_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

1 est le premier nombre entier naturel qui suit 0,25.

Par ailleurs, $w_0 = h(0) = 0{,}75$ et $w_1 = h(1) = -1{,}25$.

Comme la fonction change de monotonie en 0,25, on vérifie l'ordre des deux premiers termes.

On constate que $w_0 > w_1$.

On en conclut que la suite (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

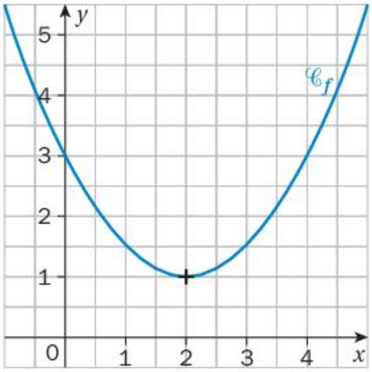
Application

17 En étudiant une fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^3$.

b. (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = -3n + 8$.

c. (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = f(n)$, avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$ dont la représentation graphique, donnée ci-contre, a pour sommet le point d'abscisse 2.



Les incontournables 46 p. 29

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Suite : définition

Une **suite** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

La suite u est souvent notée (u_n).

- $u(n) = u_n$ est le **terme d'indice** n.
Le **terme qui précède** u_n est noté u_{n-1}.
Le **terme qui suit** u_n est noté u_{n+1}.

- Dans le plan muni d'un repère, la suite (u_n) est représentée, par le **nuage de points** de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Cours 1 p. 18

Suite et formule explicite

Une suite u est donnée par une **formule explicite** lorsque le **terme** u_n est donné **en fonction de** n.

Exemple

$u_n = 1 + \dfrac{5}{n+1}$ est une formule explicite.

n	u_n
0	$u_0 = 1 + \dfrac{5}{0+1} = 1 + \dfrac{5}{1} = 6$
1	$u_1 = 1 + \dfrac{5}{1+1} = 1 + \dfrac{5}{2} = 3{,}5$
2	$u_2 = 1 + \dfrac{5}{2+1} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{3}$
...	...

Cours 1 p. 18

Suite et forme récurrente

Une suite u est donnée sous **forme récurrente** (d'ordre 1) lorsque le **terme** u_{n+1} est donné **en fonction du terme** u_n et qu'un terme est donné.

Un terme est exprimé en fonction du précédent.

Exemple $u_{n+1} = 1 + 0{,}2u_n$ et $u_0 = 3$.

Relation de récurrence — Un terme donné

Pour calculer u_1 à partir de u_0, je remplace n par 0.

Pour calculer u_2 à partir de u_1, je remplace n par 1.

$u_0 = 3 \longrightarrow u_1 = 1 + 0{,}2u_0 = 1 + 0{,}2 \times 3 = 1{,}6 \longrightarrow u_2 = 1 + 0{,}2u_1 = 1 + 0{,}2 \times 1{,}6 = 1{,}32$

Cours 2 p. 19

Suites et variations

Le nombre p est un entier naturel.

(u_n) est **croissante** (**strictement croissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ ($u_{n+1} > u_n$)

(u_n) est **décroissante** (**strictement décroissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ ($u_{n+1} < u_n$).

Une suite est **constante** à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite **monotone** est une suite qui est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Point méthode : déterminer les variations d'une suite (u_n)

J'utilise les variations d'une fonction.	Si $\forall n \geqslant p, u_n > 0$, je compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.	Je détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_n = f(n)$ et f est monotone sur $[0\ ;+\infty[$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation.	• (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. • (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.	• (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. • (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Cours 3 p. 20

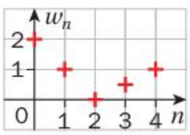
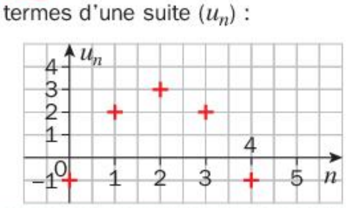
… ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
18 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 7$.	Le premier terme est u_0.	Le premier terme est u_1.	Le deuxième terme est u_1.	Le deuxième terme est u_2.
19 La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 + \dfrac{5}{n}$.	Le premier terme est v_0.	Le premier terme est v_1.	Le terme qui suit v_5 est v_4.	Le terme qui précède v_5 est v_4.
20 On a représenté les premiers termes d'une suite (w_n) : 	$w_0 = 2$	$w_0 = 1{,}5$	$w_4 = 1$	$w_4 = 4$
21 La suite (d_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $d_n = 8 - \dfrac{3}{n}$. On a :	$d_{n+1} = 9 - \dfrac{3}{n+1}$	$d_{n+1} = 8 - \dfrac{4}{n+1}$	$d_{n+1} = 8 - \dfrac{3}{n+1}$	$d_{n+1} = 9 - \dfrac{3}{n+1}$
22 La suite (t_n) est définie par $t_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 2 - t_n$.	$t_1 = 2$	$t_1 = -3$	La suite (t_n) est donnée sous forme explicite.	La suite (t_n) est donnée sous forme récurrente.
23 La suite (a_n) est définie par $a_0 = -4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n - 8$.	$a_1 = -2$	$a_1 = -10$	$a_2 = -13$	$a_2 = -1$
24 La suite (b_n) est définie par $b_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n - 5$.	$b_0 = 6$	b_0 n'existe pas.	$b_3 = -9$	$b_3 = -11$
25 La suite (c_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = 1{,}5n - 2$.	(c_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.	(c_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.	(c_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.	(c_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
26 Une suite (u_n) vérifie : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.	(u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.	(u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.	$u_3 < u_4$.	On ne peut pas donner le sens de variation de (u_n).
27 Une suite (v_n) vérifie, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -0{,}5 - n$.	(v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.	(v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.	$v_3 < v_4$.	On ne peut pas donner le sens de variation de (v_n).
28 Une suite (w_n) vérifie, pour tout nombre entier naturel n, $w_n > 0$ et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1{,}5 + n^2$.	(w_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.	(w_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.	$w_3 < w_4$.	On ne peut pas donner le sens de variation de (w_n).
29 On a représenté les premiers termes d'une suite (u_n) : 	(u_n) est monotone.	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) est décroissante.	(u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 2.

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

30 Parlons stratégies ! À l'oral

Étudier la monotonie de chacune des suites (u_n) ci-dessous, n étant un nombre entier naturel.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $u_n = -7n + 3$ **b.** $u_n = 0{,}33^n$ **c.** $u_n = (-1)^n \times n$ **d.** $u_{n+1} = u_n + 3n^2$

Différentes stratégies pour déterminer les variations d'une suite

Stratégie 1
Je calcule la différence de deux termes successifs et j'en étudie le signe.

Stratégie 2
Je calcule le quotient de deux termes successifs et je le compare avec 1.

Stratégie 3
J'exprime le terme général à l'aide d'une fonction dont je connais la monotonie.

J'ai une **autre stratégie** !

31 Parlons stratégies ! À l'oral

Pour chacune des suites (v_n) ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, déterminer le plus petit nombre entier naturel n, tel que $v_n > 50$.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $v_n = 100$ **b.** $v_n = 5n$ **c.** $v_{n+1} = 4v_n - 2{,}5$ avec $v_0 = 1{,}6$. **d.** $v_n = n^3 + n^2 + \sqrt{n}$

Différentes stratégies pour déterminer un seuil

Stratégie 1
Je résous une inéquation.

Stratégie 2
J'utilise un tableau de valeurs (calculatrice ou tableur).

Stratégie 3
J'utilise un algorithme.

J'ai une **autre stratégie** !

32 En moins d'une minute !

Justifier que chacune des suites définies ci-dessous n'est pas monotone.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-15{,}15)^{n+3}$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n - 0{,}5)(n - 1{,}5)$.
c. $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -2w_n$.

33 En moins de deux minutes !

Déterminer la monotonie de chacune des suites définies ci-dessous.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3{,}5 \times 2{,}4^n$.
b. $v_0 = 78$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - (v_n)^2$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = (-4{,}4)^{2n}$.

34 Avec la calculatrice

Une suite (u_n) est définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$. Dans chaque cas, afficher le graphique de la fonction f à la calculatrice pour conjecturer les variations de f et déduire celles de la suite (u_n).

a. $f(x) = -\sqrt{x+1}$ **b.** $f(x) = (x - 9{,}8)^3$ **c.** $f(x) = 0{,}8x^2 + 3{,}6x - 4$ **d.** $f(x) = -\dfrac{1}{(x+0{,}5)^2}$

35 En moins d'une minute ! ALGORITHMIQUE

À l'aide d'une fonction f, on définit une suite (u_n) par $u_0 = 15$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On sait qu'il existe un plus petit nombre entier naturel N, tel que $u_N < 5$.

- Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour déterminer la valeur de N.

```
N ← 0
u ← …
Tant que …
    u ← f(u)
    N ← …
Fin Tant que
```

36 Chacun sa méthode En groupe

Les suites (u_n) ci-dessous sont définies sur $\mathbb{N}$.
Dans chaque cas, proposer au moins deux méthodes différentes, dont une utilisera un outil logiciel, pour déterminer le plus petit nombre entier naturel N, tel que :

a. $u_N < 20$ avec $u_n = \dfrac{400}{n+2}$;

b. $u_N > 0{,}9$ avec $u_0 = 0{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Utiliser une formule explicite

37 Pour chaque suite ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer le terme d'indice 3 et le septième terme.

a. $u_n = -5{,}5(n-2)+4$ **b.** $v_n = 2\sqrt{n+1}$

c. $w_n = 5n^2 - 2n + 6$ **d.** $t_n = 1 + \dfrac{2}{n+1}$

38 Pour chaque suite ci-dessous, calculer les cinq premiers termes.

a. $u_n = \dfrac{3}{2}n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $w_n = (2n+1)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

d. $t_n = \dfrac{-3}{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

39 Pour chaque suite ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer les quatre premiers termes, puis tracer le nuage de points correspondant.

a. $u_n = 2{,}5(-1)^n$ **b.** $v_n = n^2$

c. $w_n = 4 - 3n$ **d.** $t_n = \dfrac{10}{n+1}$

Utiliser une formule récurrente

40 Pour chacune des suites définies ci-dessous, déterminer les cinq premiers termes.

a. $(u_n) : u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $(v_n) : v_0 = -2$ et $v_n = -v_{n-1} + 4$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $(w_n) : w_1 = 1$ et $w_{n+1} = w_n^{\,2} + n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $(t_n) : t_2 = 0$ et $t_{n+1} = \sqrt{t_n^{\,2}+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

41 Pour chacune des suites ci-dessous :
– associer la fonction qui convient et en tracer la courbe représentative sur l'intervalle I fourni ;
– en déduire graphiquement les quatre premiers termes.

a. $u_0 = 6$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$; $\mathrm{I} = [0 ; 60]$.

b. $v_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}$; $\mathrm{I} = [0{,}2 ; 5]$ (on admet que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$).

c. $w_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^{\,2} - w_n - 2$; $\mathrm{I} = [-3 ; 6]$.

d. $t_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n^{\,2} - t_n - 2$; $\mathrm{I} = [-3 ; 12]$.

Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

42 Modéliser le programme de calcul suivant à l'aide d'une relation de récurrence.

> – Choisir un nombre.
> – Calculer le carré de ce nombre.
> – Tripler le résultat obtenu.
> – Répéter ces étapes à partir du nombre ainsi obtenu.

43 Une ville compte 195 médecins. En raison des départs à la retraite, elle enregistre chaque année une perte de médecins de 4 % et on estime à 5 le nombre de nouveaux médecins qui s'installent.

• À l'aide d'une suite, modéliser cette situation pour estimer le nombre de médecins dans n années.

Déterminer les variations d'une suite

… en comparant des termes

44 À l'aide d'une différence de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 8n + 3$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 6n^2 - 2n + 5$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_1 = -3$ et $w_{n+1} = w_n - \dfrac{4}{n^2}$.

45 À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1{,}5 \times 0{,}5^n$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 0{,}5 \times 1{,}5^n$.

d. (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{5}{n+1}$.

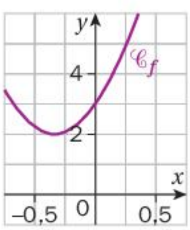
… à l'aide d'une fonction

46 À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de chacune des suites ci-dessous.

a. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 7 - 3n$.

b. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 7{,}3$.

c. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$, dont on donne la représentation graphique ci-contre, qui a pour sommet le point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$.



Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Définir une suite

Savoir-faire 1 p. 21

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

47 Vrai ou faux ?
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 5$.
a. « $u_0 = -5$. »
b. « $u_5 = 20$. »
c. « La valeur du 10e terme est 95. »

48 Vrai ou faux ?
La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{2^n}{n}$.
a. « v_0 n'existe pas. »
b. « $v_4 = 8$. »
c. « La valeur du 10e terme est 102,4. »

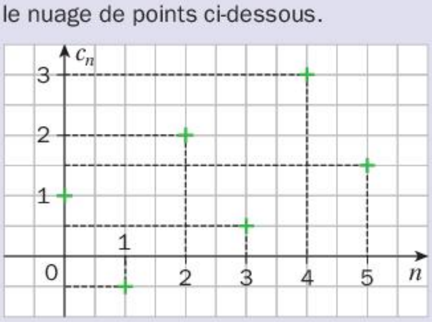
49 QCM
Les premiers termes de la suite (w_n) sont $w_0 = 3$, $w_1 = 5$, $w_2 = 7$et $w_3 = 9$.
Une formule explicite de la suite (w_n) peut être :
a. $w_n = 3 + 2n^2$
b. $w_n = n^2 + n + 3$
c. $w_n = 2n + 3$
d. $w_n = 5 + 2(n - 1)$

50 La suite (a_n) est la suite des puissances positives de 3. On a alors $a_0 = 3^0 = 1$.
a. Que valent a_1 et a_2 ?
b. Quel est le terme qui précède a_6 et quelle est sa valeur ?
c. Quel est le terme qui suit a_6 et quelle est sa valeur ?

51 QCM
Si on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 1 - n^2$, alors $u_{n+1} = \dots$:
a. $2 - n^2$
b. $1 - (n + 1)^2$
c. $-n^2 + 2n$
d. $-n^2 - 2n$

52 QCM
Si on a, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = 2n + \sqrt{n}$, alors $v_{n+1} = \dots$:
a. $2n + \sqrt{n} + 2$
b. $2n + \sqrt{n+1} + 2$
c. $2(n + 1) + \sqrt{n} + 1$
d. $2(n + 1) + \sqrt{n+1}$

53 Les premiers termes de la suite (c_n) sont représentés par le nuage de points ci-dessous.



- Lire la valeur de chacun des termes c_0, c_1, c_2 et c_5.

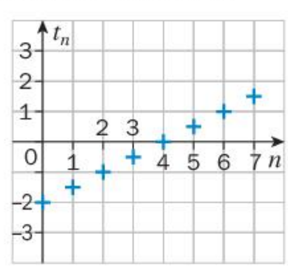
54 QCM Les premiers termes de la suite (t_n) sont $t_0 = 7$, $t_1 = 3$, $t_2 = 7$ et $t_3 = 3$.
Parmi les formules explicites suivantes, trouver celle qui peut correspondre à la suite (t_n). Justifier.
a. $7 - 4n$
b. $4n^2 - 8n + 7$
c. $7 - 4^n$
d. $5 + 2 \times (-1)^n$

55 La suite (b_n) est la suite des multiples positifs non nuls de 7. On a alors $b_0 = 1 \times 7 = 7$.
a. Calculer b_1 et b_2.
b. Quel est le terme qui précède b_5 et quelle est sa valeur ?
c. Quel est le terme qui suit b_5 et quelle est sa valeur ?

56 Pour chacune des suites ci-dessous, conjecturer une formule explicite et déterminer le terme d'indice 4.
a. $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16$, $u_4 = \dots$.
b. $v_0 = 1$, $v_1 = \dfrac{1}{2}$, $v_2 = \dfrac{1}{3}$, $v_3 = \dfrac{1}{4}$, $v_4 = \dots$.
c. $w_0 = 0$, $w_1 = \dfrac{1}{5}$, $w_2 = \dfrac{4}{5}$, $w_3 = \dfrac{9}{5}$, $w_4 = \dots$.
d. $t_0 = 1$, $t_1 = -2$, $t_2 = 4$, $t_3 = -8$, $t_4 = \dots$.

57 **1.** Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les six premiers termes, puis représenter le nuage de points correspondant.
a. Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{0{,}5n + 3}{n - 1}$.
b. Pour tout nombre entier naturel n, $v_n = 1{,}5^n - 2$.
c. Pour tout nombre entier naturel n, $w_n = n^2 - n$.
d. Pour tout nombre entier naturel n, $t_n = 1 + 2 \times (-1)^n$.
2. Pour chacune des suites précédentes, exprimer le terme d'indice $n + 1$ en fonction de n.

58 On a représenté ci-dessous les premiers termes de la suite (t_n) par un nuage de points.



a. Réaliser un tableau de valeurs.
b. Quelle remarque peut-on formuler sur les points du nuage ?
c. Conjecturer une formule explicite de la suite (t_n).
d. En supposant exacte la conjecture émise à la question c, à partir de quel nombre entier k, t_k est-il supérieur à 40 ?

Fichiers Python et logiciel
Ex. 61, 62, 63 et 64
Manuel numérique enseignant

59 Copies à la loupe

Eloyse, Hassan et Floria ont rédigé les réponses suivantes sur leurs cahiers pour obtenir une écriture simplifiée du terme d'indice $n + 1$ de la suite (u_n).

Eloyse

Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 2n + (-2)^n$.
Donc $u_{n+1} = (n+1)^2 - 2n + 1 + (-2)^{n+1}$
$= (n^2 + 2n + 1) - 2n + 1 + (-2)^{n+1}$
$= n^2 + 2 + (-2)^{n+1}$

Hassan

On a $u_n = n^2 - 2n + (-2)^n$
donc $u_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + (-2)^{n+1}$
$= n^2 + 1 - 2n - 2 - 2 + (-2)^n$
$= n^2 - 2n - 1 - 2 \times (-2)^n$

Floria

Comme $u_n = n^2 - 2n + (-2)^n$
alors $u_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + (-2)^{n+1}$
$= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + (-2)^{n+1}$
$= n^2 - 1 - 2^{n+1}$

- Leurs réponses sont-elles correctes ?
Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chacune des erreurs identifiées.

60 Dénombrement et motif géométrique

On considère la succession de figures suivantes.

Figure 1 Figure 2 Figure 3

On note b_n le nombre de bâtons nécessaires à la construction de la figure n où $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Donner les valeurs de b_1, b_2 et b_3.
b. Tracer la figure 4 et donner la valeur de b_4.
c. Conjecturer une formule explicite de la suite (b_n).

2. En supposant exacte la conjecture émise à la question **1c**, déterminer :
a. la valeur de b_{20} ;
b. quelle est la plus grande figure que l'on puisse construire avec 200 bâtons.

61 PROGRAMMATION python

- Écrire une fonction en Python de paramètre n, un nombre entier naturel, et qui renvoie la valeur de :

$$u_n = \frac{n^3 - 5}{5n + 3}.$$

★★

62 ALGORITHMIQUE

On dispose de l'algorithme suivant.

$U \leftarrow 5N + 3$
$U \leftarrow U - 2^N$

a. Quelle est la valeur de la variable U à la fin de l'algorithme pour $N = 0$? pour $N = 1$? pour $N = 2$? pour $N = 3$?
b. L'algorithme calcule un terme d'une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$. Donner une formule explicite de (u_n).
c. Calculer la valeur du 8^e^ terme.

63 TICE

On utilise la feuille de calcul ci-dessous pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n).

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	b_n					
3	c_n	-1	-1	1	5	11

a. Pour tout nombre entier naturel n, $b_n = 3 + n + n^2$.
Quelle formule, à recopier vers la droite, peut-on saisir dans la cellule B2 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?
b. Pour calculer les termes de la suite (c_n), on a saisi la formule suivante dans la cellule B3 : `=B1^2–C1`.
Quelle est la formule explicite de la suite (c_n) ?

64 PROGRAMMATION python

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
def V(n):
    t=n*n+5
    t=t/pow(2,n)
    return t
```

Aide
`pow(2,n)` permet de calculer 2^n.

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
c. En déduire une autre écriture de cette fonction en Python utilisant une seule affectation.

65

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer une expression du terme d'indice $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

a. $u_n = 3 - 0{,}5^n$
b. $v_n = 4n + \sqrt{5 + n}$
c. $w_n = \dfrac{2n+3}{n+7}$
d. $t_n = 1 - 5n + 2n^2$

66 Look and say sequence IN ENGLISH ▸ p. 381

Look at the following number sequence, write down the next two terms and explain how the sequence is found:
1 ; 11 ; 21 ; 1 211 ; 111 221 ; …

Info
This kind of sequences was first analyzed in 1986 by mathematician John Horton Conway (who noticed they have some interesting properties.)

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

Savoir-faire 2 et 3 p. 22-23

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

67 Vrai ou faux ?
La suite (u_n) est définie par $u_0 = -3$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 8$.
a. « $u_1 = 14$. » **b.** « $u_2 = -36$. » **c.** « $u_3 = 48$. »

68 Vrai ou faux ?
La suite (v_n) est définie par $v_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 2^n - 0{,}5v_n$.
a. « $v_1 = 0$. » **b.** « $v_2 = 4$. » **c.** « $v_3 = 2{,}75$. »

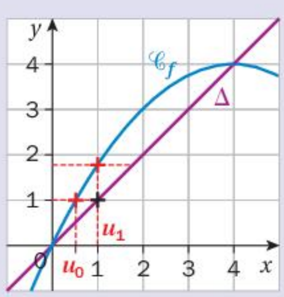
69 QCM
Les premiers termes de la suite (w_n) sont $w_0 = 3$, $w_1 = 7$, $w_2 = 15$ et $w_3 = 31$.
Une relation de récurrence de la suite (w_n) peut être :
a. $w_{n+1} = w_n + 4$ **b.** $w_{n+1} = 3w_n - 2$
c. $w_{n+1} = 2w_n + 1$ **d.** $w_{n+1} = 3w_n - 2 - 4n$

70 La suite (a_n) est définie par son premier terme $a_1 = 4$, et chaque terme est la moitié du précédent élevée au carré.
- Proposer une relation de récurrence de la suite (a_n).

71 La suite (b_n) est définie par son premier terme $b_0 = 1$, et chaque terme est le triple du précédent auquel on enlève 5.
- Proposer une relation de récurrence de la suite (b_n).

72 Vrai ou faux ?
Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2 - x + 6$.
La suite (c_n) est définie par $c_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = f(c_n)$.
a. « $c_{n+1} = n^2 - n + 6$. » **b.** « $c_{n+1} = (c_n)^2 - c_n + 6$. »
c. « $c_1 = 8$. » **d.** « $c_1 = 6$. »

73 On a représenté ci-contre les deux premiers termes de la suite (u_n) définie par :
$u_{n+1} = f(u_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.
- Graphiquement, estimer la valeur de u_0, u_1, u_2 et u_3.



74 Calculer les termes v_1 et v_2 de la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = n - 2v_n$.

75 La suite (w_n) est définie par $w_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = (n+1)w_n$.
- Calculer w_1 et w_2.

76 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où :
$$f(x) = 0{,}5x(4 - x) + 2.$$
a. Expliciter la relation entre u_{n+1} et u_n.
b. Calculer u_1, u_2 et u_3.
c. Conjecturer la valeur de u_{2020}.

77 La suite (v_n) est définie par $v_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 5}{4}$.
a. Calculer v_1, v_2 et v_3.
b. Donner une expression de la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.

78 Pour chacune des suites ci-dessous, conjecturer une relation de récurrence et déterminer le terme d'indice 4.
a. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 13$, $u_3 = 40$, $u_4 = \ldots$.
b. $v_0 = 10$, $v_1 = 6$, $v_2 = 4$, $v_3 = 3$, $v_4 = \ldots$.
c. $w_0 = 2$, $w_1 = 3$, $w_2 = 8$, $w_3 = 63$, $w_4 = \ldots$.

79 Dénombrement et motif géométrique
Avec des jetons, on construit une succession de figures ; voici les quatre premières :

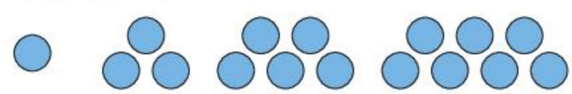


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

- Modéliser à l'aide d'une suite récurrente le nombre de jetons utilisés dans chaque figure.

80 Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer les cinq premiers termes.
a. $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n{}^2 - 5$.
b. $v_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n{}^2 - 2^n$.
c. $w_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (1 - w_n)(1 + 0{,}5w_n) + 3$.

Aide On note $u_n{}^2$ pour $(u_n)^2$.

81 Pour chaque premier terme a_0, déterminer les cinq premiers termes de la suite (a_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1 - a_n}{1 + a_n}$.
a. $a_0 = 0$ **b.** $a_0 = 4$ **c.** $a_0 = -5$ **d.** $a_0 = 0{,}2$

82 La suite (b_n) est définie par $b_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $b_{n+1} = (n - 2)b_n$.
a. Calculer b_1, b_2 et b_3.
b. Conjecturer la valeur de b_n pour $n \geqslant 3$.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 84, 88 et 90
Manuel numérique enseignant

★★

83 De la réponse à la question (et vice-versa)

Cynthia a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

a. Avec $n = 0$: $u_1 = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{u_0} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Avec $n = 1$: $u_2 = \frac{u_1}{2} - \frac{1}{u_1} = 0{,}25 - 2 = -1{,}75$.

De la même manière, $u_3 = -0{,}304$ et $u_4 = 3{,}142$.

b. La fonction f est $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

c. Si $u_0 = 0$ alors $u_1 = u_2 = 0$ et tous les termes suivants sont nuls.

1. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Cynthia.

2. Proposer des améliorations dans la réponse de Cynthia.

Maths à l'oral
Expliquez les modifications apportées à la réponse de Cynthia.

84 ALGORITHMIQUE

On dispose de l'algorithme suivant.

```
U ← −2
Pour k allant de 1 à N
    U ← U − U² + 5
Fin Pour
```

a. Quelle est la valeur de la variable U à la fin de l'algorithme pour $N = 1$? pour $N = 2$?

b. L'algorithme permet de calculer un terme d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Donner une forme récurrente de (u_n) en précisant la valeur de u_0.

85

La suite (t_n) est définie par $t_0 = -1$, $t_1 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+2} = 1 - t_n + t_{n+1}$.

a. Calculer les termes d'indices 2 à 10.

b. Représenter les termes d'indices 0 à 10 de la suite (t_n) par un nuage de points.

c. À l'aide de la représentation graphique, conjecturer la valeur de t_{200}.

86 ALGORITHMIQUE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{(1+u_n)^2}$.

a. Rédiger un algorithme qui calcule le terme d'indice 10 de la suite (u_n).

b. Modifier l'algorithme afin qu'il calcule le terme d'indice p, où $p \in \mathbb{N}^*$, de la suite (u_n).

87 IN ENGLISH ▸ p. 381

The first term of a sequence is $w_0 = -1$. The general term is defined by $w_n = -0{,}5w_{n-1} + 3$ when $n \geqslant 1$.

• Without using a calculator, draw a graph to find the first five terms of this sequence.

88 TICE

On utilise la feuille de calcul ci-contre pour calculer les premiers termes de deux suites (b_n) et (c_n).

	A	B	C
1	n	b_n	c_n
2	0		-3
3	1		1,5
4	2		0,2
5	3		-1,5
6	4		9
7	5		0,5

1. La suite (b_n) est définie par $b_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 3 - n + b_n$.

a. Quelle valeur doit-on saisir dans la cellule B2 ?

b. Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir dans la cellule B3 pour calculer les termes de la suite (b_n) ?

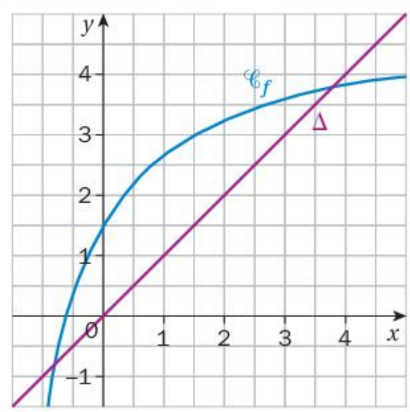
2. Pour calculer les termes de la suite (c_n), on a saisi la formule suivante dans la cellule C3 : =(C2–A2)/(C2+1). Définir la suite (c_n).

Aide Donner le premier terme et exprimer c_{n+1} en fonction de c_n en précisant à quel ensemble appartient n.

89

À imprimer
Figure
Manuel numérique enseignant

Dans le repère ci-dessous, on a représenté une fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Sur une reproduction de la figure, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis construire les termes u_1, u_2 et u_3.

b. Vers l'abscisse de quel point particulier du graphique semble se rapprocher u_n quand n devient de plus en plus grand ?

90 PROGRAMMATION python

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```python
def V(n):
    t=4
    for k in range(n):
        t=2*t-5
    return t
```

a. Quelle est la valeur de v_0 ?

b. Proposer une forme récurrente de la suite (v_n).

c. Déterminer la valeur de v_3.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

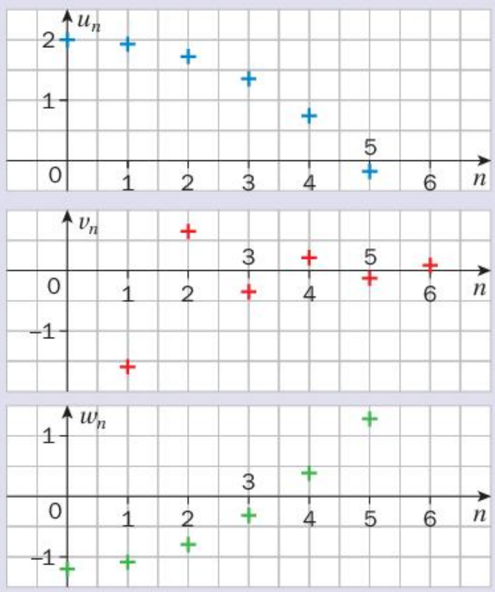
OBJECTIF 3 Déterminer le sens de variation d'une suite

Savoir-faire 4 et 5 p. 24-25

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

91 Dans le plan muni d'un repère, on a représenté par un nuage de points les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).



• Dans chaque cas, conjecturer la monotonie éventuelle de la suite.

92 À chaque suite (u_n) définie ci-dessous, associer son éventuelle monotonie, sachant que $u_0 = 2{,}5$.

Relation de récurrence	Monotonie
1. $u_{n+1} = u_n - 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**a.** non monotone
2. $u_{n+1} = u_n + 0{,}2n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**b.** croissante
3. $u_{n+1} = -u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**c.** décroissante

93 À chaque suite (u_n) définie ci-dessous, supposée strictement positive, associer sa monotonie.

Relation de récurrence	Monotonie
1. $u_{n+1} = (2+n)u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**a.** constante
2. $u_{n+1} = 0{,}2u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**b.** croissante
3. $u_{n+1} = u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**c.** décroissante

94 À chaque suite (u_n) définie ci-dessous, associer son éventuelle monotonie.

Formule explicite	Monotonie
1. $u_n = 7n + 0{,}3$ avec $n \in \mathbb{N}$	**a.** croissante
2. $u_n = -0{,}7n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$	**b.** non monotone
3. $u_n = -1$ avec $n \in \mathbb{N}$	**c.** décroissante
4. $u_n = n \times (-4)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	**d.** constante

Pour les exercices 95 à 103
À l'aide d'une différence de termes, déterminer les variations de la suite (u_n).

95 $u_n = -5n + 9$ avec $n \in \mathbb{N}$.

96 $u_n = n^2 - 8n + 16$ avec $n \in \mathbb{N}$.

97 $u_n = 3(n - 0{,}5)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

98 $u_n = 4^{n+1} - 4^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

99 $u_n = n^3 + 3n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

100 $u_n = (2 - n)^3$ avec $n \in \mathbb{N}$.

101 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 19n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

102 $u_0 = \frac{2}{3}$ et $u_{n+1} = 3n^2 + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

103 $u_1 = 6{,}11$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour les exercices 104 à 109
À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations de la suite (u_n), supposée strictement positive.

104 $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

105 $u_n = \frac{4^{n+2}}{3^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

106 $u_0 = 32$ et $u_{n+1} = 0{,}24u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

107 $u_1 = \frac{2}{9}$ et $u_{n+1} = 3n \times u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

108 $u_2 = 17$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

109 $u_0 = \pi$ et $u_{n+1} = (1 + n^2)u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Pour les exercices 110 à 113
À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de la suite (u_n).

110 $u_n = 3n - 0{,}5$ avec $n \in \mathbb{N}$.

111 $u_n = 7 - 2{,}8n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

112 $u_n = 2\pi + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

113 $u_n = n^2 + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

114 Étudier les variations des suites ci-dessous.
a. $u_n = (-1)^n\sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
b. $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.
c. $w_n = \frac{7^n}{5^{n+1}}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
d. $s_0 = 0$ et $s_{n+1} = -5s_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
e. $t_0 = 3$ et $t_{n+1} = -5t_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Fichier logiciel
Ex. 120
Manuel numérique enseignant

★★

115 De la réponse à la question (et vice-versa)

Elliot a rédigé la réponse suivante sur sa copie :

On introduit la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = -2{,}5\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + 5$. On a $u_n = f(n)$.
D'après le graphique, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.
Comme le plus petit entier supérieur à $\frac{1}{3}$ est 1, on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Elliot.
b. Proposer des améliorations dans la réponse d'Elliot.

Maths à l'oral
Expliquez les modifications apportées à la réponse d'Elliot.

116 On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 2n - 7 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 15 - 7n.$$

- Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones à partir d'un indice que l'on précisera.

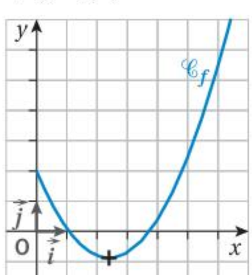
Aide Le résultat est indépendant du choix du premier terme u_0.

117 On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = \dfrac{7^n}{n+1}$.

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
c. Conclure sur la monotonie de (u_n).

118 On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 0{,}5(n-2{,}4)^2 - 0{,}88$.

a. Préciser la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$.
b. On donne ci-contre une représentation graphique de f, de sommet le point d'abscisse 2,4.
Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c. Calculer u_2 et u_3.
d. En déduire les variations de la suite (u_n).



119 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la monotonie des suites définies ci-dessous.

a. $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
b. $v_n = 2n^3 - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

120 TICE

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{(n-20{,}4)^2}.$$

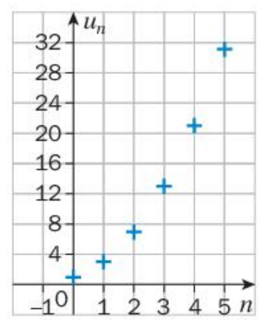
La feuille de calcul ci-contre donne des valeurs approchées des premiers termes de la suite.

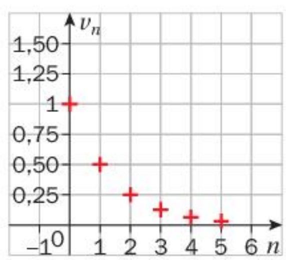
	A	B
1	n	u_n
2	0	0,00240
3	1	0,00266
4	2	0,00295
5	3	0,00330
6	4	0,00372
7	5	0,00422
8	6	0,00482
9	7	0,00557
10	8	0,00650
11	9	0,00769

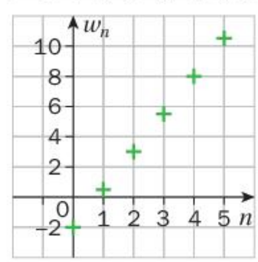
a. Quelle formule peut-on saisir en B2, à recopier vers le bas, afin de calculer les termes de la suite ?
b. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).
c. Calculer les termes u_{20} et u_{21}, puis valider ou invalider la conjecture faite à la question **b**.

121 IN ENGLISH p. 381

a. Consider the scatter plots (first six terms) of three sequences (u_n), (v_n) and (w_n).
From these scatter plots, state whether each sequence appears to be increasing or decreasing.







b. In each of the following sequences the n^{th} term, u_n, v_n and w_n is given:

$$u_n = 0{,}5^n\ ;\ v_n = 2{,}5n - 2\ ;\ w_n = n^2 + n + 1.$$

Using any method, validate whether your conjecture given in **a** above is correct.

122 **1.** La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} -n+6 \text{ si } n \leqslant 4 \\ \sqrt{n} \text{ si } n \geqslant 5 \end{cases}.$$

a. Calculer les huit premiers termes de la suite (u_n).
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Quelle est la fonction f définie sur $[5\ ;+\infty[$ telle que, pour tout nombre entier $n \geqslant 5$, $u_n = f(n)$?
b. À l'aide des variations de f, confirmer ou infirmer la conjecture faite à la question **1b**.

3. Que peut-on dire de u_n quand n devient grand ?

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : monotonie d'une suite définie par $u_n = f(n)$
hatier-clic.fr/ma1036

La démonstration rédigée

Le nombre p est un entier naturel.

Propriété Si f est une fonction définie et monotone sur $[p\ ;+\infty[$ et si (u_n) est la suite définie pour tout nombre entier $n \geqslant p$, par $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) a la même monotonie que la fonction f.

OBJECTIF : on souhaite déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ connaissant les variations de la fonction f.

Démonstration

- Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} = f(n+1)$ et $u_n = f(n)$.
- On raisonne par **disjonction des cas** (▶ Rabat VI, Raisonnements) selon la monotonie de la fonction f.

Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant p$, on a $n+1 > n$.

– **Si f est croissante sur $[p\ ;+\infty[$** alors $f(n+1) \geqslant f(n)$ par définition d'une fonction croissante. Or $f(n+1) \geqslant f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.
Donc, par définition d'une suite croissante, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice p.

– **Si f est strictement croissante sur $[p\ ;+\infty[$** alors $f(n+1) > f(n)$ par définition d'une fonction strictement croissante.
Or $f(n+1) > f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$.
Donc, par définition d'une suite strictement croissante, la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice p.

On procède de la même façon pour les autres cas :

– **Si f est décroissante sur $[p\ ;+\infty[$** alors :

$$f(n+1) \leqslant f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Et donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice p.

– **Si f est strictement décroissante sur $[p\ ;+\infty[$** alors :

$$f(n+1) < f(n) \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n.$$

Et donc la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice p. ■

Le principe

1. **On exprime deux termes consécutifs quelconques** de la suite (u_n) à l'aide de la fonction f.
2. Pour chaque cas, en utilisant la monotonie de f, **on compare deux termes consécutifs** quelconques et **on en déduit la monotonie** de la suite (u_n).

La démonstration à compléter

123 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de déterminer la **monotonie d'une suite strictement positive par étude du quotient de deux termes successifs.**

Démonstration

- La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$.
On sait que, pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n > 0$.
- On raisonne par **disjonction des cas** selon la monotonie de la suite.

– La suite (u_n) **est strictement croissante à partir de l'indice** p
$\Leftrightarrow$ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \ldots$, $u_{n+1} \ldots u_n$
$\Leftrightarrow$ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \ldots$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ldots 1$.

– La suite (u_n) **est strictement décroissante à partir de l'indice** p
$\Leftrightarrow$ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \ldots$, $u_{n+1} \ldots u_n$
$\Leftrightarrow$ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \ldots$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ldots 1$. ■

1. On rappelle le fait que la suite est strictement positive.
2. Pour chaque cas, :
a. **on utilise la définition** qui permet de raisonner par équivalence ;
b. **on divise les deux membres** de l'inéquation par $u_n > 0$.

Rabats I, Notations, et IV à VI, Logique et Raisonnements

124 **Vrai ou faux ?**
En justifiant, dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

a. « Si, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2^n - 2n$ alors $u_1 = u_2$. »

b. « Si, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{n+1} - 5$ alors, pour tout nombre entier naturel n, $v_n < 0$. »

c. « Si, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = n^2 + 7$ alors, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = n^2 + 8$. »

125 LOGIQUE Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier la propriété suivante :
« Si, pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$ alors, pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$. »

b. Rédiger la réciproque de cette propriété et prouver, à l'aide d'un contre-exemple, que cette réciproque est fausse.

126 Justifier chacune des propositions suivantes.

a. « Si $u_1 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel non nul n, $u_{n+1} = 2 + u_n(1 - u_n)$ alors $u_3 = u_5$. »

b. « Si $v_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{v_n}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_n$. »

c. « Si $w_0 = -3$ et, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = 5 - w_n$ alors les termes de rang pair de la suite (w_n) sont tous égaux. »

127 On considère la suite (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 2 \times (-1)^n$.

1. a. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

b. La suite (u_n) est-elle monotone ?

2. a. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

b. Expliquer pourquoi il n'y a pas contradiction avec une certaine propriété du cours.

128 LOGIQUE On considère les propositions suivantes.

(P_1) : « Si la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ alors $u_3 < u_4$. »

(P_2) : « Si la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ alors $u_3 < u_4$. »

(P_3) : « Si la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. »

(P_4) : « Si la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. »

a. En justifiant, dire si chacune de ces quatre propositions est vraie ou fausse.

b. Énoncer la proposition réciproque de chacune de ces quatre propositions, puis, en justifiant, dire si chacune de ces quatre propositions réciproques est vraie ou fausse.

129 LOGIQUE On considère l'affirmation suivante :
« Si une suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors il existe un nombre entier naturel k tel que $u_k > 0$. »

1. À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que cette affirmation est fausse.

2. a. Rédiger la réciproque de cette affirmation.

b. À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que l'affirmation réciproque est également fausse.

130 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

1. Démontrer que si les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors la suite $(u_n + v_n)$ est croissante.

2. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont définies sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \dfrac{n-5}{n}$, $b_n = \dfrac{n+3}{n}$ et $c_n = \dfrac{n+8}{n}$.

a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante et que les suites (b_n) et (c_n) sont décroissantes.

b. Prouver que la suite $(a_n + b_n)$ est croissante.

c. Prouver que la suite $(a_n + c_n)$ est décroissante.

3. Si la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, alors peut-on donner le sens de variation de la suite $(u_n + v_n)$?

131 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et strictement croissante.

1. a. Déterminer le sens de variation de la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 2{,}8 \times u_n$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = -3{,}4 \times u_n$.

2. Soit k un nombre réel. Recopier et compléter chacune des propriétés suivantes, puis la démontrer.

a. « Si k est … et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. »

b. « Si k est … et (u_n) strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. »

132 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les termes sont strictement positifs.

- Démontrer la propriété suivante.

« Si (u_n) est strictement croissante, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est strictement décroissante. »

Aide Utiliser le sens de variation de la fonction inverse.

133 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 - 5u_n + 2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) n'est pas monotone.

b. Qu'en est-il si on choisit $u_0 = 2$?

Fichier Python
Ex.141
Manuel numérique enseignant

134 Approche du nombre d'or

Représenter | On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0=1 \text{ et, } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n).$$

a. TICE Dans le plan repéré, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$.

b. À l'aide des deux courbes précédentes, déterminer graphiquement les cinq premiers termes de (u_n).

c. Vers l'abscisse de quel point particulier du graphique semble se rapprocher u_n quand n devient de plus en plus grand ?

Info

Cette suite permet d'approcher le nombre d'or par la méthode dite du « point fixe ».

135 De l'importance du premier terme

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n^{\,2}-u_n+1$.

1. Pour chacune des valeurs de u_0 suivantes, déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

a. $u_0=1$ **b.** $u_0=0$ **c.** $u_0=-1$

2. Dans chacun des cas précédents, conjecturer les variations de la suite (u_n).

136 Récurrence d'ordre 2

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $u_{n+1}=u_n-u_{n-1}^{\,2}$.

- Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

137 On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2{,}2$ et, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n+u_n^{\,2}$.

On admet que, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>2$.

a. Raisonner | Démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

b. Conclure sur la monotonie de (u_n).

138 Différence de suites

Les suites (w_n) et (t_n) sont définies, pour tout entier naturel n, par $w_n=7n$ et $t_n=3^n$.

a. Établir le sens de variation des suites (w_n) et (t_n).

b. Prouver que la suite (w_n-t_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 2.

139 On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{2+u_n^{\,3}}$.

On admet que, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

a. Calculer | Vérifier que, pout tout nombre entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^{\,4}}{2+u_n^{\,3}}$.

b. En déduire la monotonie de (u_n).

140 Peut-on définir la suite (u_n) par $u_0=2$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n-2}$?

141 Factorielle n

On considère la suite (w_n) définie par $w_1=1$ et, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{n+1}=(n+1)\times w_n$.

On admet que, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n>0$.

a. À l'aide de la méthode la plus appropriée, déterminer la monotonie de la suite (w_n).

b. PROGRAMMATION python

Écrire une fonction en Python de paramètre n qui renvoie la valeur de w_n.

Info

La suite ainsi définie a pour terme général : $1\times2\times\ldots\times n$, noté $n!$ qui se lit « factorielle n ». Par convention : $0!=1$.

142 Sommes de termes

Pour chacune des suites (S_n) suivantes :

- donner la valeur du premier terme S_1 ;
- écrire la relation de récurrence entre S_n et S_{n+1} ;
- déterminer la monotonie de la suite (S_n).

a. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=2+4+6+\ldots+2n$.

b. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

c. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

143 Simplification bien venue

Pour tout nombre entier $n\geqslant1$, on pose :

$$s_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

a. Calculer s_1, s_2 et s_3.

b. Démontrer que la suite (s_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. Pour tout nombre entier $k\geqslant1$, justifier que :

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

d. En déduire une expression simple de s_n.

144 Fonction polynôme du second degré

a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-2x^2-12x-7.$$

Vérifier que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x+1)-f(x)=-4x-14.$$

b. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f(n)$.

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

145 Fonction cube

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^3$.

On souhaite déterminer la monotonie de cette suite de deux manières différentes.

1. Pour tout nombre entier naturel n, calculer $u_{n+1}-u_n$ et en déduire la monotonie de (u_n).

2. a. Vérifier que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{3n^2+3n+1}{n^3}.$$

b. Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite (u_n) ?

c. Calculer u_0 et u_1, et retrouver le résultat obtenu à la question **1**.

Fichier logiciel
Ex. 150
Manuel numérique enseignant

146 On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = (n-1)^4$.

a. Calculer | Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir :

1	$g(x) := (x-1)^4$
	$\rightarrow\ g(x) := (x-1)^4$
2	Factoriser$(g(x+1)-g(x))$
	$\rightarrow\ (2x-1)(2x^2-2x+1)$

À l'aide de ce résultat, vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (2n-1)(n^2 + (n-1)^2).$$

b. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x-1)(x^2 + (x-1)^2).$$

Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

c. En déduire la monotonie de (u_n).

147 Vers le BAC

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n^2+1}{n-1}$.

a. Calculer | Un logiciel de calcul formel, permet d'obtenir :

1	$g(x) := \dfrac{x^2+1}{x-1}$
	$\rightarrow\ g(x) := \dfrac{x^2+1}{x-1}$
2	Factoriser$(g(x+1)-g(x))$
	$\rightarrow\ (x-2)\cdot\dfrac{x+1}{x(x-1)}$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}.$$

b. On considère la fonction f définie sur $]1\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}.$$

Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

c. Calculer u_2 et u_3.

d. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante en précisant à partir de quel indice.

148 Barres successives

On note $b_0 = 1$, $b_1 = \dfrac{-1}{2+1}$, $b_2 = \dfrac{-1}{2+\dfrac{-1}{2+1}}$, etc.

On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > -2$.

a. Définir la suite (b_n) par récurrence.

b. Démontrer que $b_{n+1} - b_n = \dfrac{-(1+b_n)^2}{2+b_n}$.

c. En déduire le sens de variation de la suite (b_n).

149 Racine carrée

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.

a. Calculer | Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Aide Utiliser la quantité conjuguée.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

150 Méthode de Héron TICE

1. a. Tracer un rectangle de dimensions 15 cm × 3 cm et calculer son aire.

b. Tracer un nouveau rectangle dont la longueur est égale à la moyenne des dimensions précédentes et ayant la même aire.

c. Appliquer le même processus pour tracer un nouveau rectangle.

2. On considère les suites (a_n) et (b_n), où a_n représente la longueur et b_n la largeur d'un rectangle tracé comme à la question **1**.

a. Expliquer les définitions suivantes :

$$a_0 = 15,\ b_0 = 3 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{45}{a_{n+1}}.$$

b. Que valent a_1, b_1, a_2 et b_2 ?

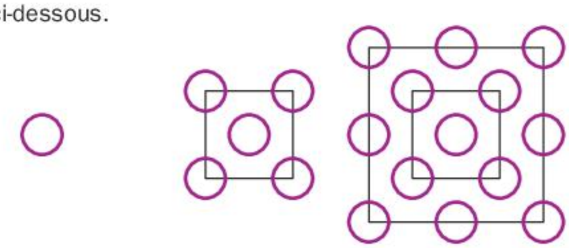
c. À l'aide d'un outil logiciel, déterminer les valeurs de a_6 et b_6.

d. Pourquoi a-t-on $a_6 \approx b_6$?

Info
Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du 1er siècle après J.-C. Il inventa une méthode d'extraction de la racine carrée d'un nombre dont le principe géométrique est utilisé dans cet exercice.

151 Nombres carrés centrés

Avec des anneaux, on réalise une succession de motifs géométriques dont on a représenté les trois premiers ci-dessous.



Motif 1 **Motif 2** **Motif 3**

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note c_n le nombre d'anneaux du motif n.

Un entier c_n se nomme « nombre carré centré ».

1. a. Représenter le motif 4 et donner les valeurs de c_1, c_2, c_3 et c_4.

b. Modéliser | Établir une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n.

2. On remarque que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n = 1 + 0 \times 4 + 1 \times 4 + \ldots + (n-1) \times 4.$$

a. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prouver que $c_n = 2n^2 - 2n + 1$.

b. Quel est le plus grand nombre carré centré que l'on peut dessiner avec 2 000 anneaux ?

Fichiers Python et logiciel
Ex 152 et 156
Manuel numérique enseignant

152 Vers un nombre connu ! TICE

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_1 = 3$, $b_1 = 2\sqrt{3}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}.$$

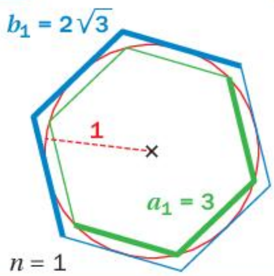
a. À l'aide d'un tableur, calculer les termes d'indices 2 à 15 des suites (a_n) et (b_n).

b. Conjecturer la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

c. Conjecturer la valeur de laquelle se rapprochent a_n et b_n lorsque n devient grand.

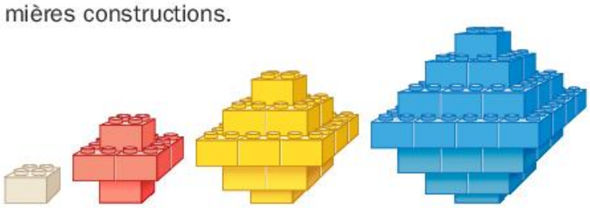
Info

La méthode d'Archimède consiste à inscrire un cercle de rayon 1 entre deux polygones réguliers à 3×2^n côtés, a_n représentant le **demi-périmètre** du polygone inscrit et b_n le **demi-périmètre** du polygone circonscrit.



153 Avec des briques : motif géométrique en 3D

Maëlys a fabriqué une succession d'octaèdres pleins avec des briques de construction carrées. Voici ses premières constructions.



Sa première construction est constituée d'une seule brique, la seconde de 6 et la troisième de 19.

a. Combien y a-t-il de briques carrées dans sa quatrième construction ?

b. On note B_n le nombre de briques carrées nécessaires à la construction du $n^{\text{ième}}$ octaèdre, où n désigne un nombre entier naturel non nul.
Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = 2 \times (1 + 2^2 + \ldots + n^2) - n^2$.

c. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \dfrac{2n^3 + n}{3}$.

d. Combien de briques le 10e octaèdre compte-t-il ?

e. Quel est le plus grand octaèdre que l'on peut construire avec 2 000 briques carrées ?

154 IN ENGLISH p. 381

The three first terms of a sequence are :

$$r_1 = \sqrt{2},\ r_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ r_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Note that, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n > 0$.

a. Express r_n the n^{th} term in terms of the previous term, r_{n-1}.

b. Using a calculator, complete a table of values to deduce whether the sequence (r_n) is increasing or decreasing.

155 Suite de moyennes

On considère les suites (a_n) et (b_n) vérifiant $a_0 \geqslant 0$, $b_0 \geqslant 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$:

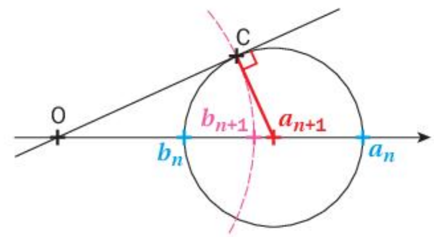
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Pour chacun des termes initiaux donnés ci-dessous :
– calculer a_1, b_1, a_2 et b_2 ;
– ranger dans l'ordre croissant les nombres a_1, b_1, a_2, et b_2.

a. $a_0 = 8$ et $b_0 = 18$. **b.** $a_0 = 45$ et $b_0 = 5$.

c. $a_0 = 6$ et $b_0 = 6$.

2. Connaissant les nombres a_n et b_n, une construction géométrique des nombres a_{n+1} et b_{n+1}, sur l'axe des nombres réels d'origine O, est illustrée ci-dessous.



a. Justifier cette construction.

Aide Utiliser le théorème de Pythagore.

b. Raisonner | Conjecturer une propriété concernant la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Info

a et b étant deux nombres positifs, le nombre $\sqrt{ab}$ est la moyenne géométrique de a et b.

156 Suite de Syracuse En groupe

On crée une suite dite de *Syracuse*, à l'aide du procédé suivant :
– on choisit un nombre entier a entre 1 et 25 ;
– si a est pair, on le divise par 2 ; si a est impair, on le multiplie par 3, puis on ajoute 1 ;
– on recommence en partant du nouveau résultat.

1. a. Chaque membre du groupe choisit un nombre de départ a différent et répète le procédé trente fois, en notant chacun des termes de la suite obtenue.

b. Observer et comparer les listes ainsi obtenues.

2. PROGRAMMATION python

a. Écrire une fonction en Python de paramètre a qui renvoie la liste des trente termes suivants de la suite.

b. À l'aide de cette fonction, vérifier les listes obtenues à la question **1** et tester avec d'autres valeurs de a.

c. Émettre une conjecture.

d. Rechercher ce qu'on appelle la « conjecture de Syracuse » et pourquoi elle porte ce nom.

Maths à l'oral

Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama qui pourra être illustré avec votre programme.

Physique-Chimie

157 Loi de Titius-Bode

En 1766, l'astronome allemand Johann Titius propose une formule pour modéliser la distance au Soleil d'une planète du système solaire. Cette formule est appelée *Loi de Titius-Bode* car c'est l'astronome allemand Johann Elert Bode qui la publia en 1772 :

$$D_n = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{n-1},$$

où D_n représente la distance, pour la planète de rang n, en unités astronomiques (UA).

a. Recopier et compléter le tableau suivant en recherchant les distances réelles des planètes au Soleil et en calculant la distance estimée par la loi de Titius-Bode, puis comparer les résultats obtenus.

Rang de la planète	Planète	Distance réelle au Soleil (en UA)	Distance au Soleil estimée par la loi de Titius-Bode (en UA)
1	Vénus		
2	Terre		
3	Mars		
5	Jupiter		
6	Saturne		
7	Uranus		
8	Neptune		

Info

- Pour étendre la formule à Mercure, située à environ 0,4 UA du Soleil, on peut choisir « $-\infty$ » pour le rang.
- La « planète » de rang 4 correspond à l'astéroïde Cérès, découverte en 1801.

b. En quelles années les planètes Uranus et Neptune ont-elles été découvertes ? Compléter alors la réponse à la question précédente.

c. Rappeler la définition de l'unité astronomique pour comprendre l'un des résultats trouvés.

Fiche métier
Astrophysicien·ne
hatier-clic.fr/ma1041a

SVT

158 Du nombre d'or à la suite de Fibonacci : la formule de Binet

Info
α est le *Nombre d'or*.

1. On note $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vérifier que α et β sont solutions de l'équation (E) : $x^2 = x + 1$.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$.

a. Calculer F_0, F_1 et F_2.

b. À l'aide de l'équation (E), vérifier que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n - \beta^n.$$

c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

3. La suite (F_n) est appelée suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci (1175-1250) qui l'a inventée.

Rechercher à partir de quelle situation cette suite a été créée, ainsi que les motifs de la nature dans lesquels on retrouve ses termes.

Info
La suite (F_n) a été créée vers 1202 par le mathématicien Fibonacci (ou Léonard de Pise). Cette suite très célèbre est définie par une récurrence linéaire d'ordre 2 : on obtient un terme en faisant la somme des deux précédents.

Maths à l'oral
Présentez à la classe un diaporama sur ces recherches.

Fiche métier
Ingénieur·e écologue
hatier-clic.fr/ma1041b

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

159 Nombre à $2n+1$ chiffres

Soit n un nombre entier naturel non nul.
On s'intéresse au nombre $u_n = 1{,}4\ldots47\ldots7$ dont la partie décimale est constituée de n chiffres 4 suivis de n chiffres 7.

- Quelle formule explicite pourrait-on proposer pour le nombre u_n ?

160 Suite inverse

La suite (u_n) vérifie $u_0 \neq 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$.

- Saurez-vous déterminer tous les termes de la suite (u_n) ?

Défis

161 La suite (v_n) vérifie, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + n - 3$.

- Prouver que, quel que soit le premier terme v_0, on a $v_3 = v_4$, $v_2 = v_5$, $v_1 = v_6$ et $v_7 = v_0$.

162 Suite d'Aronson

Version anglaise :

« *t* is the first, fourth, eleventh, …,
letter of this sentence. »
1, 4, 11, 16, 24, 29, 33, 35, 39, …

Version française :

« *m* est la première, la dixième, la vingt-deuxième, …,
lettre de cette phrase. »
1, 10, 22, 37, 53, …

- Déterminer les dix termes suivants.

D'après *Tangente*, Hors-Série n° 41, Pôle édition, juin 2011.

163 Une suite de carrés

n est un nombre entier naturel non nul.
On note $c_1 = 16$, $c_2 = 1\,156$, $c_3 = 111\,556$, etc.

1. a. Rédiger un processus de construction de la suite des nombres (c_n).

b. Quel est l'entier égal à $\dfrac{1}{9}(10^n - 1)$?

c. En déduire que $c_n = \dfrac{1}{9}(10^{2n} - 1) + \dfrac{4}{9}(10^n - 1) + 1$.

2. a. Calculer la racine carrée de c_1, c_2 et c_3.

b. On pose $x_n = \dfrac{1}{3}(10^n - 1) + 1$. Vérifier que $x_n^{\,2} = c_n$.

c. En déduire une autre expression (plus simple) de c_n.

d. Vérifier l'expression trouvée pour quelques valeurs.

Vonal SSZ, peinture de Victor Vasarely, 1968.

En groupe

164 De l'importance du 1er terme

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^{\,2}$.
On admet alors que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n > 0$.

1. a. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Reprendre les questions précédentes dans les cas d'initialisation suivants.

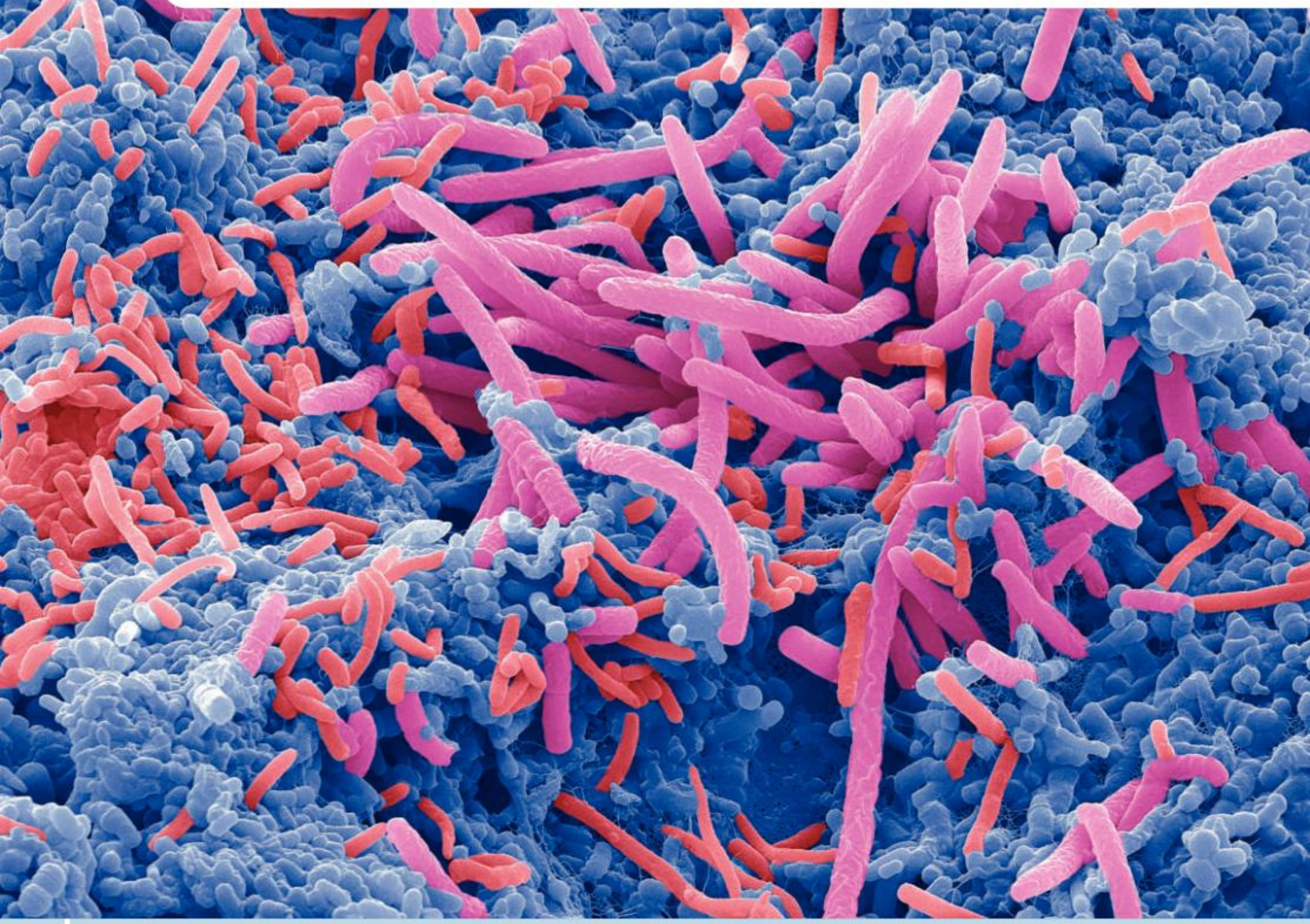
a. $u_0 = 0$ **b.** $u_0 = 0{,}5$ **c.** $u_0 = -1$

3. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Testons chacun d'autres valeurs pour u_0.

CHAPITRE 2

Suites arithmétiques et géométriques



Les bactéries sont des organismes vivants qui prolifèrent vite. Dans un milieu riche en nutriments, la croissance d'une population bactérienne est si rapide qu'elle est dite exponentielle ou géométrique (▶ exercice 123, p. 68).

Itinéraire

OBJECTIF 1

Reconnaître et étudier une suite arithmétique

- Activités 1 et 3
- Cours 1
- Savoir-faire 1 et 2
- Quiz 20, 21 et 24 à 28
- Les incontournables 40 à 45
- Entraînement 53 à 72

OBJECTIF 2

Reconnaître et étudier une suite géométrique

- Activités 2 et 4
- Cours 2
- Savoir-faire 3 et 4
- Quiz 22 à 28
- Les incontournables 46 à 50
- Entraînement 73 à 91

OBJECTIF 3

Calculer une somme de termes d'une suite particulière

- Activité 5
- Cours 3
- Savoir-faire 5
- Quiz 29 à 33
- Les incontournables 51 et 52
- Entraînement 92 à 112

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Expliquer les termes ou expressions suivants.

RELATION DE RÉCURRENCE — puissance d'un nombre — fonction affine — indice du terme d'une suite — formule explicite d'une suite

Rappels

Pourcentages

On considère un nombre réel x et un nombre réel positif t.

- **Calculer t %** de la valeur x revient à multiplier x par $\frac{t}{100}$.
- **Diminuer de t %** la valeur x revient à multiplier x par $\left(1-\frac{t}{100}\right)$.
- **Augmenter de t %** la valeur x revient à multiplier x par $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

Exemples

- On calcule 5 % de 157,2 :

$$157{,}2 \times \frac{5}{100} = 157{,}2 \times 0{,}05 = 7{,}86.$$

- On diminue 157,2 de 20 % :

$$157{,}2 \times \left(1-\frac{20}{100}\right) = 157{,}2 \times 0{,}8 = 125{,}76.$$

- On augmente 157,2 de 30 % :

$$157{,}2 \times \left(1+\frac{30}{100}\right) = 157{,}2 \times 1{,}3 = 204{,}36.$$

Monotonie d'une suite

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est **croissante** sur $\mathbb{N}$ si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$.
- (u_n) est **décroissante** sur $\mathbb{N}$ si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} \leqslant u_n}$.

Trois méthodes sont possibles pour déterminer la monotonie d'une suite (u_n) :

- on étudie le **signe de $u_{n+1} - u_n$** ;
- dans le cas d'une suite définie de manière explicite à l'aide d'une fonction f, autrement dit telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$, on détermine la **monotonie de f** qui sera la **même que celle de (u_n)** ;
- dans le cas d'une suite strictement positive, on **compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1**.

Exemples

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 3$.

- Pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 3 - (-2n+3)$$
$$= -2n - 2 + 3 + 2n - 3 = -2.$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. On en conclut que $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

- On définit la **fonction** f sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -2x + 3$. Alors, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$. f est une fonction affine de coefficient directeur $-2 \leqslant 0$, donc f est décroissante. On en déduit alors que la suite (u_n) est décroissante.

- On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 \times 3^n$. Pour tout nombre entier naturel n : $v_n > 0$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3.$$

On a donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$, d'où $v_{n+1} \geqslant v_n$.

On en conclut que la suite (v_n) est croissante.

Fichier logiciel
Ex. 3
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Pourcentages

1 x étant un nombre réel, recopier et compléter les phrases suivantes par la valeur appropriée.

a. Calculer 7 % de x revient à multiplier x par … .

b. Augmenter x de 7 % revient à multiplier x par … .

c. Diminuer x de 7 % revient à multiplier x par … .

d. Augmenter x de 2,8 % revient à multiplier x par … .

e. Diminuer x de 16,4 % revient à multiplier x par … .

2 **a.** Une quantité a augmente chaque semaine de 5,7 %. On modélise l'évolution de cette quantité par la suite (u_n).
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et donner u_0.

b. Une quantité b diminue chaque mois de 14,6 %. On modélise l'évolution de cette quantité par la suite (v_n).
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et donner v_0.

3 TICE On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -5 \text{ et } u_{n+1} = \left(1 + \frac{3,2}{100}\right)u_n \;; \qquad v_0 = 6 \text{ et } v_{n+1} = \left(1 - \frac{12,3}{100}\right)v_n.$$

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	-5	6
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		

1. Quelle(s) formule(s) peut-on saisir en B3, à recopier vers le bas, pour calculer les termes de la suite (u_n) ?

a. `=B2*3,2` **b.** `=B2*1,032` **c.** `=B2+B2*0,032`

2. Quelle(s) formule(s) peut-on saisir en C3, à recopier vers le bas, pour calculer les termes de la suite (v_n) ?

a. `=C2*(1–12,3)` **b.** `=C2–12,3/100` **c.** `=C2*0,877`

3. À l'aide d'un tableur, déterminer les dix premiers termes des deux suites.

4 Lors de l'achat d'une voiture électrique, on peut bénéficier d'un crédit d'impôts correspondant à 18 % du prix du véhicule.
En revanche, lors de l'achat d'un véhicule polluant, une taxe supplémentaire de 14 % est appliquée.

• Dans chacun des cas précédents, calculer le montant du crédit d'impôts ou de la taxe, ainsi que le montant final payé, sachant que le véhicule acheté coûte 30 000 €.

Monotonie d'une suite

5 On définit une suite (u_n) à l'aide d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$. On donne le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
Variations de f	↘	-11	↗ 15	↘

a. Quelle est la monotonie de f sur $[0 ; +\infty[$?

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

6 Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire la monotonie de la suite.

a. $u_n = 14n + 8$ **b.** $u_n = -n^2 + 21,1$

7 Pour chacune des suites (v_n) ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, étudier le signe de v_n et calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, puis en déduire la monotonie de la suite.

a. $v_n = \frac{4}{5^n}$ **b.** $v_n = \frac{1}{2n+1}$

c. $v_n = (-3)^{2n+2}$ **d.** $v_n = 0,5n + 68$

8 On définit une suite (u_n) à l'aide d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$: pour tout nombre entier naturel n, $u_n = f(n)$.
Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de f, puis en déduire celles de (u_n).

a. $f(x) = 133,5x - 20$ **b.** $f(x) = -3x^2 + 2$

c. $f(x) = -\frac{3}{2}x$ **d.** $f(x) = x^3$

Corrigés p. 368

OBJECTIF 1
Reconnaître et étudier une suite arithmétique

1 Une suite d'aires à partir d'un motif géométrique

Sur une droite graduée, on place le point O d'abscisse zéro.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on place sur cette droite le point A_n d'abscisse n et on trace le cercle $\mathscr{C}_n$ de diamètre $[OA_n]$.

On considère la suite (u_n) définie par :
- u_0 l'aire du disque de bord $\mathscr{C}_1$;
- pour tout nombre entier naturel non nul n, u_n l'aire de la partie comprise entre les cercles $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.

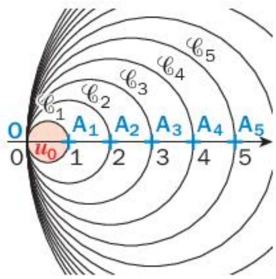


Illustration de u_0

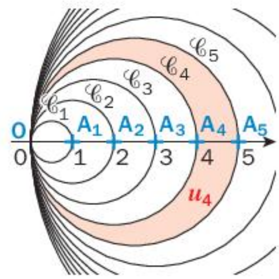


Illustration de u_4

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Pour tout nombre entier naturel n, déterminer une expression de u_n.

3. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 + n \times r$ où r est un nombre réel à préciser.

4. Pour tout nombre entier naturel n, prouver que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

OBJECTIF 2
Reconnaître et étudier une suite géométrique

2 De plus en plus longtemps

Maxime s'est fixé comme objectif de participer aux 100 km de Steenwerck dans le Nord de la France. Actuellement, il court 2 heures le dimanche matin et décide d'augmenter ce temps d'entraînement de 15 % chaque semaine.

n étant un nombre entier naturel, on note t_n le temps d'entraînement, en heures, de Maxime, n semaine(s) après avoir pris sa décision. On a ainsi $t_0 = 2$.

1. Compte tenu du contexte, quel est le sens de variation de la suite (t_n) ?

2. Calculer t_1 et t_2.

3. Pour tout nombre entier naturel n, écrire une relation entre t_{n+1} et t_n.

4. a. Justifier les deux égalités suivantes :

$$t_2 = 2 \times 1{,}15^2 \quad \text{et} \quad t_3 = 2 \times 1{,}15^3.$$

b. Pour tout nombre entier naturel n, conjecturer une expression de t_n en fonction de n.

5. Pour réaliser une séance de footing d'une durée minimale de 5 heures, combien de semaines d'entraînement Maxime doit-il envisager ?

Fichiers Python et logiciel
Activités 3, 4 et 5
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Reconnaître et étudier une suite arithmétique

3 Suites arithmétiques et tableur TICE

On étudie la suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0, où r et u_0 sont des nombres réels.

À l'aide d'un tableur, on calcule les valeurs des quinze premiers termes de la suite (u_n), en faisant varier les valeurs de r et u_0 respectivement dans les cellules B1 et D1.

	A	B	C	D
1	$u_0 = 1$		$r = 2$	
2				
3	n	u_n		
4	0	1		
5	1	3		
6	2	5		
7	3	7		
8	4	9		
9	5	11		
10	6	13		
11	7	15		
12	8	17		
13	9	19		
14	10	21		
15	11	23		
16	12	25		
17	13	27		
18	14	29		

1. Dans la cellule B4, on a saisi =B1 pour appeler la valeur de u_0. Quelle(s) formule(s), à recopier vers le bas, peut-on saisir en B5 pour calculer les termes de la suite ?

a. =B$4+D1 **b.** =B4+D$1

c. =B$1+A5*D$1 **d.** =B$4+A5*D1

2. On choisit $u_0 = 1$.
Reproduire la feuille de calcul précédente, puis faire varier r (en D1) et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) selon le signe de r.

3. En choisissant d'autres valeurs pour u_0, reprendre la question précédente.

OBJECTIF 2
Reconnaître et étudier une suite géométrique

4 Suites géométriques et tableur TICE

On étudie la suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0, où q et v_0 sont des nombres réels.

1. Créer une feuille de calcul qui permet de déterminer les vingt premiers termes de la suite (v_n), en offrant la possibilité de faire varier les valeurs v_0 et q.

2. a. On fixe $q = 1$. Faire varier v_0 et conjecturer la monotonie de la suite (v_n).
b. Reprendre la question **a** avec $q = 0$.

3. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite semble monotone et, si oui, conjecturer son sens de variation.

a. $v_0 = 1$ et $q = -2$. **b.** $v_0 = -1$ et $q = 2$. **c.** $v_0 = -1$ et $q = \frac{1}{2}$.

d. $v_0 = -1$ et $q = \frac{1}{2}$. **e.** $v_0 = 1$ et $q = \frac{1}{2}$. **f.** Testez des valeurs de votre choix !

OBJECTIF 3
Calculer une somme de termes d'une suite particulière

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

5 Sommes de termes de suites ALGORITHMIQUE

Pour deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$, on cherche à calculer les sommes de termes :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \quad \text{et} \quad T = v_1 + v_2 + v_3 + v_4.$$

Pour cela, on utilise les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1

```
U ← −3
S ← U
Pour N allant de 1 à …
    U ← U + 1,5
    S ← …
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
V ← 2
T ← V
K ← 1
Tant que K ⩽ …
    V ← −3 × V
    T ← …
    K ← …
Fin Tant que
```

1. Pour chaque algorithme, reconnaître les suites (u_n) et (v_n) ainsi définies.
2. Compléter les algorithmes 1 et 2 de sorte qu'ils calculent les sommes de termes S et T.
3. Déterminer les valeurs de S et T ainsi calculées à la fin des algorithmes.

OBJECTIF 1 Reconnaître et étudier une suite arithmétique

Savoir-faire 1 et 2 p. 51-52

Définitions

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r s'appelle **la raison** de la suite (u_n).

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 1,5$ est une suite arithmétique de raison $r = -1,5$.
On a donc $u_1 = 4 - 1,5 = 2,5$; $u_2 = 2,5 - 1,5 = 1$ et $u_3 = 1 - 1,5 = -0,5$.

$$u_0 = 4 \xrightarrow{-1,5} u_1 = 2,5 \xrightarrow{-1,5} u_2 = 1 \xrightarrow{-1,5} u_3 = -0,5 \xrightarrow{-1,5} u_4 = -2$$

L'écriture $u_{n+1} = u_n + r$ est la **relation de récurrence** de la suite (u_n), où r est l'**accroissement constant**.

On passe d'un terme au suivant en additionnant la raison $-1,5$.

Propriété

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est **arithmétique de raison r** si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 + r \times n$.

Démonstration : exercice 114 p. 67

Exemples

- Dans l'exemple précédent, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1,5$. La raison est $r = -1,5$.
Le terme général de la suite s'écrit donc $u_n = 4 - 1,5n$.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2,4 + 5n$ est arithmétique de raison $r = 5$ et $v_0 = -2,4$.
La suite (v_n) a pour relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 5$.

L'écriture $u_n = u_0 + r \times n$ est la **formule explicite** de la suite (u_n) ; elle donne le **terme général** de la suite.

Propriété

Si une suite (u_n) est arithmétique de raison r alors, pour tous nombres entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration : exercice 114 p. 67

Exemple

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et $u_5 = -11$.
On a $u_{20} = u_5 + (20 - 5) \times r = u_5 + 15 \times r = -11 + 15 \times 4 = 49$.

Pour une suite arithmétique de premier terme u_1, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Propriétés

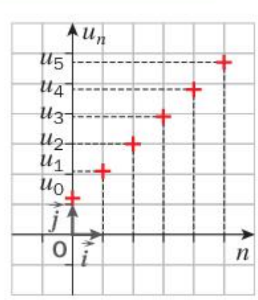
On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

Démonstration : exercice 115 p. 67

Une suite arithmétique modélise un **phénomène discret à croissance linéaire** (de coefficient r).

Exemple

Un poêle consomme 1,2 kg de granulés de bois la première heure de chauffe, puis en consomme 0,9 kg chaque heure suivante.
On note u_n le nombre de kilogrammes de granulés de bois utilisés au bout de n heures de chauffe.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,9$ et de premier terme $u_0 = 1,2$.
Comme $r = 0,9 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1,2 + 0,9n = f(n)$ avec $f(x) = 0,9x + 1,2$.



Les points du nuage sont alignés et appartiennent à la droite d'équation $y = 0,9x + 1,2$.

On reconnaît l'expression d'une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (0,9 > 0).

OBJECTIF 2 Reconnaître et étudier une suite géométrique

Savoir-faire 3 et 4 p. 53-54

Définitions

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre réel q s'appelle **la raison** de la suite (u_n).

L'écriture $u_{n+1} = q \times u_n$ est la **relation de récurrence** de la suite (u_n).

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}5u_n$ est une suite géométrique de raison 1,5.
On a donc $u_1 = 1{,}5 \times 2 = 3$, $u_2 = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5$ et $u_3 = 1{,}5 \times 4{,}5 = 6{,}75$.

$$u_0 = 2 \xrightarrow{\times 1{,}5} u_1 = 3 \xrightarrow{\times 1{,}5} u_2 = 4{,}5 \xrightarrow{\times 1{,}5} u_3 = 6{,}75 \xrightarrow{\times 1{,}5} u_4 = 10{,}125$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par la raison 1,5. C'est une augmentation à **taux constant** de 50 %.

Propriété

Une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est **géométrique de raison q** si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration : exercice 116 p. 67

L'écriture $u_n = u_0 \times q^n$ est la **formule explicite** de la suite (u_n) ; elle donne le **terme général** de la suite.

Exemples

- Un milieu de culture contient 1 500 levures par microlitre. Ces levures se divisent et croissent de 1 % par heure. La mesure du nombre de levures par microlitre au bout de n heures est notée u_n. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $u_0 = 1\,500$, et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,500 \times 1{,}01^n$.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2{,}4 \times 5^n$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = -2{,}4 \times 5^0 = -2{,}4$.

Une suite géométrique modélise un **phénomène discret à croissance exponentielle** (de base q).

Pour tout nombre $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Propriété

Si une suite (u_n) est géométrique de raison q alors, pour tous nombres entiers naturels n et p, avec $n > p$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration : exercice 116 p. 67

Exemple

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et $u_4 = 0{,}1$.
On a $u_9 = u_4 \times q^5 = 0{,}1 \times 2^5 = 3{,}2$.

Pour une suite géométrique de premier terme u_1, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriétés

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.

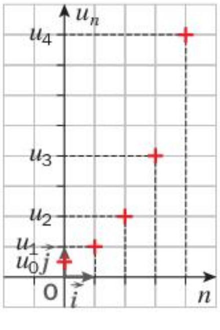
	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale à u_0.	(u_n) est constante égale à u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

Démonstration : exercice 117 p. 67

Si $q = 0$ alors, à partir de u_1, tous les termes sont nuls.
Si $u_0 = 0$, alors tous les termes sont nuls.

Exemples

- On a représenté ci-contre la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. $q = 2 > 1$ et $u_0 = 0{,}5 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.



- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 8$.
$q = 0{,}5 \in]0\,;1[$ et $v_0 = 8 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
- La suite (w_n) est géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $w_0 = 1$.
$q = -3 < 0$, donc la suite (w_n) n'est pas monotone.

La suite (w_n) prend alternativement des valeurs positives et négatives.

OBJECTIF 3 Calculer une somme de termes d'une suite particulière

Savoir-faire 5 p. 55

n et p sont des nombres entiers naturels avec $p \leqslant n$; r et q sont des nombres réels.

Notation $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

> Σ est la lettre sigma majuscule de l'alphabet grec. Elle désigne une somme de termes qui varie selon un indice entier, ici k, allant de 0 à n.

Propriété La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à :

$$\sum_{k=1}^{k-n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration à compléter : exercice 113 p. 67

Exemple $\sum_{k=1}^{k=20} k = 1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \times (20+1)}{2} = 10 \times 21 = 210.$

Propriétés Une suite (u_n) est **arithmétique de raison r et de premier terme u_0**.

- La **somme des $n + 1$ premiers termes** de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k\ n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \boldsymbol{(n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}}.$$

Démonstration à compléter : exercice 113 p. 67

- La somme des termes d'indices p à n de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}.$$

> Le facteur $(n - p + 1)$ correspond au nombre de termes dans la somme.

Exemple
La suite (u_n) est arithmétique, $u_3 = 3$ et $u_9 = 15$.

$$\sum_{k=3}^{k=9} u_k = u_3 + \ldots + u_9 = (9-3+1) \times \frac{(u_3+u_9)}{2} = 7 \times \frac{3+15}{2} = 63.$$

Propriété
Si $q \neq 0$ et $q \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{k-n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration rédigée p. 66

Exemple $\sum_{k=0}^{k=10} 5^k = 1 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{10} = \frac{1-5^{10+1}}{1-5} = \frac{1-5^{11}}{-4} = 12\ 207\ 031.$

Propriétés Une suite (u_n) est **géométrique de raison q, $q \neq 1$, et de premier terme u_0**.

- La **somme des $n + 1$ premiers termes** de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \boldsymbol{u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}.$$

> Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante, égale à u_0 et $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1) \times u_0$.

Démonstration rédigée p. 66

- La somme des termes d'indices p à n de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k-p}^{k-n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

> La puissance $n - p + 1$ correspond au nombre de termes dans la somme.

Démonstration : exercice 118 p. 67

Exemple
La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et $u_0 = 3$.
La somme des dix premiers termes de (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=9} u_k = u_0 + \ldots + u_9 = 3 \times \frac{1-(-2)^{9+1}}{1-(-2)} = 1-(-2)^{10} = -1\ 023.$$

1 Reconnaître une suite arithmétique

OBJECTIF 1
Reconnaître et étudier une suite arithmétique

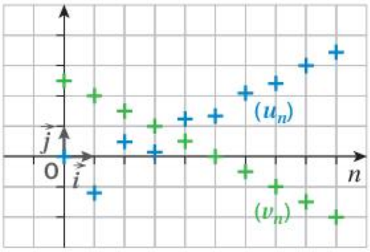
1. Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son terme général.

a. $a_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 5{,}2$. **b.** $b_0 = -11$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2 - b_n$.

2. Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $t_n = -2 + 0{,}5n^2$ **b.** $w_n = 2{,}5n + 3$

3. On a représenté ci-contre les premiers termes des suites (u_n) et (v_n) par des nuages de points. Pour chacune de ces suites, expliquer pourquoi elle peut être ou ne pas être arithmétique. Si elle peut être arithmétique, déterminer sa formule explicite.



Solution

1. a. Pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + r$ avec $r = 5{,}2$.
La suite (a_n) est arithmétique de raison 5,2 et son terme général est $a_n = 5 + 5{,}2n$.

> On reconnaît la relation de récurrence d'une suite arithmétique.

b. $b_0 = -11$, $b_1 = 2 - (-11) = 13$ et $b_2 = 2 - 13 = -11$.
Donc $b_1 - b_0 = 24$ et $b_2 - b_1 = -24$.
On a $b_1 - b_0 \neq b_2 - b_1$, donc la suite (b_n) n'est pas arithmétique.

> On calcule trois termes consécutifs et on vérifie que la différence de termes consécutifs n'est pas constante.

2. a. $t_0 = -2$, $t_1 = -1{,}5$ et $t_2 = 0$. Donc $t_1 - t_0 = 0{,}5$ et $t_2 - t_1 = 1{,}5$.
On a $t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$, donc la suite (t_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2{,}5n + 3$.
Ainsi $w_0 = 3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + r \times n$ avec $r = 2{,}5$.
Donc la suite (w_n) est arithmétique de raison 2,5 et $w_0 = 3$.

> On reconnaît la formule explicite d'une suite arithmétique.

3. Les premiers termes de la suite (u_n) sont représentés par des points non alignés, donc la suite (u_n) ne peut pas être arithmétique.
Les premiers termes de la suite (v_n) sont représentés par des points alignés, donc la suite (v_n) peut être arithmétique.

> Une suite arithmétique est représentée par un nuage de points alignés.

D'après le graphique, $v_1 = 2$ et $v_3 = 1$.
$v_3 - v_1 = -1$, or $v_3 - v_1 = (3 - 1)r = 2r$, donc $r = -0{,}5$.
On vérifie : $v_0 = v_1 - r = 2 - (-0{,}5) = 2{,}5$.
Si la suite (v_n) est arithmétique alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2{,}5 - 0{,}5n$.

> Les points appartiennent à la droite d'équation $y = 2{,}5 - 0{,}5x$.

Application

9 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son terme général.

a. $u_0 = 0{,}5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 0{,}2$.

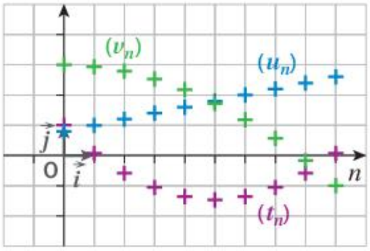
b. $v_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}1v_n + 5$.

10 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4 - \dfrac{n}{5}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2n(n + 1) - 7$.

11 On a représenté ci-contre les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (t_n) par des nuages de points.



• Pour chacune de ces suites, expliquer pourquoi elle peut être ou ne pas être arithmétique. Si elle peut être arithmétique, déterminer sa formule explicite.

Les incontournables 40 à 43 p. 59

2 Déterminer les variations d'une suite arithmétique

OBJECTIF 1
Reconnaître et étudier une suite arithmétique

1. Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, calculer les termes d'indices 1, 2, 3 et 15, puis déterminer le sens de variation.
a. (u_n) définie par $u_0 = 40$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 9{,}4$.
b. (v_n) définie par $v_0 = 17$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2{,}8$.
2. La suite (w_n) est arithmétique et définie sur $\mathbb{N}$. Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme, puis déterminer le sens de variation.
a. $w_5 = 1{,}4$ et $w_{12} = 0$. **b.** $w_8 = 5$ et $w_{13} = 7$. **c.** $w_{15} = 15$ et $w_{21} = -1$.

Solution

1. a. $u_1 = u_0 - 9{,}4 = 40 - 9{,}4 = 30{,}6$.
$u_2 = u_1 - 9{,}4 = 30{,}6 - 9{,}4 = 21{,}2$.
$u_3 = u_2 - 9{,}4 = 21{,}2 - 9{,}4 = 11{,}8$.
On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 40 - 9{,}4n$. Donc $u_{15} = 40 - 9{,}4 \times 15 = -101$.
Comme la raison est strictement négative $(-9{,}4 < 0)$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

b. $v_1 = v_0 + 2{,}8 = 17 + 2{,}8 = 19{,}8$.
$v_2 = v_1 + 2{,}8 = 19{,}8 + 2{,}8 = 22{,}6$.
$v_3 = v_2 + 2{,}8 = 22{,}6 + 2{,}8 = 25{,}4$.
On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 17 + 2{,}8n$. Donc $v_{15} = 17 + 2{,}8 \times 15 = 59$.
Comme la raison est strictement positive $(2{,}8 > 0)$, la suite (v_n) est strictement croissante.

2. a. On sait que $w_{12} = w_5 + (12 - 5)r$ où r est la raison de la suite.
On en déduit que $7r = w_{12} - w_5 = 0 - 1{,}4 = -1{,}4$ et donc $r = -\dfrac{1,4}{7} = -0{,}2$.
$w_5 = w_0 + 5r$ donc $w_0 = w_5 - 5r = 1{,}4 - 5 \times (-0{,}2) = 1{,}4 + 1 = 2{,}4$.
Comme la raison est strictement négative, la suite (w_n) est strictement décroissante.

b. On sait que $w_{13} = w_8 + (13 - 8)r$ où r est la raison de la suite.
On en déduit que $5r = w_{13} - w_8 = 7 - 5 = 2$ et donc $r = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.
$w_8 = w_0 + 8r$, donc $w_0 = w_8 - 8r = 5 - 8 \times 0{,}4 = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$.
Comme la raison est strictement positive, la suite (w_n) est strictement croissante.

c. On sait que $w_{21} = w_{15} + (21 - 15)r$ où r est la raison de la suite.
On en déduit que $6r = w_{21} - w_{15} = -1 - 15 = -16$ et donc $r = -\dfrac{16}{6} = \boxed{-\dfrac{8}{3}}$
$w_{15} = w_0 + 15r$ donc $w_0 = w_{15} - 15r = 15 - 15 \times \left(-\dfrac{8}{3}\right) = 15 + 40 = 55$.
Comme la raison est strictement négative, la suite (w_n) est strictement décroissante.

On utilise la relation de récurrence de (u_n).

On utilise la formule explicite de (u_n).

Le sens de variation d'une suite arithmétique est donné par le signe de la raison.

On utilise la relation entre deux termes quelconques :
$u_n = u_p + (n - p)r$

On utilise la formule explicite.

Application

12 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, calculer les termes d'indice 1, 2, 3 et 25, puis déterminer le sens de variation.
a. (u_n) définie par $u_0 = -11$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 8{,}4$.
b. (v_n) définie par $v_0 = 4{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 5{,}7$.

13 La suite (w_n) est arithmétique et définie sur $\mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer la raison et le premier terme, puis le sens de variation.
a. $w_5 = -2{,}7$ et $w_{12} = 0{,}1$. **b.** $w_3 = 5$ et $w_{11} = 7$.
c. $w_{14} = 10{,}5$ et $w_{22} = 2{,}5$. **d.** $w_5 = -1$ et $w_9 = 0$.

Les incontournables 44 et 45 p. 59

Vidéo
Reconnaître une suite géométrique
hatier-clic.fr/ma1053

OBJECTIF 2
Reconnaître et étudier une suite géométrique

3 Reconnaître une suite géométrique

1. Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son terme général.

a. $u_0 = 13$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}2u_n$. **b.** $v_0 = -511$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 211$.

c. $w_0 = 14$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -\dfrac{w_n}{3}$.

d. $t_0 = 4{,}2$ et, pour tout nombre entier naturel n, t_{n+1} représente 3 % de t_n.

2. Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, indiquer si elle est géométrique. Dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = -12 \times 50^n$ **b.** $v_n = 0{,}9^{2n}$ **c.** $w_n = \dfrac{7}{13^n}$ **d.** $t_n = 14 + 8^n$

Solution

1. a. Pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = 0{,}2$.
La suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et son terme général est $u_n = 13 \times 0{,}2^n$.

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite géométrique.

b. $v_0 = -511$, $v_1 = -511 + 211 = -300$ et $v_2 = -300 + 211 = -89$.

$\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{-300}{-511} \approx 0{,}587$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-89}{-300} \approx 0{,}297$, d'où $\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$.

Donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

On calcule trois termes consécutifs et on vérifie que le quotient de termes consécutifs (non nuls) n'est pas constant.

c. Pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = -\dfrac{w_n}{3} = -\dfrac{1}{3}w_n = q \times w_n$ avec $q = -\dfrac{1}{3}$.

La suite (w_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } -\frac{1}{3}}$ et son terme général est $\boxed{w_n = 14 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$.

d. $t_0 = 4{,}2$. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{3}{100}t_n = 0{,}03t_n$. Donc la suite (t_n) est géométrique de raison 0,03 et son terme général est $t_n = 4{,}2 \times 0{,}03^n$.

2. a. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -12 \times 50^n$. Donc $u_0 = -12$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ avec $q = 50$. Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 50 et $u_0 = -12$.

On reconnaît la formule explicite d'une suite géométrique.

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}9^{2n} = (0{,}9^2)^n = 0{,}81^n$.
Donc $v_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ avec $q = 0{,}81$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,81 et $v_0 = 1$.

c. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{7}{13^n} = 7 \times \left(\dfrac{1}{13}\right)^n$. Donc $w_0 = 7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n$

avec $q = \dfrac{1}{13}$. Donc la suite (w_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{1}{13} \text{ et } w_0 = 7}$.

d. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 14 + 8^n$. Donc $t_0 = 15$, $t_1 = 22$ et $t_2 = 78$.

D'où $\dfrac{t_1}{t_0} = \dfrac{22}{15} \approx 1{,}47$ et $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{78}{22} = \dfrac{39}{11} \approx 3{,}55$, donc $\dfrac{t_1}{t_0} \neq \dfrac{t_2}{t_1}$.

Donc la suite (t_n) n'est pas géométrique.

On calcule trois termes consécutifs et on vérifie que le quotient de termes consécutifs (non nuls) n'est pas constant.

Application

14 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique. Dans l'affirmative, préciser sa raison et son terme général.

a. $v_0 = 16$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{2}\,v_n$.

b. $w_0 =$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, w_{n+1} représente 0,1 % de w_n.

c. $t_0 = 16$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{2}{t_n}$.

15 Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, indiquer en justifiant si elle est géométrique. Dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = 18 \times (2^n)^2$ **b.** $v_n = 15^n(n+1)$

c. $w_n = \dfrac{4^{n+1}}{5}$ **d.** $t_n = -3{,}7^n$

Les incontournables 46 à 48 p. 59

4 Déterminer les variations d'une suite géométrique

OBJECTIF 2
Reconnaître et étudier une suite géométrique

1. Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, calculer les termes d'indices 1, 2, 3 et 8, puis déterminer le sens de variation.

a. (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n$.

b. (v_n) définie par $v_0 = -2{,}1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} représente 70 % de v_n.

2. La suite (w_n) est géométrique et définie sur $\mathbb{N}$.

Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme, puis déterminer le sens de variation éventuel.

a. $w_4 = -1\,920{,}8$ et $w_6 = -376\,476{,}8$ **b.** $w_2 = 0{,}08$ et $w_5 = -0{,}000\,64$

Solution

1. a. $u_1 = 5 \times u_0 = 5 \times 12 = 60$.

$u_2 = 5 \times u_1 = 5 \times 60 = 300$.

$u_3 = 5 \times u_2 = 5 \times 300 = 1\,500$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 12 \times 5^n$. Donc $u_8 = 12 \times 5^8 = 4\,687\,500$.

Comme la raison est strictement supérieure à 1 $(5 > 1)$ et comme le premier terme est strictement positif $(12 > 0)$, la suite (u_n) est strictement croissante.

b. $v_1 = 0{,}7 \times v_0 = 0{,}7 \times (-2{,}1) = -1{,}47$.

$v_2 = 0{,}7 \times v_1 = 0{,}7 \times (-1{,}47) = -1{,}029$.

$v_3 = 0{,}7 \times v_2 = 0{,}7 \times (-1{,}029) = -0{,}720\,3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2{,}1 \times 0{,}7^n$, donc $v_8 = -2{,}1 \times 0{,}7^8 = -0{,}121\,060\,821$.

Comme la raison est strictement comprise entre 0 et 1 $(0 < 0{,}7 < 1)$ et comme le premier terme est strictement négatif $(-2{,}1 < 0)$, la suite (v_n) est strictement croissante.

2. a. On sait que $w_6 = w_4 \times q^{6-4}$ où q est la raison de la suite.

On en déduit que $q^2 = \dfrac{w_6}{w_4} = \dfrac{-376\,476{,}8}{-1920{,}8} = 196$,

donc $q = \sqrt{196} = 14$ ou $q = -\sqrt{196} = -14$.

Dans les deux cas, $q^4 = 38\,416$ et $w_4 = w_0 \times q^4$, donc $w_0 = \dfrac{w_4}{q^4} = \dfrac{-1920{,}8}{38\,416} = -0{,}05$.

Si $q = -14 < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

Mais si $q = 14 > 1$, comme le premier terme est strictement négatif $(-0{,}05 < 0)$, alors la suite (w_n) est strictement décroissante.

b. On sait que $w_5 = w_2 \times q^{5-2}$ où q est la raison de la suite.

On en déduit que $q^3 = \dfrac{w_5}{w_2} = \dfrac{-0{,}000\,64}{0{,}08} = -0{,}008$ et donc $q = \sqrt[3]{-0{,}008} = -0{,}2$.

$w_2 = w_0 \times q^2$, donc $w_0 = \dfrac{w_2}{q^2} = \dfrac{0{,}08}{(-0{,}2)^2} = 2$.

Comme la raison est strictement négative, la suite (w_n) n'est pas monotone.

On utilise la relation de récurrence de (u_n).

On utilise la formule explicite de (u_n).

Le sens de variation d'une suite géométrique est donné selon le signe du premier terme et la valeur de la raison.

On utilise la relation entre deux termes quelconques : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Il y a deux réponses possibles pour q.

On utilise la formule explicite de (w_n).

Application

16 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, calculer les termes d'indice 1, 2, 3 et 7, puis déterminer le sens de variation éventuel.

a. (u_n) définie par $u_0 = -5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} représente 140 % de u_n.

b. (v_n) définie par $v_0 = 1{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2{,}5v_n$.

17 La suite (w_n) est géométrique et définie sur $\mathbb{N}$. Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme, puis déterminer le sens de variation éventuel.

a. $w_9 = -3 \times 10^{-8}$ et $w_{11} = -3 \times 10^{-10}$.

b. $w_5 = 312{,}5$ et $w_8 = 39\,062{,}5$.

Les incontournables 49 et 50 p. 59

5 Calculer une somme de termes

OBJECTIF 3
Calculer une somme de termes d'une suite particulière

1. a. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1{,}2$.
Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.
b. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -12{,}9 + 2{,}5n$. Calculer $\sum_{k=6}^{k=15} v_k$.

2. a. Calculer la somme $S = 1 + 0{,}6 + 0{,}6^2 + \dots + 0{,}6^{15}$.
b. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 60$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0{,}2u_n$.
Calculer $u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$.
c. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,5 et $v_0 = -0{,}64$.
Calculer la somme de ses neuf premiers termes.

Solution

1. a. La suite (u_n) est arithmétique de raison $-1{,}2$ et $u_0 = 5$.

On identifie la nature de la suite (u_n).

$u_{20} = u_0 + 20 \times (-1{,}2) = 5 - 24 = -19$.

On calcule le dernier terme de la somme en utilisant le terme général de (u_n).

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = (20+1) \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{5-19}{2} = 21 \times (-7) = \boxed{-147.}$$

b. La suite (v_n) est arithmétique de raison 2,5 et $v_0 = -12{,}9$.

$\sum_{k=6}^{k=15} v_k = v_6 + v_7 + \dots + v_{15}$.

On explicite les termes que l'on doit additionner.

$v_6 = v_0 + 6 \times 2{,}5 = -12{,}9 + 15 = 2{,}1$.
$v_{15} = v_0 + 15 \times 2{,}5 = -12{,}9 + 37{,}5 = 24{,}6$.

Il y a 10 termes dans la somme.

$$\text{D'où } \sum_{k=6}^{k=15} v_k = (15 - 6 + 1)\frac{v_6 + v_{15}}{2} = 10 \times \frac{2{,}1 + 24{,}6}{2} = 5 \times 26{,}7 = \boxed{133{,}5.}$$

2. a. $$S = 1 + 0{,}6 + 0{,}6^2 + \dots + 0{,}6^{15} = \frac{1 - 0{,}6^{15+1}}{1 - 0{,}6} = \frac{1 - 0{,}6^{16}}{0{,}4} = \boxed{2{,}5(1 - 0{,}6^{16}).}$$

b. La suite (u_n) est géométrique de raison $-0{,}2$ et $u_0 = 60$.

On calcule le premier terme de la somme.

$u_3 = u_0 \times (-0{,}2)^3 = 60 \times (-0{,}008) = -0{,}48$.

Il y a 8 termes dans la somme.

$$u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = u_3 \times \frac{1 - (-0{,}2)^{10-3+1}}{1 - (-0{,}2)} = -0{,}48 \times \frac{1 - (-0{,}2)^8}{1{,}2}$$
$$= \boxed{-0{,}4(1 - 0{,}2^8).}$$

c. La somme des neuf premiers termes de la suite (v_n) est :

$$v_0 + v_1 + \dots + v_8 = v_0 \times \frac{1 - 1{,}5^{8+1}}{1 - 1{,}5} = -0{,}64 \times \frac{1 - 1{,}5^9}{-0{,}5} = \boxed{1{,}28(1 - 1{,}5^9).}$$

Application

18 a. La suite (u_n) est arithmétique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = -4$.
Calculer la somme de ses vingt-six premiers termes.
b. La suite (v_n) est définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 19 - 3{,}7n.$$
Calculer $\sum_{k=0}^{k=18} v_k$ et $\sum_{k=6}^{k=19} v_k$.
c. Calculer $1 + 1{,}2 + 1{,}4 + \dots + 5$.

19 a. Calculer la somme :
$$S = 1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + \dots + 1{,}2^9.$$
b. La suite (u_n) est définie par :
$$u_0 = 95 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}45u_n.$$
Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_8$.
c. La suite (v_n) est définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par :
$$v_n = 0{,}01 \times (-1{,}5)^n.$$
Calculer $\sum_{k=0}^{k=20} v_k$ et $\sum_{k=0}^{k=21} v_k$, puis comparer leurs signes.

Les incontournables 51 et 52 p. 59

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Suite arithmétique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison r** lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

On **ajoute** le même nombre r pour passer d'un terme au suivant. $u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$

Formule explicite

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison r** si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$,

$u_n = u_p + (n - p) \times r$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

Si $r < 0$ alors	Si $r = 0$ alors	Si $r > 0$ alors
(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est constante.	(u_n) est strictement croissante.

▶ Cours 1 p. 48

Suite géométrique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est géométrique de **raison q** lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

On **multiplie** par le même nombre q pour passer d'un terme au suivant. $u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$

Formule explicite

Une suite (u_n) est géométrique de **raison q** si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, avec $n > p$,

$u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale à u_0.	(u_n) est constante égale à u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

▶ Cours 2 p. 49

Sommes de termes

Suite arithmétique de raison r

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{(u_p + u_n)}{2}$$

Suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

▶ Cours 3 p. 50

… ET FAIRE LE POINT QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
20 La suite (a_n) est arithmétique, définie sur $\mathbb{N}$, de raison 4 et de premier terme $a_0 = -2{,}2$.	Le terme général est : $a_n = -2{,}2n + 4$.	Le terme général est : $a_n = -2{,}2^n + 4$.	Pour tout nombre entier naturel n : $a_n = -2{,}2 + 4n$.	Pour tout nombre entier naturel n : $a_n = -2{,}2 \times 4^n$.
21 La suite (b_n) est définie par $b_1 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n - 11$. La suite (b_n) est :	arithmétique de raison 5.	arithmétique de raison −11.	croissante.	décroissante.
22 La suite (c_n) est géométrique, définie sur $\mathbb{N}$, de raison −3 et de premier terme $c_0 = 0{,}5$.	Pour tout nombre entier naturel n : $c_n = -3 \times 0{,}5^n$.	Pour tout nombre entier naturel n : $c_n = -0{,}5 \times 3^n$.	Le terme général est : $c_n = 0{,}5 \times 3^n$.	Le terme général est : $c_n = 0{,}5 \times (-3)^n$.
23 La suite (d_n) est définie par $d_0 = -7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = 1{,}5d_n$. La suite (d_n) est :	géométrique de raison −7.	géométrique de raison 1,5.	croissante.	décroissante.
24 La suite (e_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = -7 + 3n$. La suite (e_n) est :	arithmétique de premier terme −7.	arithmétique de premier terme 3.	géométrique de premier terme −7.	géométrique de premier terme 3.
25 Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = -7 + 3n$. La suite (u_n) est :	arithmétique de raison −7.	arithmétique de raison 3.	géométrique de raison −7.	géométrique de raison 3.
26 La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 \times 5^n$. La suite (v_n) est :	arithmétique de premier terme 2.	arithmétique de premier terme 5.	géométrique de premier terme 2.	géométrique de premier terme 5.
27 Le terme général de la suite (w_n) est $w_n = 2 \times 5^n$. La suite (w_n) est :	arithmétique de raison 2.	arithmétique de raison 5.	géométrique de raison 2.	géométrique de raison 5.
28 La suite (t_n) est définie par $t_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 5t_n - 0{,}8$. La suite (t_n) :	est arithmétique.	est géométrique.	est arithmétique et géométrique.	n'est ni arithmétique ni géométrique.
29 $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 12$	$S = 66$	$S = 132$	$S = 78$	$S = 156$
30 La suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, est arithmétique de raison −6 et de premier terme $u_0 = 1{,}4$. $S_n = u_0 + \ldots + u_n$.	$S_8 = 22{,}6$	$S_8 = 203{,}4$	$S_8 = -22{,}6$	$S_8 = -203{,}4$
31 $T = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10}$	$T = 1\,023$	$T = -1\,023$	$T = 2\,048$	$T = 2\,047$
32 $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^{10}$	$Z = 683$	$Z = -683$	$Z = -2\,047$	$Z = 2\,047$
33 La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$, est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 13$. $T_n = v_0 + \ldots + v_n$.	$T_4 \approx 43{,}7$	$T_4 = 43{,}7$	$T_4 = 65(1 - 0{,}8^5)$	$T_4 = 38{,}376$

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

34 Parlons stratégies ! À l'oral

Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, déterminer si elle est arithmétique ou géométrique ou ni l'une ni l'autre. Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $u_n = 5n - 11$ **b.** $u_n = n \times 0{,}5^n$

c. $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 1$.

d. $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$ et $u_0 = 4{,}5$.

e. $u_n = \sqrt{n}$ **f.** $u_n = \frac{9}{7^n}$

g. $u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}$ et $u_0 = -4$.

h. $u_n = 6^{2n}$

Différentes stratégies pour déterminer la nature d'une suite

Stratégie 1
Je reconnais la formule de récurrence d'une suite arithmétique ou géométrique.

Stratégie 2
Je reconnais la formule explicite d'une suite arithmétique ou géométrique.

Stratégie 3
Je calcule les trois premiers termes pour prouver qu'elle n'est ni arithmétique, ni géométrique.

J'ai une **autre stratégie** !

35 Parlons stratégies ! À l'oral

Pour chacune des suites (v_n) ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, calculer la somme de ses onze premiers termes.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $v_n = -2{,}3n + 7{,}2$ **b.** $v_n = 64 \times 0{,}5^n$ **c.** $v_{n+1} = 0{,}2v_n - 1$ et $v_0 = 5$. **d.** $v_{n+1} = 1{,}2v_n$ et $v_0 = -2$.

Différentes stratégies pour calculer une somme de termes d'une suite

Stratégie 1
Je reconnais une suite arithmétique ou géométrique.

Stratégie 2
Je détermine les onze premiers termes, puis je les additionne.

Stratégie 3
Je crée un algorithme, puis je le programme.

J'ai une **autre stratégie** !

36 En moins d'une minute !

Déterminer la monotonie de chacune des suites définies ci-dessous.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3{,}4n + 11{,}4$. **b.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}05n - 2$. **c.** $w_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -1{,}5 + w_n$.

37 En moins d'une minute !

Chacune des suites définies ci-dessous est-elle monotone ?

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1{,}3 \times 0{,}4^n$. **b.** $v_0 = 5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2{,}1v_n$. **c.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 5 \times (-0{,}7)^n$.

38 Avec une calculatrice !

Pour chacune des situations suivantes, créer une suite qui modélise le phénomène décrit, puis estimer l'état de la situation en 2023.

a. En France, le pic de la mortalité routière a été atteint en 1972 avec 18 034 morts. Depuis 1972, le nombre de morts sur les routes diminue en moyenne de 2,3 % chaque année.

b. Un salarié était payé 1 750 € en janvier 2015. Chaque année suivante, son salaire est augmenté de 2,3 %.

c. Une commune comptait 869 habitants en 1968. Tous les cinq ans suivants, la population augmente en moyenne de 211 personnes.

39 En moins de trois minutes !

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 15$ et,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 5$. On note $S = \sum_{k=0}^{k=15} u_k$.

• Compléter l'algorithme ci-dessous pour déterminer la valeur de S.

```
U ← 15
S ← …
Pour k allant de … à …
    U ← …
    S ← …
Fin Pour
```

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Reconnaître une suite arithmétique

40 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison.

a. $u_0 = -7$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n + 22{,}5$.

b. $v_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{n}$.

c. $w_0 = 0{,}5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - \dfrac{1}{3}$.

d. $t_0 = 44$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 3{,}2t_n$.

41 Pour chacune des suites ci-dessous indiquer en justifiant si elle est arithmétique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = (3n+1)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = 22n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. $w_n = n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

d. $t_n = 4{,}8(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

42 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, dont on indique la raison r et le premier terme, donner le terme général.

a. $r = 0{,}1$ et $u_0 = -5$.

b. $r = -10$ et $v_0 = 0{,}55$.

c. $r = 0$ et $w_0 = 1\,000$.

d. $r = 21$ et $t_0 = 0$.

43 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, déterminer les quatre premiers termes.

a. (a_n) de raison $-0{,}3$ et de premier terme $a_0 = 5$.

b. $b_n = 3 - \dfrac{2n}{3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. (c_n) de raison 4,2 et de premier terme 13.

d. $d_n = 3n - \dfrac{2}{3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les variations d'une suite arithmétique

44 Déterminer le sens de variation de chacune des suites de l'exercice **43** en justifiant.

45 Pour chaque suite arithmétique ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, reconnaître la raison et en déduire le sens de variation.

a. $u_0 = -77$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -12 + u_n$.

b. $v_0 = 8{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 7{,}8$.

Reconnaître une suite géométrique

46 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison.

a. $u_0 = -8$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 63u_n + 2$.

b. $v_0 = -2{,}4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{7}v_n$.

c. $w_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n} \times w_n$.

47 Pour chacune des suites ci-dessous, indiquer en justifiant si elle est géométrique et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. $u_n = 8{,}4(-2)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $v_n = 13n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. $w_n = 12 \times 3{,}4^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

48 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, dont on indique la raison q et le premier terme, donner le terme général.

a. $q = 0{,}1$ et $u_0 = -5$.

b. $q = -10$ et $v_0 = 0{,}55$.

c. $q = 1$ et $w_0 = 1\,000$.

Déterminer les variations d'une suite géométrique

49 Déterminer le sens de variation de chacune des suites de l'exercice **48** en justifiant.

50 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, reconnaître la raison et en déduire le sens de variation.

a. $u_0 = 6$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

b. $v_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -0{,}25v_n$.

Calculer une somme de termes

51 Calculer les sommes suivantes.

a. $S = 1 + 2 + \ldots + 101$

b. $T = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^8$

c. $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^7$

52 Pour chacune des suites (w_n) ci-dessous, calculer la somme $S = w_0 + \ldots + w_9$.

a. $w_n = -3 + 2{,}4n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. $w_n = 5 \times 0{,}2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Corrigés p. 368

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Reconnaître et étudier une suite arithmétique

Savoir-faire 1 et 2 p. 51-52

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Questions FLASH

53 Vrai ou faux ?
La suite (u_n) est arithmétique de raison 1,5 et $u_0 = 8$.
a. « $u_1 = 9{,}5$. » b. « $u_2 = 5$. »
c. « $u_3 = 12{,}5$. » d. « $u_4 = 14{,}5$. »

54 Vrai ou faux ?
La suite (v_n) est arithmétique, $v_1 = 8$ et $v_2 = 6$.
a. « $v_0 = 4$. » b. « $v_0 = 10$. »
c. « $v_3 = 4$. » d. « $v_4 = 0$. »

55 QCM
La suite arithmétique (w_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 3 - 2n$. La raison est égale à :
a. 3. b. 1. c. -2. d. $-2n$.

56 Vrai ou faux ?
Les suites considérées sont arithmétiques.
a. « $u_0 = 8$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3 + u_n$. »
b. « $v_0 = -5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n + 7$. »
c. « $w_0 = 2{,}3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 0{,}15$. »
d. « $t_0 = -5{,}1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n - 0{,}5n$. »
e. « $s_0 = 3{,}9$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. »

57 Vrai ou faux ?
Les suites considérées sont arithmétiques.
a. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 + n$. »
b. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -n + 7$. »
c. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1{,}2 + 0{,}15n^2$. »
d. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1}{3}n - 7$. »
e. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1{,}5^n - 2$. »

58 Vrai ou faux ?
La suite (u_n) est arithmétique, $u_1 = 6{,}6$ et $u_3 = 8{,}8$.
a. « La raison est 2,2. » b. « $u_5 = 11$. »
c. « (u_n) est strictement croissante. » d. « $u_0 = 4{,}4$. »

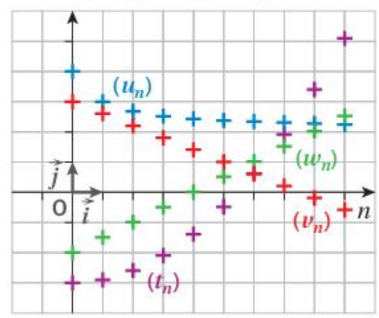
59 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, donner son sens de variation en justifiant.
a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 0{,}5$.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n - 2{,}7$.
c. $w_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 7{,}5$.
d. $t_0 = 6{,}2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n - 0{,}25$.
e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = -9{,}2$.

60 La suite (a_n) est arithmétique de raison 0,4 et $a_0 = 7$.
a. Calculer a_1, a_2 et a_3.
b. Calculer a_{20} et a_{35}.

61 La suite (b_n) est la suite des multiples positifs non nuls de 4. On a donc $b_0 = 1 \times 4 = 4$.
a. Justifier que la suite (b_n) est arithmétique et donner sa raison.
b. Donner la formule explicite de (b_n).
c. Calculer b_{10} et b_{17}.
d. Quel est l'indice du terme égal à 444 ?

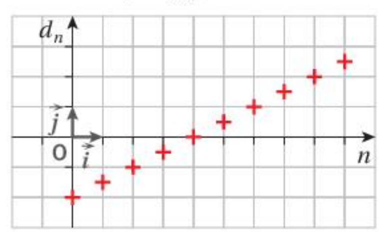
62 La suite (c_n) est arithmétique, $c_4 = 6$ et $c_7 = 5{,}4$.
a. Déterminer la raison et le premier terme c_0.
b. Calculer c_5, c_{10} et c_{50}.
c. Déterminer le nombre entier naturel n tel que $c_n = 0$.

63 On a représenté ci-dessous les premiers termes de quatre suites : (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n).



• Pour chacune de ces suites, expliquer pourquoi elle semble être arithmétique, ou ne pas l'être.

64 On a représenté ci-dessous les premiers termes d'une suite arithmétique (d_n).



a. Quel est son premier terme d_0 ?
b. Quelle est sa raison ?
c. Donner le terme général de la suite.
d. Déterminer la valeur de d_{15}.
e. Lorsque n devient grand, comment se comporte la valeur de d_n ?

65 Un artisan a reçu 600 stylos marqués du logo de son entreprise. Chaque semaine, il en offre 24 à des clients. n étant un nombre entier naturel, on note u_n le nombre de stylos restant au bout de n semaines.
• Préciser la nature de la suite (u_n) et indiquer son sens de variation.

Fichier Python
Ex. 68 et 69
Manuel numérique enseignant

★★

66 Copies à la loupe

Jérémy, Kristina et Lola ont résolu l'exercice suivant :
« La suite (u_n) est arithmétique de raison 2,9 et $u_0 = 5$.
La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 7 - 3{,}4n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.
La suite (w_n) est-elle arithmétique ? »
Voici leurs réponses :

Jérémy

$v_0 = 7$ et $w_0 = u_0 - v_0 = 5 - 7 = -2$.
$u_1 = 5 + 2{,}9 = 7{,}9$, $v_1 = 3{,}6$ et $w_1 = 4{,}3$.
$u_2 = 10{,}8$, $v_2 = 0{,}2$ et $w_2 = 10{,}6$.
$w_1 - w_0 = 4{,}3 - (-2) = 6{,}3$ et
$w_2 - w_1 = 10{,}6 - 4{,}3 = 6{,}3$.
Comme $w_2 - w_1 = w_1 - w_0 = 6{,}3$, alors (w_n) est arithmétique de raison 6,3.

Kristina

(u_n) est arithmétique, donc $u_n = 5 + 2{,}9n$.
On sait que $v_n = 7 - 3{,}4n$.
$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - v_{n+1} - (u_n - v_n)$
$= u_{n+1} - v_{n+1} - u_n + v_n$
$= 5 + 2{,}9n + 1 - 7 + 3{,}4n + 1 - 5 - 2{,}9n + 7 - 3{,}4n$
$= 2$, donc (w_n) est arithmétique de raison 2.

Lola

Comme (u_n) est arithmétique de raison 2,9 et $u_0 = 5$, alors $u_{n+1} - u_n = 2{,}9$.
Comme $v_n = 7 - 3{,}4n$, alors (v_n) est arithmétique de raison $-3{,}4$ et $v_{n+1} - v_n = -3{,}4$.
$w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n)$
$= (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n)$
$= 2{,}9 - (-3{,}4) = 6{,}3$.
(w_n) est donc arithmétique de raison 6,3.

• Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chacune des erreurs identifiées.

67

Ivan a 357 € dans sa tirelire.
Chaque semaine, il y dépose 4 € supplémentaires.
On note S_n la somme d'argent dans la tirelire d'Ivan au bout de n semaines, où $n \in \mathbb{N}$.

a. Justifier que la suite (S_n) est arithmétique.
b. Quel sera le montant de sa tirelire après un an ?
c. Ivan souhaite s'acheter un scooter d'occasion d'une valeur de 649 € avec l'argent de sa tirelire. Combien de semaines devra-t-il attendre pour pouvoir se l'offrir ?

68 IN ENGLISH ▸ p. 381 ALGORITHMIQUE

Consider the algorithm beside.

```
A ← −15
For i = 1 to k do
    A ← A + 7
End For
```

a. What is the value of A with $k = 3$?
b. The algorithm allows us to compute any term of the sequence (A_n). Find an expression for the n^{th} term of the recursive sequence.
c. Find the 50^{th} term of the sequence.

69 PROGRAMMATION python

a et b sont des nombres réels ; p et q sont des nombres entiers naturels distincts.
Une suite arithmétique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifie :
$$v_p = a \quad \text{et} \quad v_q = b.$$
On utilise la fonction en Python ci-dessous.

```python
def suite(p,a,q,b):
    r=(b-a)/(q-p)
    v0=a-p*r
    return [r,v0]
```

a. Que renvoie l'exécution de « `suite(5,6,7,8)` » ?
b. Que renvoie l'exécution de « `suite(15,7,9,5)` » ?
c. Proposer une modification de cette fonction afin qu'elle renvoie le message « erreur » au lieu de renvoyer les valeurs de r et v_0 si p et q sont égaux.

70

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les dix premiers termes à l'aide de la calculatrice.
a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 0{,}3n$.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4n - 1{,}5$.
c. (w_n) est arithmétique de raison $-5{,}3$ et $w_0 = 42$.
d. (t_n) est arithmétique de raison 11 et $t_0 = -97$.

71

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

a. La suite (c_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = n^2$. Justifier que la suite (c_n) n'est pas arithmétique.
b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$.
Déterminer la nature de la suite (d_n) et en préciser les éléments caractéristiques.

72 Petits carrés à dénombrer

On considère une succession de motifs géométriques :

Figure 1 — Figure 2 — Figure 3

c_n est le nombre de carrés de la figure n, où $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.
b. Tracer la figure 4 et donner la valeur de c_4.
c. Conjecturer une formule de récurrence de la suite (c_n).
d. En supposant la conjecture exacte, déduire le terme général de (c_n) et dire s'il est possible de réaliser une figure avec exactement 6 789 carrés.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Reconnaître et étudier une suite géométrique

Savoir-faire 3 et 4 p. 53-54

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

73 Vrai ou faux ?
Les suites (u_n) ci-dessous sont géométriques.

a. « $u_{n+1} = -3{,}14\ u_n$. »
b. « $u_{n+1} = 3{,}14 + u_n$. »
c. « $u_{n+1} = \pi\ u_n$. »
d. « $u_{n+1} = \pi^2 u_n$. »
e. « $u_{n+1} = \pi - u_n$. »
f. « $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3{,}14}$. »

74 Pour chaque suite géométrique (u_n) ci-dessous, définie sur $\mathbb{N}$, reconnaître sa raison q.

a. $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{3{,}14}$
b. $u_n = 5 \times 6^n$
c. $u_n = (-1)^n$
d. $u_n = -1$

75 Vrai ou faux ?
La suite (u_n) est géométrique, $u_2 = 54$ et $u_4 = 6$.

a. « $u_0 = -486$. »
b. « $u_0 = 486$. »
c. « $u_3 = 30$. »
d. « $u_5 = -3$. »

76 Vrai ou faux ?
La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison $q = 1{,}5$.

a. « $v_1 = 9{,}5$. »
b. « $v_2 = 18$. »
c. « $v_4 = 14$. »

77 Vrai ou faux ?
La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison $q = -0{,}5$.

a. « $v_1 = 7{,}5$. »
b. « $v_2 = -2$. »
c. « $v_3 = -1$. »

78 À chaque suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0, associer son terme général.

(u_n) définie avec …
1. $q = 3$ et $u_0 = -4$
2. $q = -3$ et $u_0 = 4$
3. $q = 4$ et $u_0 = -3$
4. $q = -4$ et $u_0 = 3$

Terme général
a. $u_n = (-3)^n \times 4$
b. $u_n = (-4)^n \times 3$
c. $u_n = -3 \times 4^n$
d. $u_n = (-4) \times 3^n$

Pour les exercices 79 et 80

À chaque suite géométrique (u_n) de raison q, associer le mot qui convient concernant son éventuelle monotonie, selon la valeur de u_0 proposée.

Raison q de (u_n)
1. $q = 5$
2. $q = -5$
3. $q = 0{,}5$

Monotonie
a. non monotone
b. croissante
c. décroissante

79 $u_0 = 4{,}21$.

80 $u_0 = -4{,}21$.

Pour les exercices 81 à 83

La suite (a_n) est géométrique de raison q.

a. Calculer a_1, a_2 et a_3.
b. Pour tout nombre entier naturel n, déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
c. Calculer a_{12} et a_{30}.

81 $q = 1{,}4$ et $a_0 = 5$.

82 $q = 0{,}2$ et $a_0 = -7$.

83 $q = -10$ et $a_0 = -2$.

84 Pour les suites des exercices 81 à 83 :

a. écrire la relation de récurrence donnant, pour tout nombre entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n ;
b. étudier la monotonie éventuelle de la suite (a_n) ;
c. retrouver les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_{12} et a_{30} à l'aide du mode *Suites* de la calculatrice.

85 La suite (b_n) est géométrique, $b_2 = 5$ et $b_5 = -0{,}135$.

• Déterminer la raison de la suite (b_n), puis calculer les termes b_1 et b_6.

86 D'après l'ADEME, en 2017, les Français ont en moyenne produit 365 kg de déchets ménagers par habitant

Ayant constaté, avec déception, que ses administrés ont produit 23 000 tonnes de déchets en 2017, la maire d'une commune de 53 700 habitants a décidé de mettre en place une nouvelle campagne de recyclage des déchets valorisables. Cela a permis à la ville d'atteindre, en 2018, 400 kg de déchets en moyenne par habitant et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant cinq ans.

1. Justifier la déception de la maire en 2017.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets par habitant de cette ville durant l'année 2018 + n. On a donc $d_0 = 400$.

a. Justifier que la suite (d_n) est géométrique et en préciser le premier terme et la raison.
b. En déduire que la production est bien décroissante.
c. En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de d_n en fonction de n.
d. Quelle sera, à ce rythme, la production de déchets par habitant en 2022 ?

D'après Bac STI2D Polynésie, juin 2014.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 88 et 91
Manuel numérique enseignant

★★

87 De la réponse à la question (et vice-versa)

Chiara a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

a. $u_1 = u_0 + \frac{5{,}3}{100}u_0 = 1{,}053u_0$
$= 1{,}053 \times 150 = 157{,}95.$
b. $u_{n+1} = 1{,}053u_n$.
c. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,053 :
$u_n = 150 \times 1{,}053^n$.
d. $u_6 = 150 \times 1{,}053^6 \approx 204{,}48$.
Au bout de 6 ans, le prix du billet d'avion sera 204,48 €.

1. Proposer un énoncé possible de l'exercice résolu par Chiara.

2. Proposer des améliorations dans les réponses de Chiara.

Maths à l'oral
Expliquez les améliorations apportées aux réponses de Chiara.

88 ALGORITHMIQUE

Karl verse quatre litres d'eau dans un seau. Il l'expose au soleil durant dix jours consécutifs. Il sait que, chaque jour, 12 % du volume d'eau s'évapore. Il mesure le volume d'eau restant dans le seau au bout des dix jours et le note M.

1. Parmi les trois suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, trouver celle(s) qui permet(ent) de modéliser la situation.

a. (u_n) : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 0{,}12$.

b. (v_n) : $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = v_n - 0{,}12n$.

c. (w_n) : $w_0 = 4$ et $w_{n+1} = 0{,}88w_n$.

2. Recopier et compléter les deux algorithmes suivants afin qu'ils calculent la valeur du volume M mesuré au bout des dix jours.

Algorithme 1
```
M ← 4
Pour k allant de 1 à …
    M ← … × M
Fin Pour
```

Algorithme 2
```
M ← 4
N ← 0
Tant que N < …
    M ← M − …
    N ← …
Fin Tant que
```

3. a. Pour chacun des deux algorithmes précédents, écrire une fonction en Python de paramètre j entier positif, qui renvoie la valeur du volume mesuré au bout de j jours, où la valeur du nombre entier j est laissée au choix de l'utilisateur de la fonction.

b. En testant les fonctions précédentes pour des valeurs de j de plus en plus grandes, dire vers quelle valeur semble se rapprocher la valeur du volume.

4. Écrire un algorithme qui détermine le nombre minimal de jours qu'il est nécessaire d'attendre pour qu'il reste moins de 0,5 litre d'eau dans le seau.

89 IN ENGLISH p. 381

On the occasion of his 10th birthday, Antoine's parents deposit £750 in a savings account for him. The account earns compound interest at a rate of 2% per annum. On reaching 18 Antoine wishes to sit his driving test. The driving school is offering a £1000 package of lessons.

a. How much money does Antoine have in his account?

b. How many years will Antoine have to wait in order to begin his driving lessons?

90

φ étant un nombre réel non nul, on considère la suite de nombres : $\frac{1}{\varphi^2}$, $\frac{1}{\varphi}$, 1, φ et φ^2.

1. Expliquer pourquoi les cinq nombres précédents constituent les cinq premiers termes d'une suite géométrique (F_n), définie sur $\mathbb{N}$, dont on précisera la raison.

2. φ désigne désormais le nombre d'or, c'est-à-dire la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

a. Vérifier alors que :
$$F_2 = F_0 + F_1,\ F_3 = F_1 + F_2 \text{ et } F_4 = F_2 + F_3.$$

b. Quelle suite bien connue cela vous rappelle-t-il ?

91 La géométrie dans l'art TICE

La gravure « *Lebensweg I* » de M. C. Escher représente une succession de séries de huit raies dont les nageoires gauches sont les sommets d'un octogone régulier, de taille de plus en plus petite. La longueur L_1 du côté de l'octogone extérieur mesure 10 cm, et à chaque série suivante de huit raies, cette longueur est réduite de 25 %. On note L_n la longueur du côté de l'octogone de la $n^{\text{ième}}$ série se rapprochant du centre de la gravure. On cherche à savoir à partir de quelle série la longueur L_n sera strictement inférieure à 1 cm.

Pour cela, on utilise la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C
1	n	L_n	Test
2	1	10	
3	2		
4	3		
5	4		

a. Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir en cellule B3 afin de calculer les valeurs des termes de la suite (L_n) ?

b. À l'aide d'une instruction conditionnelle, créée en colonne C, répondre au problème.

c. Vers quelle valeur semble se rapprocher L_n quand n devient de plus en plus grand ?

OBJECTIF 3 Calculer une somme de termes d'une suite particulière

Savoir-faire 5 p. 55

Questions FLASH

Pour les exercices 92 à 98
Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

92 QCM
La somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ est égale à :
a. 110. **b.** 55. **c.** 45. **d.** 100.

93 QCM
La suite (u_n) est arithmétique, $u_0 = 5$ et $u_7 = 26$.
La somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_7$ est égale à :
a. 4×31. **b.** 5×26.
c. 7×26. **d.** $8 \times 15{,}5$.

94 QCM
La suite (u_n) est arithmétique, $u_8 = 10$ et $u_{19} = -22$.
La somme $u_8 + u_9 + \ldots + u_{19}$ est égale à :
a. $12 \times \dfrac{10-22}{2}$. **b.** $11 \times \dfrac{10-22}{2}$.
c. $10 \times (-22)$. **d.** $6 \times (-12)$.

95 QCM
La somme $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 64$ est égale à :
a. $\dfrac{1-2^6}{1-2}$. **b.** $\dfrac{1-2^7}{1-2}$. **c.** 63. **d.** 127.

96 QCM
$1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 - 0{,}1^3 + 0{,}1^4 - 0{,}1^5$ est égal à :
a. $\dfrac{1+0{,}1^5}{1+0{,}1}$. **b.** $\dfrac{1-0{,}1^6}{1-0{,}1}$.
c. $\dfrac{1-0{,}1^6}{1+0{,}1}$. **d.** $\dfrac{0{,}999\,999}{0{,}9}$.

97 QCM
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $v_0 = 100$.
La somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_6$ est égale à :
a. $100 \times \dfrac{1-0{,}5^6}{0{,}5}$. **b.** $50 \times \dfrac{1-0{,}5^7}{1-0{,}5}$.
c. $200 \times (1 - 0{,}5^7)$. **d.** $100 \times \dfrac{1+0{,}5^7}{1+0{,}5}$.

98 QCM
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $v_3 = 16$.
La somme $v_3 + v_4 + \ldots + v_9$ est égale à :
a. $16 \times \dfrac{1-0{,}5^3}{1-0{,}5}$. **b.** $16 \times \dfrac{1-0{,}5^6}{1-0{,}5}$.
c. $16 \times \dfrac{1-0{,}5^7}{1-0{,}5}$. **d.** $16 \times \dfrac{1-0{,}5^{10}}{1-0{,}5}$.

99 **a.** Calculer la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 19$.
b. Calculer la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$.
c. En déduire la valeur de $20 + 21 + 22 + \ldots + 50$.

100 Calculer la somme $31 + 32 + 33 + \ldots + 79$.

101 La suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et $u_0 = 9$.
a. Calculer u_{13}.
b. Calculer la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{13}$.

102 La suite (u_n) est arithmétique de raison −7 et $u_0 = 5$.
- Calculer u_{16}, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=16} u_k$.

103 ALGORITHMIQUE
La suite (u_n) est arithmétique de raison 2,3 et $u_0 = 3{,}2$. Pour calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{19}$, on utilise l'algorithme incomplet ci-dessus.

```
U ← 3,2
S ← U
Pour n allant de 1 à …
    U ← … + 2,3
    S ← …
Fin Pour
```

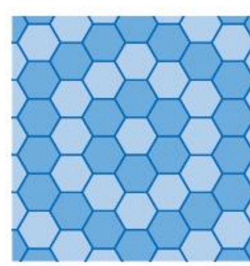
a. Compléter l'algorithme.
b. Programmer cet algorithme et donner le contenu de la variable S à la fin de l'exécution du programme.

104 La suite (u_n) est arithmétique de raison 3,7 et $u_0 = -15{,}8$.
- Calculer u_5 et u_{17}, puis la somme $u_5 + u_6 + \ldots + u_{17}$.

105 La suite (v_n) est géométrique de raison −0,6 et $v_0 = 25$.
- Calculer la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_7$.

106 La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et $v_0 = 0{,}125$.
- Calculer v_3, puis $\displaystyle\sum_{k=3}^{k=18} v_k$.

107 Pavage
Pour recouvrir un sol, Claude utilise un carrelage hexagonal. Elle pose un premier carreau bleu ciel au centre de la pièce qu'elle entoure de carreaux bleu foncé. Elle poursuit le pavage en alternant la couleur de chaque nouveau tour, comme sur l'image ci-dessus.

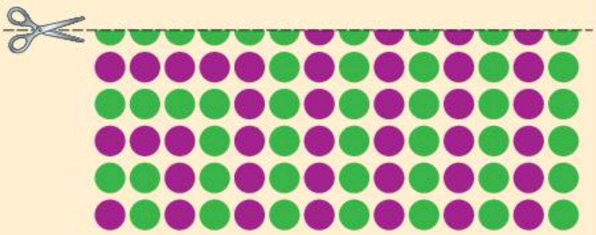


a. Modéliser le nombre de carreaux utilisés à chaque tour par une suite.
b. Le carreleur a posé 27 tours complets.
Combien de carreaux a-t-elle utilisé au total ?

Fichiers Python et logiciel
Ex. 111 et 112
Manuel numérique enseignant

108 Réponse à la loupe

Un professeur a réalisé un motif géométrique en forme de carré, composé de points verts et violets. Il coupe la figure en deux et distribue la partie du bas ci-dessous.



Il demande : « Sachant que le motif est régulier, y a-t-il plus de points violets que de points verts dans cette figure ? »

Voici la réponse de Camille :

> En lisant en diagonale, il y a 1 point violet en bas à gauche, puis 5 points violets, puis 9 points violets. La suite des points violets est donc arithmétique de raison 4.
> De même, il y a 3 points verts, puis 7 points verts, puis 11 points verts. La suite des points verts est aussi arithmétique de raison 4.
> J'en déduis qu'il y a autant de points verts que de points violet dans la figure entière.

a. Donner la relation de récurrence associée à chaque suite utilisée par Camille.

b. Proposer des corrections dans le raisonnement final.

Maths à l'oral
Exposez à la classe votre solution à l'exercice traité par Camille.

109 ALGORITHMIQUE

1. Pour calculer la somme $D = 10 + 13 + 16 + \ldots + 145$, on utilise l'algorithme incomplet suivant.

```
D ← 0
U ← 10
Tant que U ⩽ …
    D ← …
    U ← … + 3
Fin Tant que
```

a. Recopier et compléter cet algorithme.

b. Programmer l'algorithme et donner le contenu de la variable D à la fin de l'exécution du programme.

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et $u_0 = 10$.

a. Quel est l'indice k tel que $u_k = 145$?

b. Calculer la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_k$.

c. Quel résultat retrouve-t-on ?

3. Pour chacune des sommes suivantes, écrire un algorithme qui permet de la calculer.

a. $E = 500 + 495 + 490 + \ldots + 100$

b. $F = 6\,400 + 3\,200 + 1\,600 + \ldots\, 25$

110 IN ENGLISH p. 381

The first terms of a geometric sequence are 320, 160, 80, etc. and $S = 320 + 160 + 80 + \ldots + 0.3125$.

a. What is the common ratio?

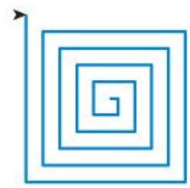
b. Find the value of n such that $V_n = 0.3125$.

c. Find the sum of the geometric series S.

111 PROGRAMMATION python

Pour réaliser la spirale ci-dessous, on utilise le programme en Python suivant.

```
1 import turtle
2
3 turtle.reset()
4 turtle.down()
5 for i in range(1,21):
6     turtle.forward(5*i)
7     turtle.right(90)
8 turtle.up()
```



a. Quelles sont les valeurs prises par la variable `i` à la ligne 5 du programme ?

b. À la ligne 6, le nombre de pixels parcourus par la tortue à chaque étape de la boucle `for` est indiqué. Modéliser le nombre de pixels parcourus par une suite.

c. De combien de pixels la tortue s'est-elle déplacée pour tracer la spirale ?

112 TICE

Avec un tableur, on calcule des termes d'une suite géométrique (u_n) et la somme S_n de ses $n + 1$ premiers termes, avec $n \in \mathbb{N}$.

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	0	4	4
3	1	0,8	4,8
4	2	0,16	4,96
5	3	0,032	4,992
6	4	0,0064	4,9984
7	5	0,00128	4,99968
8	6	0,000256	4,999936
9	7	0,0000512	4,9999872
10	8	0,00001024	4,99999744
11	9	0,000002048	4,999999488

1. a. Quelle est la relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} ?

b. Donner une formule possible, à recopier vers le bas, à saisir dans la cellule B3.

c. Lorsque n devient grand, de quelle valeur semble se rapprocher u_n ?

2. On a saisi dans la cellule C2 la formule `=B2`.

a. Parmi les formules suivantes, à recopier vers le bas, lesquelles peuvent être saisies dans la cellule C3 ?

`=B2+B3` `=C2+B3` `=C2+0,8` `=SOMME(B2:B3)` `=SOMME(B$2:B3)`

b. Démontrer que $S_n = 5(1 - 0{,}2^{n+1})$ avec $n \in \mathbb{N}$.

c. Lorsque n devient grand, de quelle valeur semble se rapprocher S_n ?

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : somme des termes d'une suite géométrique
hatier-clic.fr/ma1066

La démonstration rédigée

Propriétés On considère un nombre entier naturel n et un nombre réel q.

- Si $q \neq 0$ et $q \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- On considère une suite géométrique (u_n) de raison q, $q \neq 1$, et de premier terme u_0.

La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k-n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

OBJECTIF : on souhaite établir une formule permettant de calculer directement la somme des premiers termes successifs d'une suite géométrique.

Démonstration

- On pose $S = \sum_{k=0}^{k-n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$.

$q \times S = q\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$

$\quad = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$

$S - q \times S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1})$

$\quad = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \ldots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \ldots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$

$\quad = 1 - q^{n+1}$

Ainsi $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.

$q \neq 1$, donc $(1 - q) \neq 0$, et donc on peut diviser par $(1 - q)$,

d'où $\boxed{S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$.

Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1 est q^n, donc S est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une telle suite géométrique.

- La suite (u_n) étant géométrique de raison q et de premier terme u_0, pour tout nombre entier naturel k, on a $u_k = u_0 \times q^k$.

- Alors $\sum_{k=0}^{k-n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$\quad = u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^n$

$\quad = u_0\,(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n)$.

On retrouve la somme S calculée précédemment et on remplace :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.}$$ ■

Le principe

1 On calcule la **somme S des $n + 1$ premières puissances de la raison q**.
Pour cela :
a. on multiplie S par q et on développe ;
b. on soustrait $q \times S$ à S, et les termes $q, q^2, \ldots, q^n$ se simplifient ;
c. on factorise le membre de gauche par S.

2 **On utilise la formule explicite** de la suite géométrique (u_n).

3 **On fait apparaître la somme des puissances de q** calculée précédemment.

La démonstration à compléter

113 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter la démonstration suivante permettant de calculer la **somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique.**

Démonstration

- La somme S des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{k-n} k.$$

Elle s'écrit aussi $S = \sum_{k=1}^{k=n} (n - k + 1) = \dots.$

Pour tout nombre entier naturel k compris entre 1 et n, on a :

$$k + (n - k + 1) = \dots.$$

Le résultat ne dépend pas de k. D'où :

$$S + S = \underbrace{(n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = \dots.$$

On en déduit que $S = \frac{1}{2} \times \dots.$

- On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout nombre entier naturel k, $u_k = \dots.$

- Alors $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + (u_0 + r) + \dots + \dots$

$$= \dots \times u_0 + (\dots) \times r = \dots \times u_0 + \dots \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times (n+1) \times (\dots \times u_0 + \dots \times r) = \frac{1}{2} \times (n+1) \times (u_0 + \dots). \blacksquare$$

1 On calcule la **somme S des n premiers entiers naturels non nuls.** Pour cela :
a. on écrit cette somme dans l'ordre croissant et dans l'ordre décroissant des termes ;
b. on additionne deux à deux les termes de même rang k ;
c. on additionne les n résultats identiques précédents pour calculer $S + S$.

2 **On utilise le terme général** d'une suite arithmétique (u_n).

3 **On fait apparaître S**, dans la somme des $n + 1$ premiers termes de (u_n), puis on factorise par $\frac{1}{2} \times (n+1)$.

Démonstrations Vers le BAC

114 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0, et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + r \times n$.

1. a. Démontrer que $v_0 = u_0$ et que, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + r$.

b. En déduire la formule explicite du terme général u_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, en déduire que $u_n = u_p + (n - p)r$.

115 Une suite (u_n) est arithmétique de raison r.

a. Écrire la relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n.

b. Par disjonction des cas selon le signe de r, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de (u_n).

116 On considère une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0, et la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 \times q^n$.

1. a. Démontrer que $v_0 = u_0$ et que, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$.

b. En déduire la formule explicite du terme général u_n.

2. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, avec $n > p$, en déduire que :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

117 (u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul.

1. On suppose $q < 0$.

a. En fonction du signe de u_0, déterminer les signes des termes u_1 et u_2.

b. En déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone.

2. On suppose $q = 1$.
Démontrer que la suite (u_n) est constante.

3. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^n(q - 1).$$

a. On suppose $0 < q < 1$. Démontrer que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est l'opposé de celui de u_0 et en déduire, selon le signe de u_0, la monotonie de la suite (u_n).

b. On suppose $q > 1$. Démontrer que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de u_0 et en déduire, selon le signe de u_0, la monotonie de la suite (u_n).

118 On considère une suite géométrique (u_n) de raison q, avec $q \neq 1$.

- Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant p$:

$$\sum_{k=p}^{k-n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Fichiers Python et logiciel
Ex. 119, 120 et 122
Manuel numérique enseignant

119 ALGORITHMIQUE

1. On donne les deux algorithmes suivants qui calculent les premiers termes d'une suite.

Algorithme 1

$U \leftarrow 2$
Pour N allant de 1 à 6 inclus
    $U \leftarrow U - 0{,}5$
Fin Pour

Algorithme 2

$K \leftarrow 0$
Tant que $K \leqslant 6$
    $V \leftarrow 2 - 0{,}5 \times K$
    $K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

a. Pour chaque algorithme, reconnaître la suite ainsi définie ; en déduire qu'il s'agit de la même suite.

b. Déterminer la valeur du dernier terme ainsi calculé.

2. Reprendre la question **1** avec les deux algorithmes suivants.

Algorithme 1

Pour N allant de 0 à 5 inclus
    $U \leftarrow -3 \times 2\hat{\ }N$
Fin Pour

Algorithme 2

$V \leftarrow -3$
$K \leftarrow 1$
Tant que $K \leqslant 5$
    $V \leftarrow 2 \times V$
    $K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

120 Comparaison de progressions TICE

Dans une entreprise, on propose deux contrats d'embauche au 1er janvier.

Contrat de type A : un salaire mensuel net de début de contrat de 1 600 €, puis une augmentation de 70 € chaque année.

Contrat de type B : un salaire mensuel net de début de contrat de 1 300 €, puis une augmentation de 6 % chaque année.

On note A_0, le salaire mensuel net de début de contrat pour le contrat A, et A_n le salaire net après n années, où n est un nombre entier naturel.

De même, on note B_n le salaire après n années pour le contrat B.

1. Pour tout nombre entier naturel n, écrire une relation liant les termes A_n et A_{n+1}, puis une relation liant B_n et B_{n+1}, et en déduire la nature des suites (A_n) et (B_n).

2. À l'aide d'un tableur :

a. comparer l'évolution des salaires pour savoir si au bout d'un certain nombre d'années (à déterminer le cas échéant) le salaire du contrat B aura dépassé celui du contrat A ;

b. calculer les salaires annuels et comparer les sommes cumulées tout au long des années.

121 IN ENGLISH p. 381

Here is a recursive formula of the sequence $U(n)$:

$$U(0) = 1 \quad U(n) = U(n-1) + n \times (-1)^{n+1}$$

a. Find the first seven terms.

b. Is this sequence arithmetic? geometric? Explain.

c. In a graph, represent the first seven terms.

d. Deduce a formula for the term of even and odd rank in the sequence.

122 PROGRAMMATION python

Un concours scientifique est organisé depuis 2015 ; les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants. Entre 2015 et 2019, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion de filles participant à ce concours de 12 %. On extrapole que la proportion de filles va continuer à progresser ainsi pendant dix ans.

1. a. Quelle était la proportion de filles en 2016 ?

b. Quelle serait alors la proportion de filles en 2021 (arrondir au millième) ?

c. Pour tout nombre entier naturel n, on note p_n la proportion de filles l'année $2015 + n$.

Pour $n < 10$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

d. En déduire la nature de la suite (p_n) et en préciser les valeurs utiles.

2. On donne la fonction en Python suivante.

```python
def proportionfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2015
```

Quelle est la valeur de `proportionfilles(0.5)` ?
Interpréter le résultat.

123 Prolifération de bactéries En groupe

On étudie l'évolution d'une population de bactéries dans une solution en suivant sa concentration en millions de bactéries par millilitre (mL). La solution contient initialement 5 millions de bactéries par millilitre.

Toutes les 10 minutes, la concentration en bactéries augmente de 15 %. n étant un nombre entier naturel, on note c_n la concentration en bactéries, en millions par mL, au bout de n dizaines de minutes.

1. a. Quelle est la nature de la suite (c_n) ? Justifier et préciser le premier terme et la raison.

b. Vérifier qu'au bout d'une heure et demie, la concentration des bactéries en millions par mL est égale à 17,6 (valeur arrondie à 0,1).

c. Dans chaque groupe : chacun des membres propose une méthode permettant de déterminer au bout de combien de minutes la concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL.

2. Il existe de mauvaises bactéries qui peuvent nous rendre malades, mais aussi de bonnes bactéries.

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

Chercher des exemples de bonnes et de mauvaises bactéries, ainsi que des facteurs qui peuvent influer sur leur prolifération.

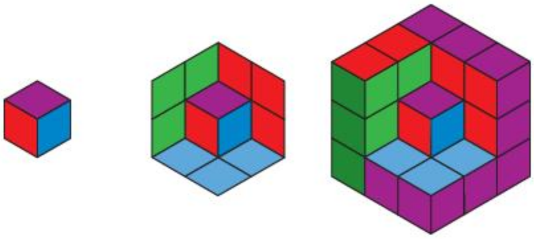
D'après Bac STL Biotechnologies Métropole, septembre 2017.

Fichier Python
Ex. 124
Manuel numérique enseignant

124 Hexagones de Vasarely

PROGRAMMATION python

Pour réaliser son tableau « *Hexagone sur fond doré* » avec un effet trois dimensions, l'artiste hongrois Victor Vasarely (1906-1997) a construit autour du « cube » central, une succession d'hexagones constitués de losanges de la manière suivante.



Hexagone 1 ou « Cube central » **Hexagone 2** **Hexagone 3**

1. a. Compter le nombre de losanges supplémentaires nécessaires pour créer un nouvel hexagone.

b. Modéliser | Créer une suite comptant le nombre de losanges supplémentaires.

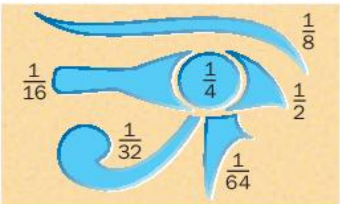
2. En supposant que le procédé précédent est répété pour réaliser une toile géante, écrire une fonction en Python qui renvoie le nombre de losanges nécessaires pour réaliser l'« hexagone 20 ».

125 Œil d'Horus

Dans la mythologie égyptienne, le dieu Seth tue son frère Osiris pour lui ravir le trône. Plus tard, c'est Horus, le fils d'Isis et Osiris, qui combat Seth pour lui reprendre le pouvoir.

Mais, lors de ce combat, Horus perd un œil fractionné en sept morceaux.

Le dieu Thot qui le protège n'en retrouvera que six morceaux qu'il assemblera comme sur le dessin ci-contre.



1. a. Calculer | À l'aide d'une suite géométrique (o_n), définie sur $\mathbb{N}^*$, de raison $\frac{1}{2}$ (dont on précisera le premier terme), calculer la somme des six parties de l'œil ainsi récupérées.

b. En déduire la fraction correspondant à la partie manquante nécessaire pour recréer l'*unité* de l'œil.

2. On définit la suite (S_n), sur $\mathbb{N}^*$, par :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. D'après la question **1**, S_n se rapproche d'une certaine valeur quand n est de plus en plus grand : laquelle ?

Info
Une somme infinie de termes strictement positifs peut tendre vers un nombre fini.

3. Faire des recherches sur les différents dieux égyptiens cités dans cette légende et trouver le nom de la déesse égyptienne des mathématiques.

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

126 Énergie solaire

Vers le BAC

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Au 1^er^ janvier 2014, une propriétaire installe 20 m^2 de panneaux photovoltaïques sur le toit de sa maison.

Pour estimer la rentabilité de cette installation (dont la durée de vie garantie est 25 ans), elle utilise la documentation suivante.

> En France, 1 m^2 de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kW·h/an.
>
> La première année, une installation produit effectivement cette quantité, et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an.
>
> La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kW·h.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014 + n$.

a. Chercher | Déterminer la quantité d'énergie produite par l'installation des panneaux en 2014, puis celle produite en 2015.

b. Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}97u_n$.

c. Quelle estimation, à la dizaine de kW·h près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2034 ?

d. À partir de quelle année l'installation aura-t-elle perdu plus de la moitié de son rendement ?

e. L'installation est-elle rentable ?

D'après Bac STI2D Nouvelle-Calédonie, novembre 2014.

Fichier logiciel
Ex. 127 et 130
Manuel numérique enseignant

127 Somme des cubes TICE Approfondissement

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On souhaite trouver une formule explicite de la somme $T_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dans la feuille de calcul ci-contre, on a calculé les sommes S_n et T_n.

	A	B	C
1	n	S_n	T_n
2	1	1	1
3	2	3	9
4	3	6	36
5	4	10	100
6	5	15	225
7	6	21	441
8	7	28	784

a. Quelle formule, à recopier vers le bas, a-t-on saisie dans la cellule B3 ?

b. Quelle formule, à recopier vers le bas, a-t-on saisie dans la cellule C3 ?

2. a. En observant les colonnes B et C du tableur, conjecturer une relation entre T_n et S_n, puis en déduire une formule explicite de T_n.

b. En supposant exacte la conjecture du **2a**, calculer T_1 et exprimer $T_{n+1} - T_n$ en fonction de n.

c. Les réponses trouvées à la question précédente sont-elles en accord avec la définition de T_n ?

128 Tours de Hanoï Approfondissement

Les Tours de Hanoï sont un jeu constitué de trois piquets et d'un lot de disques de tailles différentes percés au centre. Au départ, un lot de disque est placé sur un seul piquet. Les disques sont posés les uns sur les autres du plus grand au plus petit.

Le jeu consiste à déplacer le lot de disques sur un des deux autres piquets, en déplaçant un seul disque à la fois et en le posant sur un disque de taille plus grande ou sur un piquet vide.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note u_n le nombre minimal d'étapes pour déplacer n disques.

On appelle A, B et C les trois piquets.

1. Expliquer pourquoi on a $u_1 = 1$.

2. Pour $n \geqslant 2$, si on a réussi à déplacer les $n - 1$ disques les plus petits (en u_{n-1} étapes) du piquet A au piquet B, on déplace le plus grand disque sur le piquet C et il ne reste plus qu'à déplacer à nouveau les $n - 1$ disques les plus petits vers le piquet C.

Raisonner | Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.

3. On définit, pour tout nombre entier naturel n non nul, la suite (v_n) par $v_n = u_n + 1$.

a. Vérifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme à déterminer.

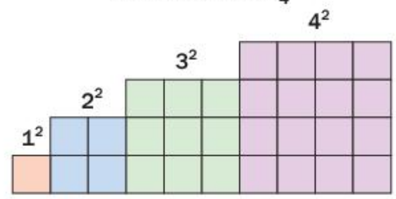
b. En déduire, pour tout nombre entier naturel n non nul, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

c. En déduire le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer un lot de huit disques.

129 Somme des carrés Approfondissement

1. On note C_n la somme des carrés des n premiers nombres entiers naturels non nuls, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Illustration de C_4



$$C_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Définir la suite (C_n) par récurrence.

2. Calculer | On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a. Calculer u_1.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

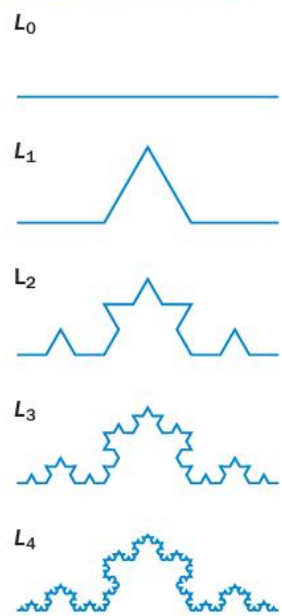
c. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2$.

d. Que peut-on en déduire sur les suites (C_n) et (u_n) ?

3. Que vaut la somme $1^2 + 2^2 + \ldots + 195^2$?

130 Courbe fractale de Von Koch (▶ ex. 6 p. 357)

On part d'un segment L_0 de longueur $f_0 = 1$ unité. On découpe L_0 en trois morceaux égaux et on remplace celui du milieu par deux segments constituant les deux côtés d'un triangle équilatéral dont on a effacé la base.



1. Calculer la longueur f_1 de la ligne brisée L_1 ainsi obtenue et comportant quatre segments.

2. On répète ce procédé sur chacun des quatre segments de L_1 pour obtenir une ligne brisée L_2 de longueur f_2.
Calculer f_2.

3. a. Raisonner | On répète le procédé précédent. Pour tout nombre entier naturel n, déterminer la relation de récurrence liant la longueur f_{n+1} de la ligne brisée L_{n+1} et la longueur f_n de la ligne brisée L_n.

b. En déduire la nature de la suite (f_n) et en déterminer le terme général.

c. Représenter | TICE À l'aide d'un tableau de valeurs de f_n, à illustrer avec un nuage de points, conjecturer la limite de f_n.

Info

La longueur de la ligne brisée tend vers l'infini, alors que le dessin fractal se maintient sur une surface finie.

Fichier logiciel
Ex. 131
Manuel numérique enseignant

SES

131 Remboursement d'un emprunt par annuités constantes Approfondissement

Un capital C_0 est emprunté à une banque à un **taux mensuel fixe** t. Ce capital est remboursé chaque mois (sur une durée de k mois) par une mensualité M constante qui se décompose en deux parts : les intérêts dus pendant le mois écoulé et la somme consacrée au remboursement du capital restant à rembourser.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- C_n le capital restant à rembourser après n mois ;
- I_n les intérêts payés à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois : $I_n = t \times C_{n-1}$ ① ;
- R_n la somme consacrée au remboursement du capital à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois : $R_n = C_{n-1} - C_n$ ②.

1. Recherche d'une formule pour calculer M

a. La mensualité constante M vérifie $M = I_n + R_n = I_{n+1} + R_{n+1}$.
À l'aide de la relation ①, en déduire que $R_{n+1} = R_n + t \times (C_{n-1} - C_n)$.

b. À l'aide de la relation ②, prouver que la suite (R_n) est géométrique de raison $(1 + t)$ et de premier terme R_1.

c. À l'issue des k mois, le capital emprunté est entièrement remboursé.
La somme de tous les remboursements est donc égale au capital C_0 : $C_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_k$.

Démontrer que $C_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_k = R_1 \times \dfrac{1-(1+t)^k}{1-(1+t)} = R_1 \times \dfrac{(1+t)^k - 1}{t}$.

d. En remarquant que $M = I_1 + R_1$, en déduire que la mensualité M est égale à $M = t \times C_0 \times \left(\dfrac{(1+t)^k}{(1+t)^k - 1}\right)$.

2. Application

Gaëlle veut emprunter 15 000 € à la banque. Un conseiller bancaire lui propose un prêt sur cinq ans au taux mensuel de 0,2 %.

a. Calculer le montant de la mensualité nécessaire au remboursement de cet emprunt.

b. Calculer le coût total de cet emprunt (montant des remboursements + capital emprunté).

c. TICE Dans une feuille de calcul réalisée sur tableur, créer le tableau des différentes mensualités pour rembourser un emprunt de 10 000 € sur une durée de k mois (k variant de 24 à 240 avec un pas de 6), et à un taux mensuel t (t variant de 0,1 à 0,5 avec un pas de 0,02).

d. Utiliser ce tableau pour retrouver le résultat de la question **2a**.

Fiche métier
Courtier·ère en prêt
hatier-clic.fr/ma1071a

Enseignement scientifique

132 Datation au carbone 14

Le carbone 14, noté ^{14}C, est un isotope radioactif de l'atome de carbone, dont l'isotope le plus fréquent est le carbone 12 (^{12}C). Un organisme contient de son vivant la même proportion de carbone 14 que son atmosphère environnante puis, à sa mort, en perd par désintégration. On appelle « période » (ou demi-vie) d'un élément radioactif le temps nécessaire pour que sa proportion diminue de moitié ; celle du carbone 14 est environ de 5 600 ans.

On peut alors se servir de la proportion de carbone 14 restant dans l'organisme pour en dater la mort. Cette datation est donc adaptée à des restes organiques très anciens, en particulier datant de la préhistoire.

Pour tout nombre entier naturel n, on note P_n la proportion de ^{14}C dans un organisme après n périodes.

1. a. Donner l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n.

b. En déduire la nature de la suite (P_n), puis l'expression de P_n en fonction de n.

2. a. Une fougère s'est fossilisée il y a environ 600 000 ans ; quelle est la proportion de ^{14}C restante ?

b. Un squelette de mammouth est retrouvé prisonnier dans la glace. Sa proportion de ^{14}C est d'environ 0,2 %. Estimer l'âge de ce mammouth.

3. Rechercher les périodes d'autres éléments radioactifs et leur utilité.

Fiche métier
Paléontologue
hatier-clic.fr/ma1071b

Recherches mathématiques

Défis

133 L'échiquier de Sissa

Un échiquier est constitué de $8 \times 8 = 64$ cases.
La légende raconte que, pour être remercié de son invention, le créateur du jeu, Sissa, lorsqu'on lui demanda ce qu'il voulait, répondit : un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier, en doublant la quantité de grains à chaque case.
On suppose qu'un grain de riz pèse 0,02 g et qu'un camion poids lourd de 40 t mesure 15 m de long.

• Si on remplit de tels camions avec le nombre de grains de riz obtenus par Sissa et qu'on met ces camions bout à bout, combien de fois cela représentera-t-il la circonférence de la Terre ?

134 Triangle de Sierpinski

- On dispose d'un triangle équilatéral bleu.
- On prend les milieux des côtés pour former un triangle que l'on supprime.
- On recommence le même processus à chacun des triangles bleus restants.

Info
Waclaw Sierpinski (1882-1969) est un mathématicien polonais, déporté pendant la Seconde Guerre mondiale, dont les travaux ont principalement porté sur la théorie des ensembles.

Fin du 1$^{\text{er}}$ processus | **Fin du 2$^{\text{e}}$ processus** | **Fin du 3$^{\text{e}}$ processus**

a. Combien de triangles ont été supprimés à la fin du 20$^{\text{e}}$ processus ?
b. Quelle est la part d'aire bleue restante à la fin du 20$^{\text{e}}$ processus ?

135 Recherche d'une formule explicite

La suite (v_n) est définie par :
$$v_0 = 0 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + 2n + 2.$$
On définit la suite (w_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_{n+1} - v_n.$$

1. Déterminer le terme général de la suite (w_n) et en déduire sa nature.

2. On pose, pour tout nombre entier naturel n :
$$S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n.$$
a. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = (n+1)(n+2).$$
b. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = v_{n+1} - v_0.$$
c. En déduire une formule explicite de v_n.

Questions ouvertes

136 Arithmétique et géométrique

• Quelles sont les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques ?

137

La suite (k_n) est définie par $k_1 = 2^{2020}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k_{n+1} = 0{,}5k_n$.
• Combien vaut k_{2018} ?

D'après Concours Kangourou, 2018.

138 Pair ou impair

La suite (t_n) est définie par $t_0 = 4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = n - t_n$.
Quelle est la nature de la suite des termes :
a. d'indice pair ?
b. d'indice impair ?

CHAPITRE 3

Second degré

Les paraboles, courbes représentatives des fonctions polynômes du second degré, sont présentes un peu partout autour de nous : en architecture, en mécanique, dans la nature, etc. Elles peuvent par exemple modéliser les trajectoires de ces projections volcaniques.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Étudier une fonction polynôme du second degré

- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 21 à 25
- Les incontournables 37 à 40
- Entraînement 51 à 73

OBJECTIF 2

Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

- Activités 2 et 3
- Cours 2
- Savoir-faire 2 et 3
- Quiz 26 à 29
- Les incontournables 41 à 44
- Entraînement 74 à 102

OBJECTIF 3

Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 4 et 5
- Quiz 30 et 31
- Les incontournables 45 à 50
- Entraînement 103 à 126

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases à partir des mots suivants.

fonction carré — SENS DE VARIATION — factoriser
représentation graphique — PROPRIÉTÉ — solution
développer — expression — ÉQUATION

Rappels

Utilisation des identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

Développement

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Factorisation

Exemples

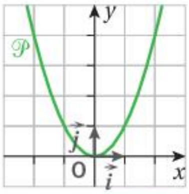
- $(2x+3)^2$ est de la forme $(a+b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$.
$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- $(x-5)^2$ est de la forme $(a-b)^2$ avec $a = x$ et $b = 5$.
$(x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
- $(x+2)^2 - 16$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x+2$ et $b = 4$.
$(x+2)^2 - 16 = [(x+2) - 4] \times [(x+2) + 4] = (x-2) \times (x+6)$

Fonction carré

- La **fonction carré** est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe son carré x^2.
- La fonction carré est paire. Son **tableau de variations** et son **tableau de signes** sont :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $x \mapsto x^2$		$+$	0	$+$	



- Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**. Cette parabole admet un **axe de symétrie**, l'axe des ordonnées, et un **sommet**, l'origine du repère.

Exemples

- Comparons $(1+\sqrt{5})^2$ et $(1+\sqrt{7})^2$.
On a $0 \leqslant 1+\sqrt{5} \leqslant 1+\sqrt{7}$. Or la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $(1+\sqrt{5})^2 \leqslant (1+\sqrt{7})^2$.

- Comparons $(1-\sqrt{5})^2$ et $(1-\sqrt{7})^2$.
On a $1-\sqrt{7} \leqslant 1-\sqrt{5} \leqslant 0$. Or la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ donc $(1-\sqrt{7})^2 \geqslant (1-\sqrt{5})^2$.

Signe d'une fonction affine

Pour dresser le **tableau de signes** d'une fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$:

- on détermine la valeur de x pour laquelle f s'annule ;
- on détermine le sens de variation de f à l'aide du signe de a pour placer les signes dans le tableau.

Exemple

Déterminons le signe, selon les valeurs de x, de la fonction affine $f : x \mapsto 4x - 7$, définie sur $\mathbb{R}$.
On détermine l'antécédent de 0 par f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

De plus, $a = 4$ donc $a > 0$; ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$1{,}75$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Utilisation des identités remarquables

1 Développer les expressions.

a. $(x+7)^2$ **b.** $(4x-5)^2$
c. $(2-x)^2$ **d.** $(x+8)(x-8)$
e. $(3x+7)^2$ **f.** $(2x-11)(2x+11)$

2 Recopier et compléter les pointillés dans les égalités.

a. $x^2 - \ldots x + 9 = (x - \ldots)^2$
b. $4x^2 + \ldots x + 49 = (\ldots + 7)^2$
c. $\ldots x^2 - \ldots x + 16 = (5x - \ldots)^2$
d. $x^2 - \ldots x + 64 = (x - \ldots)^2$
e. $16x^2 - \ldots = (\ldots x - 7)(\ldots x + 7)$

3 Factoriser les expressions.

a. $x^2 - 8x + 16$
b. $(2x+3)^2 - (2x+9)^2$
c. $(3x-7)^2 - 16(x+3)^2$
d. $x^2(x+4) - 9(x+4)$
e. $(9x^2 - 12x + 4) - (3x-2)(2x+15)$

4 Calculer astucieusement.

a. 28^2 **b.** 39^2 **c.** 41^2
d. 72^2 **e.** 17×23 **f.** 25×35

Fonction carré

5 Comparer sans calculatrice.

a. $\left(2+\sqrt{6}\right)^2$ et $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$.
b. $\left(-2+\sqrt{2}\right)^2$ et $\left(-2+\sqrt{3}\right)^2$.
c. $\left(-2-\sqrt{2}\right)^2$ et $\left(-2-\sqrt{3}\right)^2$.

6 Soit $A = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $B = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

a. Calculer A^2 et B^2.
b. En déduire que $A = B$.

Info
$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B$.

7 LOGIQUE x désigne un nombre réel.

1. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. « Si $x \geqslant 4$ alors $x^2 \geqslant 16$. »
b. « Si $x \leqslant 2$ alors $x^2 \leqslant 4$. »
c. « Si $x \leqslant -1$ alors $x^2 \geqslant 1$. »
d. « Si $x = 0{,}5$ alors $x^2 = 0{,}25$. »

2. Pour chacune des propositions ci-dessus, énoncer sa réciproque (▶ Rabat V, Logique), puis indiquer si elle est vraie ou fausse.

Signe d'une fonction affine

8 Déterminer le signe, selon les valeurs de x, des fonctions affines suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \mapsto 4x - 7$ **b.** $g : x \mapsto -2x + 3$
c. $h : x \mapsto -5x - 2$ **d.** $k : x \mapsto 3x + 5$
e. $p : x \mapsto 8 - 3x$ **f.** $q : x \mapsto 3 - 9x$

9 Dresser, selon les valeurs de x, le tableau de signes des fonctions affines suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a. f telle que $f(-2) = 0$ et $f(3) = 4$.
b. g telle que $g(2) = 3$ et $g(5) = 0$.
c. h telle que $h(-5) = 0$ et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
d. k telle que $k(0) = 0$ et k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

10 g est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x - 8$.

a. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
b. Donner sans calcul le signe de $g(1{,}625)$.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.

11 f et g sont les fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -4x - 16$.

a. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère.
Conjecturer à l'aide de la calculatrice les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
b. Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. Préciser alors sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Corrigés p. 368

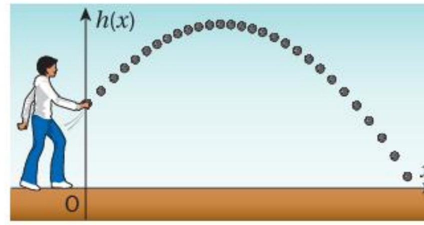
Fichier logiciel
Activités 1 et 2
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Étudier une fonction polynôme du second degré

1 Pétanque et fonction polynôme du second degré TICE

On s'intéresse à la trajectoire d'une boule de pétanque lancée par un joueur. Le tableau ci-dessous présente les relevés obtenus par chronophotographie*.

x désigne l'abscisse de la boule (en m) à partir du moment où la boule quitte la main du lanceur (d'abscisse 0). $h(x)$ désigne la hauteur (en m) atteinte par la boule à l'abscisse x.



* La **chronophotographie** permet d'étudier le mouvement d'un objet à partir d'une image dans laquelle ses positions successives (à intervalles de temps égaux) sont superposées.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(x)$	1,39	1,61	1,75	1,81	1,80	1,70	1,52	1,26	0,92	0,50	0,01

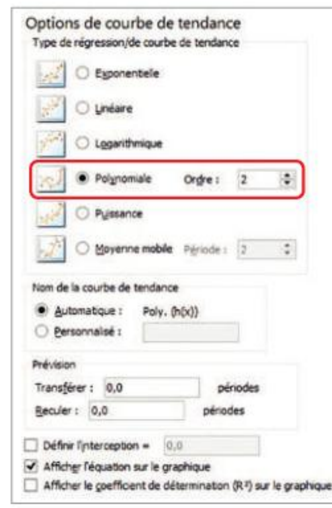
1. Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant à ces relevés.

2. On souhaite obtenir une courbe passant au plus près des points du nuage afin de modéliser la trajectoire de la boule par une fonction.
Tester les différents types de courbes de tendance proposées par le tableur, choisir celle qui vous semble la plus pertinente et l'afficher.

3. Pour modéliser la trajectoire de la boule, on choisit la courbe polynomiale d'ordre 2.

a. Afficher une équation associée à cette courbe sur le graphique.

b. D'après ce modèle (arrondir les coefficients au centième si besoin), quelle est la hauteur de la boule lorsque $x = 3{,}25$ m ?



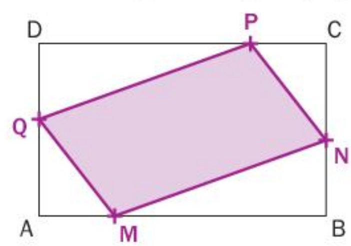
OBJECTIF 2
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

2 Un problème d'aire TICE

Différenciation
Version guidée question 1
Manuel numérique enseignant

On considère un rectangle ABCD avec AB = 5 cm et BC = 3 cm. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.
On se pose la **question** suivante :

> Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du quadrilatère MNPQ est égale à 9 cm^2 ?



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer une réponse à cette question.

2. On note x = AM.

a. Exprimer l'aire des triangles AMQ, BNM, CPN et DQP en fonction de x.

b. En déduire l'aire du quadrilatère MNPQ en fonction de x.

c. Montrer que la question posée revient à résoudre l'équation $2x^2 - 8x + 6 = 0$ dans l'intervalle $[0 ; 3]$.

d. Compléter l'égalité suivante : $2x^2 - 8x + 6 = 2 \times [(x - \ldots)^2 - \ldots]$, puis factoriser le membre de droite de cette égalité à l'aide d'une identité remarquable.

e. Valider ou infirmer la conjecture de la question **1**.

3. Reprendre les questions **1** et **2** en remplaçant 9 cm^2 par 7 cm^2, puis par 5 cm^2, dans la question posée initialement.

OBJECTIF 2
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

Doc +
Activité : variations d'une fonction polynôme du second degré
Manuel numérique enseignant

3 Un problème historique

Au début du IX^e siècle, le calife Al-Mamum réunit à Bagdad les principaux scientifiques perses de l'époque. À sa demande, Al-Khwarizmi (780-850) a rédigé un traité sur la résolution de problèmes de la vie courante. Il y introduit un nouvel outil, les équations, dont il propose des résolutions algorithmiques.

Dans son traité, Al-Khwarizmi propose de résoudre une équation énoncée ainsi :

Un mal et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams.

Traduit en langage actuel, cet énoncé devient :

« Trouver un nombre tel que son carré ajouté à dix fois lui-même vaille 39. »

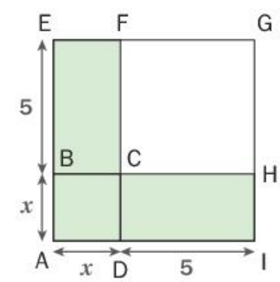
1. Si x désigne la « racine » et x^2 le « mal », quelle est l'équation proposée par Al-Khwarizmi ?

2. Pour déterminer une solution, Al-Khwarizmi énonce le procédé ci-dessous.

Prends la moitié du nombre de racines, cela fera 5.
Tu la multiplies par lui-même, cela fera 25.
Additionne-les à 39, cela fera 64.
Tu prends la racine qui est huit, dont tu retranches la moitié des racines qui est 5.
Il restera 3 qui est la racine du carré que tu cherches.

Vérifier que le nombre réel qu'il obtient est bien solution de l'équation.

3. Pour justifier ce procédé, Al-Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté x d'un carré ABCD tel que, si on lui juxtapose deux rectangles BEFC et DCHI de côtés x et 5, on obtienne un polygone AEFCHI d'aire égale à 39.



a. Exprimer l'aire du polygone AEFCHI en fonction de x.

b. En exprimant de deux manières l'aire du carré AEGI en fonction de x, vérifier que pour tout nombre réel x positif, $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

c. Montrer que l'équation proposée par Al-Khwarizmi est équivalente à $(x + 5)^2 - 64 = 0$.

d. En factorisant à l'aide d'une identité remarquable, résoudre cette équation et retrouver la solution déterminée par Al-Khwarizmi.

e. Quel est le nombre de solutions obtenues ? Expliquer.

4. Résoudre l'équation $x^2 + 8x = 20$ à la façon d'Al-Khwarizmi.

OBJECTIF 3
Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

4 Une histoire de signe — En groupe

On considère les fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par :

$p_1(x) = 2x^2 + 5x - 3$ $\quad$ $p_2(x) = (1 - x)(4x + 3)$ $\quad$ $p_3(x) = 3(x - 1)^2 + 7$

$p_4(x) = -4x^2 + 40x - 100$ $\quad$ $p_5(x) = -x^2 - 3$ $\quad$ $p_6(x) = x^2 - 4x + 4$

$p_7(x) = -3x^2 - 6x + 5$ $\quad$ $p_8(x) = -x^2 + 5x - 10$ $\quad$ $p_9(x) = -(2x + 1)^2$

$p_{10}(x) = (x - 1)(x - 4)$ $\quad$ $p_{11}(x) = x^2 + x + 4$ $\quad$ $p_{12}(x) = 4(x + 1)^2$

1. Pour chaque fonction, préciser, en justifiant :
– ses variations ;
– le nombre de fois que sa courbe représentative, dans un repère orthogonal, coupe l'axe des abscisses.

2. Conjecturer une propriété permettant de déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré.

Maths à l'oral
Chaque groupe présentera sa conjecture en illustrant chaque cas avec une courbe représentative.

Cours

OBJECTIF 1 Étudier une fonction polynôme du second degré

Savoir-faire 1 p. 81

Définition Une fonction f est appelée **fonction polynôme du second degré** lorsqu'il existe trois nombres réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout nombre réel x, on puisse écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$. Cette forme est la **forme développée** de f.

Exemple
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 11$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 4 \neq 0$, $b = -8$ et $c = 11$.

On pourra noter : $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

La fonction carré $x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, est une fonction polynôme du second degré avec les coefficients $a = 1 \neq 0$, $b = 0$ et $c = 0$.

Dans la suite, a, b et c désignent des nombres réels avec $a \neq 0$.

Propriété Si une fonction polynôme du second degré f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.
Cette forme est la **forme canonique** de f.

Démonstration à compléter : exercice 127 p. 97

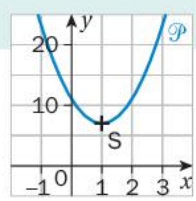
On remarque que $f(\alpha) = \beta$.

Exemple
En reprenant la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 11$,
on a $\alpha = -\dfrac{-8}{2 \times 4} = 1$ et $\beta = -\dfrac{(-8)^2 - 4 \times 4 \times 11}{4 \times 4} = \dfrac{112}{16} = 7$.
La forme canonique de f est ainsi $f(x) = 4 \times (x - 1)^2 + 7 = 4(x - 1)^2 + 7$.

On peut aussi calculer β à partir de la forme développée :
$$\begin{aligned} f(\alpha) = f(1) &= 4 \times 1^2 - 8 \times 1 + 11 \\ &= 4 - 8 + 11 \\ &= 7 = \beta. \end{aligned}$$

Définition Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Exemple
La parabole $\mathscr{P}$ ci-contre représente la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 11$.



Le **sommet** S **de la parabole** représentant f a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 7$.
▶ Chapitre 9, p. 256

Propriété f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Les variations de f dépendent du signe de a.

- Si $a > 0$, alors le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↘	$f(\alpha) = \beta$	↗

f admet un **minimum en $x = \alpha$**, qui vaut β.

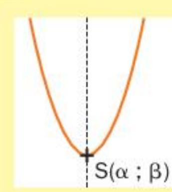
- Si $a < 0$, alors le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↗	$f(\alpha) = \beta$	↘

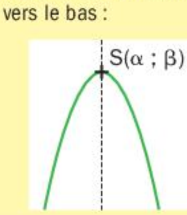
f admet un **maximum en $x = \alpha$**, qui vaut β.

Démonstration : exercice 128 p. 97

Lorsque $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut :



Lorsque $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas :



D'après l'**exemple** ci-dessus, la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 11$ admet pour forme canonique $f(x) = 4(x - 1)^2 + 7$.
Puisque $a = 4$ est positif, $\alpha = 1$ et $\beta = 7$, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	↘	7	↗

OBJECTIF 2 Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

Savoir-faire 2 et 3 p. 82-83

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Définitions

- On appelle **racine de f** tout nombre réel λ vérifiant $f(\lambda) = 0$.
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x est appelée **équation du second degré**.

Exemple La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$.
On remarque que $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 - 2 = 0$. Ainsi, 1 est une racine évidente de f.

Une **racine** de f, lorsqu'elle existe, est une **solution** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Définition

Le nombre réel $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ est appelé **discriminant** de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Il est noté Δ, qui est la lettre « delta » majuscule en grec.

Le signe de Δ permet de distinguer, ou discriminer, les différents cas possibles.

Dans la suite, on note Δ le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet **deux solutions distinctes** dans $\mathbb{R}$:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet **une unique solution** dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet **pas de solution** dans $\mathbb{R}$.

Démonstration rédigée p. 96

Lorsque $\Delta = 0$, la solution est appelée **solution double**.

Lorsque $\Delta < 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \varnothing$.

Exemple Le discriminant de l'équation du second degré $2x^2 + x - 28 = 0$ vaut
$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-28) = 225$. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles :
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{225}}{2\times 2} = \frac{-1-15}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{225}}{2\times 2} = \frac{-1+15}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5.$$
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathcal{S} = \{-4\ ;\ 3{,}5\}$.

Propriété Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux solutions réelles de l'équation, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{ax^2 + bx + c = a \times (x - x_1) \times (x - x_2)}.$$
- Si $\Delta = 0$, en notant x_0 la solution réelle double de l'équation, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{ax^2 + bx + c = a \times (x - x_0)^2}.$$

Démonstration : exercice 129 p. 97

Avec l'**exemple** précédent, on a, pour tout nombre réel x, $2x^2 + x - 28 = 2(x + 4)(x - 3{,}5)$.

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, on obtient ainsi une **forme factorisée** de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété Somme et produit de racines

Dans le cas où $\Delta > 0$, x_1 et x_2 étant les deux racines de f :

- la somme des racines est égale à $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;
- le produit des racines est égal à $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration : exercice 131 p. 97

On obtient ainsi :
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$= a(x^2 - sx + p)$.

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$ admet pour racine évidente $x_1 = 1$.
On a $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{3}$. Or $x_1 = 1$, donc la seconde racine est $x_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Propriété Approfondissement

Deux nombres réels ont pour somme s et pour produit p si, et seulement si, ils sont racines de la fonction polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - sx + p$.

Démonstration : exercice 132 p. 97

Cela permet de trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Savoir-faire 3 p. 83

OBJECTIF 3 Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

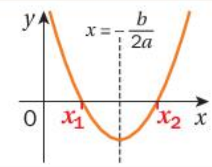
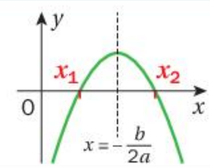
Savoir-faire 4 et 5 p. 84-85

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On note Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété

Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ telles que $x_1 < x_2$, alors :

- si $x = x_1$ ou $x = x_2$ alors $f(x) = 0$;
- si $x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$ alors $f(x)$ est du signe de a ;
- si $x \in]x_1 ; x_2[$ alors $f(x)$ est de signe opposé à celui de a.

	Si $a > 0$	**Si $a < 0$**
Représentation graphique de f		
Tableau de signes de $f(x)$	x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$	x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Démonstration : exercice 130 a p. 97

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + x - 28$ est une fonction polynôme du second degré.
L'équation $2x^2 + x - 28 = 0$ admet pour solutions $x_1 = -4$ et $x_2 = 3{,}5$ (▶ page précédente).
Puisque $a = 2$ est positif, on obtient le tableau de signes suivant :

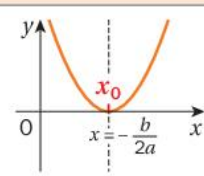
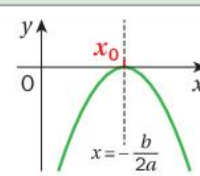
x	$-\infty$		-4		$3{,}5$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	

Lorsque $\Delta \geqslant 0$, le tableau de signes de $f(x)$ s'obtient à l'aide de la forme factorisée de f.

Propriété

Si $\Delta = 0$, en notant x_0 la solution double de $ax^2 + bx + c = 0$, alors :

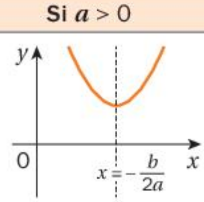
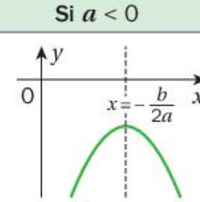
- si $x = x_0$ alors $f(x) = 0$;
- si $x \neq x_0$ alors $f(x)$ est du signe de a.

	Si $a > 0$	**Si $a < 0$**
Représentation graphique de f		
Tableau de signes de $f(x)$	x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: $+$ 0 $+$	x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: $-$ 0 $-$

Démonstration : exercice 130 b p. 97

Propriété

Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a pour tout nombre réel x.

	Si $a > 0$	**Si $a < 0$**
Représentation graphique de f		
Tableau de signes de $f(x)$	x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: $+$	x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: $-$

Démonstration : exercice 130 c p. 97

1 Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

OBJECTIF 1
Étudier une fonction polynôme du second degré

Écrire chaque fonction polynôme du second degré sous forme canonique.
En déduire le tableau de variations correspondant à chaque fonction.

a. $f : x \mapsto 2x^2 + 8x - 1$ **b.** $g : x \mapsto -x^2 + 2x + 2$

Solution

a. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) = 2\left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left(x^2 + 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left[(x+2)^2 - 4 - \frac{1}{2}\right]$$
$$= 2\left[(x+2)^2 - \frac{9}{2}\right]$$
$$= 2(x+2)^2 - 9.$$

On fait apparaître la forme développée d'une identité remarquable.

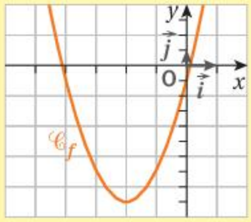
La forme canonique de f est ainsi $\boxed{f(x) = 2 \times (x - (-2))^2 - 9.}$

Le coefficient de x^2 vaut $a = 2$, qui est strictement positif : la fonction f admet alors un minimum en $\alpha = -2$ et ce minimum vaut $\beta = -9$.

Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variations de f	↘	-9	↗

$a = 2$ étant positif, la parabole représentant f est tournée vers le haut :



b. La fonction g est une fonction polynôme du second degré de forme développée $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 2$.

Donc, pour tout nombre réel x, $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = 1$

et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{2^2 - 4 \times (-1) \times 2}{4 \times (-1)} = -\dfrac{12}{-4} = 3.$

Ici, on applique la propriété du cours pour déterminer α et β à l'aide de a, b et c.

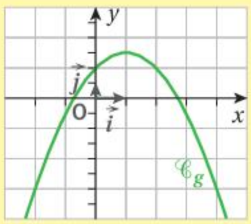
On peut aussi calculer β en calculant $g(\alpha)$ avec l'expression développée de g : $g(1) = -1^2 + 2 \times 1 + 2 = 3$.

La forme canonique de g est ainsi $\boxed{g(x) = -1 \times (x - 1)^2 + 3.}$

Comme $a = -1$ est négatif, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, le tableau de variations de g est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de g	↗	3	↘

$a = -1$ étant négatif, la parabole représentant g est tournée vers le bas :



Application

12 Écrire chaque fonction polynôme du second degré sous forme canonique.
En déduire le tableau de variations correspondant à chaque fonction.

a. $f : x \mapsto x^2 - 8x + 9$ **b.** $g : x \mapsto -2x^2 + 6x + 1$ **c.** $h : x \mapsto 16x^2 - 1$

Les incontournables 37 à 40 p. 89

Vidéo
Résoudre une équation du second degré
hatier-clic.fr/ma1082

OBJECTIF 2
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

2 Résoudre une équation du second degré

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $x^2 - 4x + 1 = 0$ **b.** $-x^2 + 2x - 6 = 0$ **c.** $2x^2 - 10x + \dfrac{25}{2} = 0$

2. En déduire une forme factorisée des expressions suivantes.

a. $x^2 - 4x + 1$ **b.** $2x^2 - 10x + \dfrac{25}{2}$

Solution

1. a. L'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{2 - \sqrt{3}\ ;\ 2 + \sqrt{3}\right\}.}$

On reconnaît une équation du second degré.

b. On reconnaît ici encore une équation du second degré avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = -6$. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 4 - 24 = -20.$$

Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathcal{S} = \varnothing.}$

c. On reconnaît ici encore une équation du second degré avec $a = 2$, $b = -10$ et $c = \dfrac{25}{2}$. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2 \times \frac{25}{2} = 100 - 100 = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une solution réelle double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2 \times 2} = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}.}$

On peut aussi repérer une identité remarquable :

$$2x^2 - 10x + \frac{25}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

2. a. D'après le **1a**, l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ a pour solutions $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{x^2 - 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}).}$$

Si $\Delta \geqslant 0$, on peut factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$ sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont ses racines (éventuellement égales).

b. D'après le **1c**, l'équation $2x^2 - 10x + \dfrac{25}{2} = 0$ a une solution double égale à $\dfrac{5}{2}$.
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{2x^2 - 10x + \frac{25}{2} = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2.}$$

Application

13 **1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $-x^2 + x + 6 = 0$ **b.** $-3x^2 + 8x - \dfrac{16}{3} = 0$

2. En déduire une forme factorisée des expressions suivantes.

a. $-x^2 + x + 6$ **b.** $-3x^2 + 8x - \dfrac{16}{3}$

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $2x^2 - 5x + 7 = 0$ **b.** $-5x^2 - x + 7 = 0$
c. $x^2 + 3x - 5 = 0$ **d.** $-25x^2 + 10x - 1 = 0$

15 Déterminer une forme factorisée des expressions suivantes.

a. $3x^2 + 5x - 2$ **b.** $9x^2 - 2x + \dfrac{1}{9}$

Les incontournables 41 à 43 p. 89

3 Utiliser l'expression de la somme et du produit des racines

OBJECTIF 2
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

1. Factoriser les fonctions polynômes du second degré suivantes sans calculer leur discriminant.

a. $f : x \mapsto x^2 - 6x + 8$ **b.** $g : x \mapsto 3x^2 - 15x - 18$

2. Approfondissement Trouver deux nombres réels ayant pour somme 25 et pour produit 144.

Solution

1. a. On remarque que $f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$.
Ainsi, 2 est une racine évidente de f. On note $x_1 = 2$.

Le produit des racines vaut $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Ici, on a $x_1 = 2$, $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$.

En remplaçant, on obtient $2 \times x_2 = \dfrac{8}{1}$, d'où $x_2 = \dfrac{8}{2} = 4$.

Ainsi, la fonction f admet deux racines : 2 et 4.
On en conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = 1 \times (x - 2)(x - 4) = (x - 2)(x - 4).}$$

b. On remarque que $g(-1) = 3 \times (-1)^2 - 15 \times (-1) - 18 = 3 + 15 - 18 = 0$.
Ainsi, -1 est une racine évidente de g. On note $x_1 = -1$.

La somme des racines vaut $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Ici, on a $x_1 = -1$, $a = 3$, $b = -15$ et $c = -18$.

En remplaçant, on obtient $-1 + x_2 = -\dfrac{-15}{3}$, d'où $x_2 = 5 + 1 = 6$.

Donc la fonction g admet deux racines : -1 et 6.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{g(x) = 3 \times (x - (-1))(x - 6) = 3(x + 1)(x - 6).}$$

2. On cherche deux nombres réels x_1 et x_2 dont la somme s vaut 25 et le produit p vaut 144.
x_1 et x_2 sont donc les solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$, c'est-à-dire $x^2 - 25x + 144 = 0$.
On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4 \times 1 \times 144 = 49.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{25 - 7}{2} = 9$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{25 + 7}{2} = 16.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{9 ; 16\}$.

$\boxed{\text{Les nombres réels cherchés sont 9 et 16.}}$

On cherche s'il existe une racine évidente en commençant à tester avec $-2, -1, 0, 1, 2$. 2 est une racine donc $\Delta \geqslant 0$.

Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation, une forme factorisée de $ax^2 + bx + c$ est :
$a(x - x_1)(x - x_2)$.

Attention, ici $a = 3$.

On applique la propriété du cours (▶ p. 79).

Ici $a = 1$, $b = -25$ et $c = 144$.

On vérifie :
$9 + 16 = 25$
et $9 \times 16 = 144$.

Application

16 Factoriser les fonctions polynômes du second degré suivantes sans calculer leur discriminant.

a. $f : x \mapsto x^2 - 6x - 7$

b. $g : x \mapsto x^2 - 5x - 6$

c. $h : x \mapsto 10x^2 + 5x - 18$

17 Approfondissement Trouver deux nombres réels ayant pour somme 6 et pour produit 1.

18 Approfondissement Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 34 cm et d'aire 60 cm^2 ?

Les incontournables 44 p. 89

4 Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

OBJECTIF 3
Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

1. Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur ℝ par les expressions suivantes.

a. $f(x) = -2x^2 - x + 10$ **b.** $g(x) = 4x^2 - 3x + 3$

2. En déduire l'ensemble des solutions dans ℝ des inéquations suivantes.

a. $f(x) \geqslant 0$ **b.** $g(x) < 0$

Solution

1. a. On résout l'équation $-2x^2 - x + 10 = 0$ pour déterminer les éventuelles racines de f. Le discriminant de l'équation vaut :

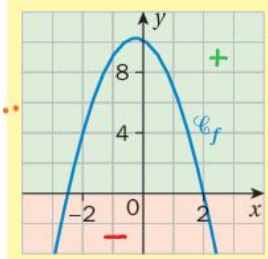
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 10 = 81.$$

Δ est positif, donc f a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \times (-2)} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \times (-2)} = -\frac{5}{2} = -2{,}5.$$

On a donc, pour tout nombre réel x, $f(x) = -2(x - 2)(x + 2{,}5)$.
On en déduit le tableau de signes de $f(x)$, sachant que le coefficient de x^2 de f vaut $a = -2$, qui est négatif.

Comme $a < 0$, la parabole représentant f est tournée vers le bas :



x	$-\infty$		$-2{,}5$		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

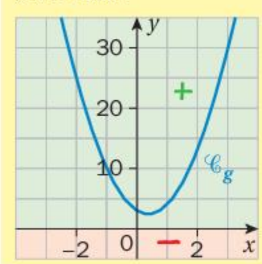
Les zéros en deuxième ligne du tableau siginifient que $f(-2{,}5) = 0$ et $f(2) = 0$.

b. On résout l'équation $4x^2 - 3x + 3 = 0$ pour déterminer les éventuelles racines de g. Le discriminant de l'équation vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -39.$$

Δ est négatif, donc g n'admet pas de racine réelle.
On en déduit le tableau de signes de $g(x)$, sachant que le coefficient de x^2 de g vaut $a = 4$, qui est positif.

Comme $a > 0$, la parabole représentant g est tournée vers le haut :



x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	

2. a. Par lecture du tableau de signes, $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si x est compris entre $-2{,}5$ et 2 inclus.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{\mathscr{S} = [-2{,}5\ ;\ 2]}$.

b. Les solutions de l'inéquation $g(x) < 0$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée strictement inférieure à zéro ; ceci correspond aux signes « – » dans la deuxième ligne du tableau de signes. Comme il n'y en a aucun, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$.

Application

19 **1.** Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur ℝ par les expressions suivantes.

a. $f(x) = -3x^2 - 6x + 21$ **b.** $g(x) = 2x^2 + 2x + 5$

2. En déduire l'ensemble des solutions dans ℝ des inéquations suivantes.

a. $f(x) < 0$ **b.** $g(x) \geqslant 0$

Les incontournables 45 à 48 p. 89

Vidéo
Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré
hatier-clic.fr/ma1085

OBJECTIF 3
Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

5 Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t + 2)(3 - t)$.

1. Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.

2. Déterminer la forme canonique de f.

3. En utilisant la forme la plus adaptée de f, déterminer :

a. l'image de 0 par f ;
b. le tableau de variations de f ;
c. le(s) antécédent(s) de 6 par f ;
d. l'ensemble des solutions de $f(t) > 0$.

Solution

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (2t + 2)(3 - t)$
$= 6t - 2t^2 + 6 - 2t = -2t^2 + 4t + 6$.

Ainsi $f(t) = at^2 + bt + c$ avec $a = -2 \neq 0$, $b = 4$ et $c = 6$.
f est donc une fonction polynôme du second degré.

On obtient ici la forme développée de f.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = -2(t^2 - 2t - 3)$
$= -2(t^2 - 2t + 1 - 1 - 3)$
$= -2[(t - 1)^2 - 4]$
$= -2(t - 1)^2 + 8$.

La forme canonique de f est ainsi $\boxed{f(t) = -2(t - 1)^2 + 8}$.

On détermine la forme canonique de f.
▶ Savoir-faire 1 p. 81

3. a. Pour calculer $f(0)$, on utilise la forme développée :
$$\boxed{f(0) = -2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 6 = 6.}$$

b. La forme canonique de f est $f(t) = -2(t - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 8$.
Comme $a < 0$, la fonction f admet un maximum en $\alpha = 1$ et ce maximum vaut $\beta = 8$. Le tableau de variations de f est :

t	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	↗	8	↘

c. Pour déterminer les antécédents de 6, on résout l'équation $f(t) = 6$ en utilisant la forme développée :
$f(t) = 6 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t + 6 = 6 \Leftrightarrow -2t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 2t(-t + 2) = 0$
$\Leftrightarrow 2t = 0$ ou $-t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 2$.
Les antécédents de 6 par f sont 0 et 2.

On se ramène à une équation produit nul grâce à une factorisation.

d. On utilise la forme factorisée :
$f(t) = 0 \Leftrightarrow (2t + 2)(3 - t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 2 = 0$ ou $3 - t = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 3$.
Comme $a < 0$, le tableau de signes de $f(t)$ est :

t	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour résoudre $f(t) > 0$, on détermine le tableau de signes de $f(t)$.

Donc l'ensemble des solutions de $f(t) > 0$ est $\boxed{\mathcal{S} =]-1\ ;\ 3[}$.

Application

20 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x + 5)^2 - 16$.

1. Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.

2. Déterminer la forme factorisée de f.

3. En utilisant la forme la plus adaptée de f, déterminer :

a. l'image de 0 par f ;
b. l'éventuel extremum de la fonction f ;
c. le tableau de variations de f ;
d. le(s) antécédent(s) de 0 par f.

Les incontournables 49 et 50 p. 89

RETENIR L'ESSENTIEL…

Fiche de cours

Fonction polynôme du second degré

Forme développée :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$

$a \in \mathbb{R}^*$ $\quad b \in \mathbb{R}$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Forme canonique :

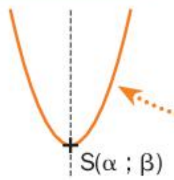
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad \beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$f(\alpha) = \beta$	$\nearrow$

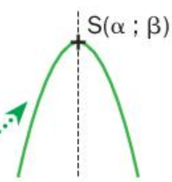
Minimum de f



$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$f(\alpha) = \beta$	$\searrow$

Maximum de f



Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative de f est une **parabole** de sommet S :
– tournée **vers le haut** ;
– tournée **vers le bas**.

▶ **Cours 1** p. 78

Équation du second degré

Les **solutions dans** $\mathbb{R}$ **de l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) correspondent aux **racines** de f.

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée	Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a \times (x - x_1) \times (x - x_2)$	Si $a > 0$: x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: + 0 – 0 + On suppose $x_1 < x_2$ Si $a < 0$: x : $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $f(x)$: – 0 + 0 –
$\Delta = 0$	$x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a \times (x - x_0)^2$	Si $a > 0$: x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: + 0 + Si $a < 0$: x : $-\infty$, x_0, $+\infty$; $f(x)$: – 0 –
$\Delta < 0$	*Aucune*		Si $a > 0$: x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: + Si $a < 0$: x : $-\infty$, $+\infty$; $f(x)$: –

Lorsque $\Delta > 0$: – la **somme** des racines de f est $s = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

– le **produit** des racines de f est $p = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

▶ **Cours 2 et 3** p. 79-80

… ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
21 Dans la forme canonique $p_1(x) = 4(x+3)^2 + 1$ de la fonction polynôme p_1 du second degré définie sur $\mathbb{R}$, on a :	$\alpha = -3$ et $\beta = -1$.	$\alpha = -3$ et $\beta = 1$.	$\alpha = 3$ et $\beta = -1$.	$\alpha = 3$ et $\beta = 1$.
22 La fonction p_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $p_2(x) = 2x^2 + 12x + 25$ est une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est :	$2(x-3)^2 - 43$	$2(x-3)^2 + 7$	$2(x+3)^2 + 7$	$-2(x+3)^2 + 79$
23 $4(x-3)^2 + 3$ est la forme canonique de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :	$h(x) = 4x^2 - 12x - 33$	$h(x) = 4x^2 - 24x - 33$	$h(x) = 4x^2 - 24x + 39$	$h(x) = 4x^2 - 12x + 39$
24 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 9x + 4$. On peut dire que g est :	strictement décroissante, puis strictement croissante.	strictement croissante, puis strictement décroissante.	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
25 Ce tableau de variations peut être associé à la fonction : $\begin{array}{c\|ccccc} x & -4 & & -1 & & 3 \\ \hline \text{Variations de } f & -27 & \nearrow & 9 & \searrow & -55 \end{array}$	$f : x \mapsto -4(x-9)^2 - 1$	$f : x \mapsto 4(x+1)^2 + 9$	$f : x \mapsto -4(x+1)^2 + 9$	$f : x \mapsto -3(x+1)^2 + 9$
26 La fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ a :	une racine égale à 2.	une racine égale à –1.	des racines dont le produit est égal à 6.	des racines dont la somme est égale à $\frac{7}{2}$.
27 Le discriminant de l'équation du second degré $-3x + 2 + 7x^2 = 0$ vaut :	47	65	–47	–65
28 L'équation du second degré $2x^2 + 17x + 21 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:	aucune solution.	une unique solution : $-\frac{17}{4}$.	deux solutions : –7 et –1,5.	deux solutions : –14 et –3.
29 L'équation du second degré $9x^2 - 42x + 49 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:	aucune solution.	une unique solution : $\frac{7}{3}$.	une unique solution : $-\frac{7}{3}$.	deux solutions : $\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{6}$.
30 Le tableau de signes suivant peut être associé à la fonction : $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline \text{Signe} & & + & 0 & + & \end{array}$	$x \mapsto -4x^2 + 4x - 1$	$x \mapsto 4x^2 - 4x + 1$	$x \mapsto -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$	$x \mapsto 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
31 Le tableau de signes suivant peut être associé à la fonction : $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe} & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	$x \mapsto (x+1)(2-x)$	$x \mapsto x^2 - x - 2$	$x \mapsto -x^2 + x + 2$	$x \mapsto x^2 - 3x + 2$

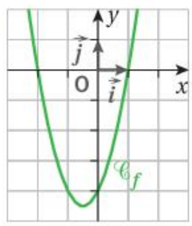
Corrigés p. 368

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

32 Parlons stratégies ! À l'oral

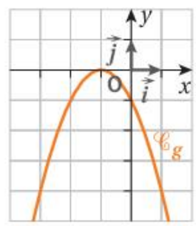
Dans les repères ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives de quatre fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, compléter les expressions algébriques par des nombres réels et expliquer la **stratégie** choisie.

a.



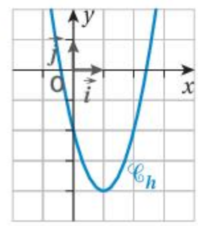
$f(x) = \ldots(x - \ldots)(x + \ldots)$
$\quad = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

b.



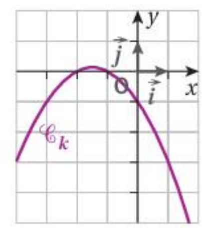
$g(x) = \ldots[(x - \ldots)]^2$
$\quad = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

c.



$h(x) = 2[(x - \ldots)]^2 - \ldots$
$\quad = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

d.



$k(x) = \ldots(x - \ldots)(x + \ldots)$
$\quad = \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$

Différentes stratégies pour déterminer une expression algébrique

Stratégie 1
J'utilise les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les axes du repère.

Stratégie 2
Je pense à développer.

Stratégie 3
Je pense au tableau de variations de la fonction.

J'ai une **autre stratégie** !

33 Parlons stratégies ! À l'oral

Sans calculer le discriminant, dresser le tableau de signes de chacune des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $p_1(x) = -x^2 + 9$ **b.** $p_2(x) = 2x^2 + x$
c. $p_3(x) = -x^2 + 64x - 256$ **d.** $p_4(x) = -3x^2 + 4$
e. $p_5(x) = x^2 - 16$ **f.** $p_6(x) = 3x^2 - 4x$
g. $p_7(x) = x^2 + 6x + 9$ **h.** $p_8(x) = -5x^2 - 3x$
i. $p_9(x) = -x^2 + 2x$ **j.** $p_{10}(x) = 4x^2 - 8$
k. $p_{11}(x) = 4x^2 + 4x + 1$ **l.** $p_{12}(x) = 4x^2 - 9$

Différentes stratégies pour dresser un tableau de signes

Stratégie 1
Je pense aux propriétés de la fonction carré.

Stratégie 2
Je pense à factoriser et aux propriétés des fonctions affines.

Stratégie 3
Je pense aux identités remarquables.

J'ai une **autre stratégie** !

34 En moins d'une minute !

Dresser le tableau de variations des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $p_1(x) = x^2 + 1$ **b.** $p_2(x) = \sqrt{3}x^2 - 7$
c. $p_3(x) = -\frac{2}{13}x^2 + \frac{4}{13}$ **d.** $p_4(x) = -9x^2 + 14$

35 En moins de 30 secondes !

Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $p_1(x) = 8x^2 + 5$ **b.** $p_2(x) = -\sqrt{7}(x+5)^2 - \sqrt{3}$
c. $p_3(x) = (x - 7)^2 + 9$ **d.** $p_4(x) = -\frac{4}{15}x^2 - 13$

36 Chacun sa méthode À l'oral

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant dans chaque cas une méthode différente.

a. $x^2 + 2\,019x = 0$ **b.** $25x^2 + 20x + 4 = 0$ **c.** $x^2 + 2x + 1 = 49$ **d.** $x^2 - x - 1 = 0$ **e.** $5x^2 - 8x + 3 = 0$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

37 On donne $f(x) = 2{,}5x^2 + 15x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la forme canonique de f est :
$$f(x) = 2{,}5(x + 3)^2 - 13{,}5.$$
b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

38 On donne $h(t) = (-t + 3)(t + 1)$, $t \in [0\ ;\ 3]$.

a. Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 3]$, $h(t) = -(t - 1)^2 + 4$.

b. Dresser le tableau de variations de h sur $[0\ ;\ 3]$.

39 Recopier et compléter pour écrire chaque expression sous forme canonique.

a. $2x^2 + 12x - 6 = 2(x + \ldots)^2 - \ldots$

b. $-3x^2 + 6x + 9 = -3(x - \ldots)^2 + \ldots$

40 Dans chaque cas, écrire la fonction polynôme du second degré sous forme canonique, puis en déduire son tableau de variations.

a. $f_1 : x \mapsto x^2 + 14x + 43$ **b.** $f_2 : x \mapsto x^2 - 12x + 56$

c. $f_3 : x \mapsto -x^2 - 6x - 1$ **d.** $f_4 : x \mapsto 4x^2 - 8x$

e. $f_5 : x \mapsto -2x + 3x^2 + 5$ **f.** $f_6 : x \mapsto -5x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{4}{9}$

Résoudre une équation du second degré

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $6x^2 + 7x + 2 = 0$ **b.** $-5x^2 + 10x + 1 = 0$

c. $4x + 1 + 4x^2 = 0$ **d.** $-x^2 + \sqrt{8}x - 19 = 0$

42 **a.** Déterminer les éventuelles racines des fonctions polynômes du second degré f et g :

$f : x \mapsto -x^2 + 8x - 15$ $\quad g : x \mapsto 16x^2 - 8x + 1$

b. En déduire une forme factorisée de f et de g.

43 Pour chaque fonction polynôme du second degré, déterminer ses racines et une forme factorisée.

a. $f_1 : x \mapsto 2x^2 + 7x - 4$ **b.** $f_2 : x \mapsto 108x^2 - 36x + 3$

c. $f_3 : x \mapsto -3x^2 + x + 2$ **d.** $f_4 : x \mapsto 49x^2 + 28x + 4$

Utiliser l'expression de la somme et du produit des racines

44 Factoriser les fonctions polynômes du second degré suivantes sans calculer leur discriminant.

a. $f : x \mapsto x^2 - 8x + 7$ **b.** $g : x \mapsto 10x^2 - 15x - 10$

c. $h : x \mapsto -x^2 + 8x - 12$ **d.** $k : x \mapsto -5x^2 - 18x + 23$

Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

45 Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $f_1(x) = x^2 + 14x + 43$ **b.** $f_2(x) = x^2 - 12x + 56$

c. $f_3(x) = -4x^2 + x - 5$ **d.** $f_4(x) = -16x^2 - 24x - 9$

46 **1.** Dresser le tableau de signes des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a. $f(x) = -6x^2 + 23x + 4$ **b.** $g(x) = 14x^2 - 31x - 10$

2. En déduire la résolution des inéquations suivantes.

a. $f(x) < 0$ **b.** $g(x) \geqslant 0$ **c.** $f(x) > 0$ **d.** $g(x) > 0$

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $6x^2 + 7x + 2 > 0$ **b.** $-5x^2 + 10x + 1 < 0$

c. $49x^2 + 28x + 4 < 0$ **d.** $-2x^2 + 4x - 4 > 0$

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $7x^2 > 3x - 5$ **b.** $-x^2 + x > 1$

c. $2x \leqslant 5x^2 + 4$ **d.** $8x^2 - 10 \geqslant 7x^2$

e. $\frac{4}{3}x^2 < \frac{2}{7}x + 3$ **f.** $(2x - 3) \times (6x + 4) > x^2 - 6$

Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré

49 On donne $f(x) = 0{,}75(x + 6)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est une fonction polynôme du second degré.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = (0{,}75x + 6)(x + 4).$$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour :

a. calculer $f(0)$;

b. calculer $f(-4)$;

c. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -3$;

d. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < -3$.

50 On donne $g(t) = (2t + 1)^2 - (t - 3)^2$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est une fonction polynôme du second degré.

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$g(t) = (3t - 2)(t + 4).$$
3. Choisir la forme la plus adaptée pour :

a. calculer l'image de 3, puis celle de 0 par g ;

b. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(t) = -8$;

c. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(t) > 0$.

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Étudier une fonction polynôme du second degré

Savoir-faire 1 p. 81

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

51 Parmi les fonctions suivantes définies sur ℝ, lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré ?

a. $f_1(x) = -x^3 + x^2(x+1) + 2$ **b.** $f_2(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$

c. $f_3(x) = \dfrac{5x^2+2x+35}{7}$ **d.** $f_4(x) = 3x(x-4) + 7x$

52 Associer à chaque expression de $f(x)$ la forme canonique correspondante. En déduire les valeurs des nombres réels a, α et β.

Expressions de $f(x)$
1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$
2. $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$
3. $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$

Formes canoniques
a. $2(x-\alpha)^2 - 3$
b. $a(x+3)^2 - 1$
c. $2(x-1)^2 + \beta$

53 QCM

1. La forme canonique de la fonction h polynôme du second degré définie sur ℝ par $h(x) = -3x^2 - 12x + 7$ est :

a. $-3(x+2)^2 - 5$ **b.** $-3(x-2)^2 - 53$

c. $-3(x+2)^2 + 19$

2. La forme développée de la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = (3x-4)(5-2x)$ est :

a. $-5x^2 + 23x - 20$ **b.** $-6x^2 + 23x - 20$

c. $-6x^2 + 7x - 20$

54 Associer à chaque expression le tableau de variations qui lui correspond.

$f(x) = -2(x+5)^2 + 7$ $g(x) = -2(x-5)^2 + 7$

$h(x) = 2(x-5)^2 - 7$

a.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations		↗	7	↘	

b.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations		↘	-7	↗	

c.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
Variations		↗	7	↘	

55 f, g et h sont les fonctions polynômes du second degré définies sur ℝ par $f(x) = -3(x+5)(x+1)$, $g(x) = (-3x-15)(x-1)$ et $h(x) = (x+5)(-3x+3)$.

• Lesquelles de ces fonctions peuvent être associées au tableau de variations suivant ?

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations		↗	27	↘	

Pour les exercices 56 et 57

Préciser si la fonction définie sur ℝ est une fonction polynôme du second degré. Le cas échéant, identifier les nombres réels a, b et c dans l'expression $ax^2 + bx + c$.

56 **a.** $f(x) = 3x(x+2) - 5x$ **b.** $g(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$

c. $h(x) = (x-2)^2 - (x+2)^2$ **d.** $k(x) = 5(x^2 - 3)$

57 **a.** $f(x) = (2-x)(4+2x)$ **b.** $g(x) = 2\,019$

c. $h(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 2(3x-7)$ **d.** $k(x) = \dfrac{3x^2 - 15x + 18}{4}$

Pour les exercices 58 et 59

Recopier et compléter pour écrire chaque expression sous forme canonique.

58 **a.** $x^2 - 2x + 3 = (x - \ldots)^2 + \ldots$

b. $x^2 + 2x + 3 = (x + \ldots)^2 + \ldots$

c. $x^2 + 2x - 3 = (x + \ldots)^2 - \ldots$

59 **a.** $3x^2 - 6x + 1 = \ldots(x - \ldots)^2 - \ldots$

b. $3x^2 + 6x + 1 = \ldots(x + \ldots)^2 - \ldots$

c. $3x^2 + 6x - 1 = \ldots(x + \ldots)^2 - \ldots$

Pour les exercices 60 à 63

Écrire chaque fonction sous forme canonique, puis dresser son tableau de variations.

60 **a.** $f_1(x) = x^2 + 4x + 1$ **b.** $f_2(x) = -x^2 + 2x + 2$

c. $f_3(x) = 0{,}5x^2 + x - 4$ **d.** $f_4(x) = 2{,}5x^2 + 20x + 35$

61 **a.** $f_1(x) = 2x^2 - 6x + 1$ **b.** $f_2(x) = -x^2 + x - 1$

c. $f_3(x) = 3x^2 + 3x + 0{,}75$ **d.** $f_4(x) = 4x^2 - 4x + 1$

62 **a.** $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 20$ **b.** $f_2(x) = (4-x)(x+2)$

c. $f_3(x) = -5x^2 + 10x + 1$ **d.** $f_4(x) = -7x^2 - 6x + 1$

63 **a.** $f_1(x) = x^2 - x - 1$ **b.** $f_2(x) = 289x^2 - 17x - 6$

c. $f_3(x) = (3-2x)(5x+7)$ **d.** $f_4(x) = \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{6}\,x + 1$

64 **a.** Montrer que $4(x-1{,}5)^2 - 9$ est la forme canonique de la fonction g définie sur ℝ par :

$$g(x) = 4x^2 - 12x.$$

b. En déduire le tableau de variations de g.

65 **a.** Montrer que $-2\left(x + \dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{7}{9}$ est la forme canonique de la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = -2x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{9}.$$

b. En déduire le tableau de variations de f.

Fichier Python
Ex. 67
Manuel numérique enseignant

★★

66 Copies à la loupe

Aloys et Alyson ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer une forme canonique.

Aloys

Pour tout nombre réel x :

$h(x) = -4x^2 - 8x - 10$

$= -4(x^2 - 2x + 2{,}5)$

$= -4[(x-1)^2 - 1 + 2{,}5]$

$= -4[(x-1)^2 - 3{,}5]$

$= -4(x-1)^2 - 14$

Alyson

Pour tout nombre réel x :

$h(x) = -4x^2 - 8x - 10$

$= -4(x^2 + 2x + 2{,}5)$

$= -4[(x+1)^2 - 1 + 2{,}5]$

$= -4[(x+1)^2 + 1{,}5]$

$= -4(x+1)^2 - 6$

- Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chacune des erreurs identifiées.

67 PROGRAMMATION python

On considère la fonction en Python ci-contre.

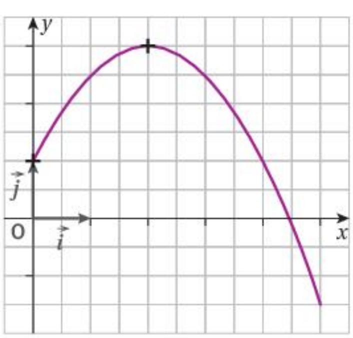
```python
def f(x):
    x=x+4
    y=-1.3*x**2+5
    return y
```

a. Déterminer la forme canonique de la fonction f ainsi définie.

b. Dresser le tableau de variations de f.

68

Une fonction f polynôme du second degré est représentée graphiquement ci-contre sur l'intervalle [0 ; 5].



- Déduire de cette représentation graphique la forme canonique de la fonction f.

69

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

Contrainte : on écrira au préalable chaque expression sous forme canonique.

a. $x^2 + 2x + 2 = 0$ **b.** $-x^2 + 13x + 2 = 0$

c. $x^2 - x - 1 = 0$ **d.** $-5x^2 + 8x - 3{,}25 = 0$

e. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ **f.** $-3x^2 + 8x = 5$

70

Un rectangle ABCD tel que AB = x cm a pour périmètre 10 cm.

a. Exprimer BC en fonction de x.

b. Montrer que l'aire du rectangle ABCD (en cm^2) est $S(x) = -(x - 2{,}5)^2 + 6{,}25$ pour tout $x \in [0 ; 5]$.

c. Dresser le tableau de variations de S sur [0 ; 5]. Que peut-on remarquer lorsque l'aire de ABCD est maximale ?

71

La quantité de sucre $q(x)$ (en kg) présente dans 100 kg de betteraves sucrières est donnée par $q(x) = -0{,}004x^2 + x - 40$ où x est la masse (en kg) d'engrais répandue à l'hectare, avec $x \in [60 ; 180]$.

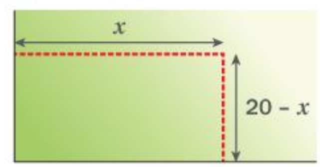
a. Montrer que, pour tout $x \in [60 ; 180]$:

$$q(x) = -0{,}004(x - 125)^2 + 22{,}5.$$

b. En déduire, à l'aide du tableau de variations de q, la masse x d'engrais répandue à l'hectare pour que la quantité de sucre soit maximale.

72 IN ENGLISH p. 381

A farmer has 20 metres of fencing. He wishes to use it to form a rectangular enclosure in the corner of a field, as in the diagram beside.

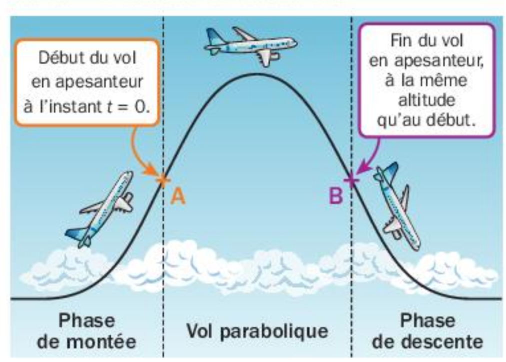


a. Write down an expression for the area enclosed by the fencing.

b. What is the maximum area the farmer can enclose? What are the lengths of the fencing for this maximum area?

73

En février 2018, l'astronaute français Thomas Pesquet a rejoint l'équipe de pilotes de l'Airbus ZERO-G. Cet avion permet de recréer les conditions de l'apesanteur en décrivant des paraboles grâce à l'alternance de phases de montées et de descentes.



L'altitude $f(t)$ de cet avion (en m) en fonction du temps t (en s) durant un vol parabolique de 22 s est donnée par :

$$f(t) = \frac{-900}{121}t^2 + \frac{1\,800}{11}t + 7\,600 \text{ sur } I = [0 ; 22].$$

a. Déterminer par le calcul la forme canonique de f.

b. Lors de ce vol parabolique, au bout de combien de temps l'avion atteindra-t-il son altitude maximale ? Que vaut cette altitude maximale ?

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

Savoir-faire 2 et 3 p. 82-83

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Questions FLASH

74 Vrai ou faux ?

a. « L'équation $3x^2 - 4x + 8 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. »

b. « L'équation $2x - 4x^2 - 5 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. »

c. « L'équation $25x^2 - 2x + \frac{1}{25} = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. »

d. « L'équation $4x^2 - 7 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. »

e. « L'équation $5x^2 + 16 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. »

f. « L'équation $x(x + 4) = 6$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. »

75 Sans calculer le discriminant, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $3x^2 + 4x = 0$ b. $4x^2 + 7 = 0$
c. $x^2 + 2x + 1 = 0$ d. $2x^2 = x$
e. $7x^2 - 14 = 0$ f. $2(5x + 7)(-3x + 2) = 0$

76 Associer à chaque équation du second degré son ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$.

Équations
1. $4(x + 2)^2 = 0$
2. $-3(x + 2)(x + 3) = 0$
3. $-7(x - 2)^2 = 0$
4. $(5x - 10)(2x - 6) = 0$

Ensembles de solutions
a. $\mathcal{S} = \{2 ; 3\}$
b. $\mathcal{S} = \{-2\}$
c. $\mathcal{S} = \{-2 ; -3\}$
d. $\mathcal{S} = \{2\}$

77 QCM

Pour tout nombre réel x, $2x^2 - 4x - 6$ est égal à :

a. $(2x + 2)(x - 3)$ b. $(2x - 3)(x - 2)$
c. $2(x + 1)(x - 3)$ d. $(x + 1)(2x - 6)$

78 Vrai ou faux ?

Léa affirme que l'équation $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$ admet une solution double. Qu'en pensez-vous ?

79 a. Donner une équation du second degré admettant -1 et 4 comme solutions.

b. Donner une équation du second degré admettant -5 comme unique solution.

80 Pour chaque équation, déterminer une solution évidente.

a. $2x^2 - 10x + 8 = 0$ b. $3x^2 - 9x - 12 = 0$
c. $-2x^2 + 16x - 24 = 0$ d. $2x^2 - 8x + 8 = 0$
e. $x^2 + 4x + 3 = 0$
f. $20x^2 - 1\,980x - 2\,000 = 0$

Pour les exercices 81 à 84

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode la plus pertinente.

81 a. $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ b. $x^2 + 7x = 0$
c. $5x^2 + 7x + 18 = 0$ d. $x^2 + x + 1 = 0$

82 a. $-4x^2 + x = 0$ b. $-4x^2 + x + 1 = 0$
c. $-160x^2 - 74x + 3 = 0$ d. $6x^2 + 72x + 216 = 0$

83 a. $3x^2 + 6x - 105 = 0$ b. $-8x^2 - 16 = 0$
c. $50x^2 - 20x + 2 = 0$ d. $x^2 = x + 1$

84 a. $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$ b. $8x^2 = 7x + 2$
c. $81x^2 - 1 = 0$ d. $-7x^2 + 1{,}5x + 1 = 0$

Pour les exercices 85 à 88

Pour chacune des fonctions polynôme du second degré, déterminer ses racines éventuelles et une forme factorisée le cas échéant.

85 a. $f : x \mapsto -4x^2 - 10x + 6$ b. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

86 a. $f : x \mapsto 4x^2 + x + 9$ b. $g : x \mapsto 4x^2 + 13x + 9$

87 a. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ b. $g : x \mapsto -3x^2 + 2x - 5$

88 a. $f : x \mapsto -5x^2 + 15x + 270$
b. $g : x \mapsto -5x^2 - 60x - 180$

89 Factoriser les fonctions polynômes du second degré sans calculer leur discriminant.

a. $f : x \mapsto -6x^2 + 10x - 4$ b. $g : x \mapsto 6x^2 + 2x - 20$
c. $h : x \mapsto 4x^2 - 14x + 12$ d. $k : x \mapsto 2x^2 - 8x + 8$

90 1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 + 3x - 5.$$

a. Tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice.

b. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 3$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de f et de g ? Vérifier à l'aide de la calculatrice.

91 Soit l'équation (E) : $14x^3 - 9x^2 - 12x - 9 = 0$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage :

```
factoriser(14x^3-9x^2-12x-9)
```
$$(2x - 3)(7x^2 + 6x + 3)$$

a. Vérifier que l'égalité obtenue est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et expliquer la factorisation obtenue avec le logiciel.

Fichier Python
Ex. 98
Manuel numérique enseignant

★★

92 De la réponse à la question (et vice-versa)

Laura a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

Pour tout nombre réel x non nul :

$\frac{4}{x} + 3 = x \iff x - 3 - \frac{4}{x} = 0$

$\iff \frac{x^2 - 3x - 4}{x} = 0$

$\iff x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \times (-4) = 25$. $\Delta > 0$ donc je calcule

$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$.

$\mathcal{S} = \{-1 ; 4\}$.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Laura.

b. Expliquer la démarche conduite par Laura pour résoudre l'exercice.

c. Proposer des améliorations dans la réponse de Laura.

Maths à l'oral
Expliquez les modifications apportées à la réponse de Laura.

Pour les exercices 93 et 94
Résoudre les équations en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

93 **a.** $(3x^2 + 5x - 8)(9x^2 - 6x + 1) = 0$
b. $5x^3 + 4x^2 - x = 0$

94 **a.** $x - 3 = \frac{2}{x}$ **b.** $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$
c. $\frac{5x^2 - 11x + 2}{x - 2} = 0$

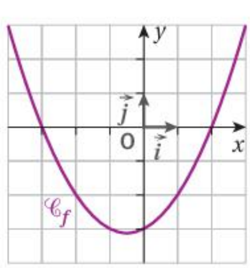
95 **a.** Factoriser les expressions $2x^2 - 10x + 12$ et $3x^2 - 3x - 6$.
b. Résoudre l'équation (E) suivante en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

$$(\text{E}) : \frac{2x}{2x^2 - 10x + 12} + \frac{3}{3x^2 - 3x - 6} = 0$$

Aide Réduire au même dénominateur les deux fractions afin de se ramener à une équation quotient nul.

96 IN ENGLISH ▶ p. 381

Drawn beside, the graph of a quadratic function in the domain $-4 \leqslant x \leqslant 3$.



a. Use the graph to write down:
– the value of $f(0)$;
– the values of x for which $f(x) = 0$.

b. Hence or otherwise, find an equation of the parabola.

97 Une étude de marché a été réalisée sur la vente de clefs USB de 8 Go dans les magasins d'une chaîne d'hypermarchés. On estime que le prix de vente p d'une clef USB est compris entre 2 € et 5 €. D'après l'étude, la demande, c'est-à-dire la quantité de clefs USB (en milliers) réclamée par les consommateurs est égale à :

$$D(p) = 0{,}4p^2 - 4p + 11{,}5.$$

L'offre, c'est-à-dire la quantité de clefs USB (en milliers) disponible chez les fournisseurs est égale à :

$$F(p) = -0{,}3p^2 + 4{,}05p - 6{,}35.$$

On appelle « prix d'équilibre » la valeur de p pour laquelle la demande est égale à l'offre.

a. Déterminer le prix d'équilibre.

b. Quels conseils pourrait-on donner au gestionnaire du stock de cette chaîne d'hypermarchés ?

98 PROGRAMMATION python

a. Tom a écrit la fonction en Python ci-contre.
À quoi correspond la valeur renvoyée par l'appel `equation(2,5,1)` ?

```python
def equation(a,b,c):
    delta=b**2-4*a*c
    if delta>0:
        return 2
    else:
        if delta==0:
            return 1
        else:
            return 0
```

b. Proposer une fonction en Python qui fait appel à la fonction rédigée par Tom et qui permet de calculer les éventuelles racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Saisir ce programme pourra vous être utile !

99 **a.** Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré s'annulant en -3 et en 4.

Aide Utiliser la forme factorisée.

b. Déterminer la fonction f polynôme du second degré s'annulant en -3 et en 4, et telle que $f(1) = 2$.

100 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations.

a. $\begin{cases} x + y = 35 \\ x \times y = 306 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x - y = 10 \\ x \times y = 704 \end{cases}$

Info
Le couple $(x ; y)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^2$;
cela signifie que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. ▶ Rabat I, Notations

101 Approfondissement Trouver deux nombres réels ayant pour somme 5 et pour produit 2.

102 Approfondissement Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 50 cm et d'aire 114 cm^2 ?

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

Savoir-faire 4 et 5 p. 84-85

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Pour les exercices 103 et 104

f, g, h et i sont quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
- $g(x) = x^2 - 2x - 3$
- $h(x) = -3x^2 - 5x - 3$
- $i(x) = 2x^2 - 3x + 3$

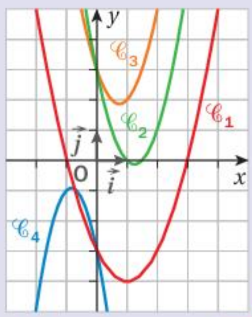
103 Vrai ou faux ?

a. « $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. » **b.** « $\forall x \in \left]-1\,;3\right[$, $g(x) < 0$. »
c. « $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) < 0$. » **d.** « $\forall x \in \mathbb{R}$, $i(x) \leqslant 0$. »

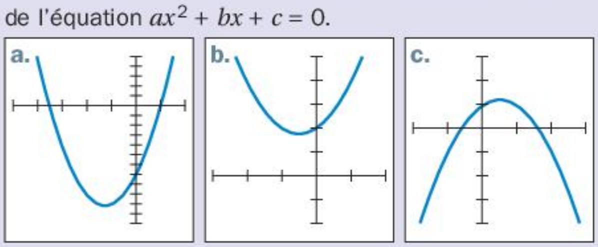
104 Qui est qui ?

On a tracé dans le plan muni d'un repère les courbes représentatives des fonctions f, g, h et i.

- Associer chacune des fonctions à sa courbe représentative.



105 On a affiché sur chaque capture d'écran de calculatrice la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. On note Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.



- Indiquer pour chaque cas le signe de a et le signe de Δ.

106 Vrai ou faux ?

Léo affirme que les tableaux de signes suivants peuvent être ceux de trois fonctions polynômes du second degré. Qu'en pensez-vous?

a.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b.

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		4		4,1		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

107 Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions polynômes du second degré.

a. $f_1(x) = (x + 1)(x + 2)$ **b.** $f_2(x) = 2(x - 3)(x + 1)$
c. $f_3(x) = -3(x - 5)(2x + 1)$ **d.** $f_4(x) = 3x(-x + 4)$

Pour les exercices 108 à 111

a. Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

108 $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ et $g(x) = -x^2 + x - 2$.

109 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 18$ et $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

110 $f(x) = -3x^2 + 7x + 4$ et $g(x) = 7x^2 - 2x + 1$.

111 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{6}x + 2$ et $g(x) = x^2 - \dfrac{4}{7}$.

Pour les exercices 112 à 115

Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$.

112 **a.** $-4x^2 - 11x + 3 \geqslant 0$ **b.** $-3x^2 + 2x - 6 < 0$

113 **a.** $3x^2 - 24x + 48 \geqslant 0$ **b.** $5x^2 - 3x - 1 > 0$

114 **a.** $4x^2 - 7 \leqslant 0$ **b.** $3x^2 - 5x < 4x + 5$

115 **a.** $x^2 - 2x < 3x - 8$ **b.** $2x \geqslant 4x^2 - 6x + 1$

116 Dans le plan muni d'un repère, on appelle $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 10x^2 + 26x + 6$ et (d) la droite d'équation $y = 8x + 42$.

- Étudier la position relative de $\mathscr{C}_h$ et de (d).

117 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 2x + 4}.$$

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le signe de la fonction f.
c. Dresser le tableau de signes de $f(x)$, puis valider ou corriger la conjecture émise à la question **b**.

118 **1.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
b. Dresser par le calcul le tableau de signes de la fonction f, puis valider ou corriger la conjecture émise au **a**.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
b. Que peut-on en déduire pour les représentations graphiques de f et de g ?
c. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

★★

119 **De la conjecture à sa démonstration**

1. Tracer à la calculatrice les courbes représentatives des fonctions carré et inverse, puis conjecturer leur position relative.

2. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage :

```
factoriser(x^3-1)
```
$$(x-1)(x^2+x+1)$$

a. Vérifier l'égalité ainsi obtenue.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $x^2 < \frac{1}{x}$ en expliquant votre démarche.

c. Confirmer ou infirmer la conjecture énoncée à la question **1**.

Maths à l'oral

Expliquez en quoi l'inéquation du b permet de valider ou non la conjecture faite au 1.

120 LOGIQUE f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
On note Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Indiquer, en justifiant, si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

a. « Si $\Delta > 0$, alors il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) > 0$. »

b. « Si $\Delta < 0$, alors $f(x) < 0$ pour tout nombre réel x. »

c. « Si $c = 0$, alors 0 est une racine de f. »

d. « Si $-a - b + c = 0$, alors -1 est une racine de f. »

e. « Si $ac < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes. »

2. Énoncer la réciproque (▶ Rabat V, Logique) de chacune de ces propositions et indiquer si elle est vraie ou fausse.

Pour les exercices 121 à 123

Résoudre les inéquations suivantes en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

121 **a.** $(x + 3)(2x^2 - 10x + 12) > 0$

b. $(x^2 - 3)(-6x^2 + 7x - 1) \leqslant 0$

122 **a.** $3x + 2 < \frac{5}{x}$ **b.** $\frac{x^2 - x - 6}{-4x^2 - 6x + 4} > 0$

123 **a.** $\frac{5}{x-2} - \frac{2}{4x+3} > -2$ **b.** $\frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{5x-2} > 0$

Aide Réduire au même dénominateur les deux fractions pour se ramener à l'étude du signe d'un quotient.

124 On stérilise de la compote de pommes dans un autoclave. La température $f(t)$ du produit (en °C) en fonction du temps t de chauffage (en minutes) est :

$$f(t) = -0{,}01t^2 + 2t + 26 \text{ avec } t \in [0\,;\,150].$$

a. Dresser le tableau de signes de $f(t) - 110$.

b. On arrête la stérilisation dès que la température est supérieure ou égale à 110 °C.
Quel est le temps mis pour atteindre cette température ?

125 **Chronophotographie**

Afin d'étudier la trajectoire d'un ballon de rugby, on réalise une chronophotographie de son mouvement en le lançant à partir d'une hauteur de 1 m.
Si x désigne l'abscisse du ballon (en m) au moment où il quitte la main de la joueuse (d'abscisse 0), alors la hauteur (en m) atteinte par le ballon à l'abscisse x est modélisée par $h(x) = -0{,}129x^2 + 1{,}26x + 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour le ballon ?

2. Le ballon peut-il dépasser une hauteur de 5 m ? Justifier la réponse.

3. On souhaite calculer la distance sur laquelle la hauteur du ballon dépasse 3 m.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$-0{,}129x^2 + 1{,}26x - 2 > 0.$$

b. Conclure.

4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) > 4{,}1$.

b. Que peut-on en conclure sur la hauteur du ballon ?

126 En 2019, la gérante d'une brasserie de bord de plage propose, le midi, un menu à 23,90 €. Ce menu rencontre un tel succès que la gérante décide d'augmenter son prix pour l'été.
Le nombre hebdomadaire moyen de couverts en fonction du prix x du menu (en €) est donné par :

$$N(x) = -18x + 605.$$

1. La gérante fixe le prix du menu à 25 €.
Calculer le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé par la brasserie.

Info

Le chiffre d'affaires d'une entreprise correspond à la somme des montants des ventes réalisées par celle-ci.

2. On note $C(x)$ le chiffre d'affaires hebdomadaire (en €) pour un prix du menu de x euros.
Montrer que $C(x) = -18x^2 + 605x$.

3. La gérante estime que pour que sa formule reste rentable, son chiffre d'affaires doit dépasser 1 400 € la première semaine.

a. ALGORITHMIQUE Écrire en langage naturel un algorithme qui détermine le plus grand prix du menu que la gérante peut fixer pour être rentable.
En déduire ce prix.

b. Retrouver ce prix en résolvant une inéquation.

D'après Bac STMG Antilles-Guyane, juin 2017.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : résolution d'une équation du second degré
hatier-clic.fr/ma1096

La démonstration rédigée

Propriété On note Δ le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$).

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet **deux solutions distinctes** dans $\mathbb{R}$:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet **une unique solution** dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet **pas de solution** dans $\mathbb{R}$.

OBJECTIF : on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Démonstration

- On procède par **équivalences** (▶ Rabat V, Logique) en utilisant la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \times \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0$$
$$\Leftrightarrow a \times \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \ (\text{car } \Delta = b^2 - 4ac).$$

- On obtient ainsi une équation de la forme $X^2 = k$, avec $X = x + \dfrac{b}{2a}$ et $k = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.
- On raisonne par **disjonction des cas** (▶ Rabat VI, Raisonnements) selon le signe de Δ.

– **Si $\Delta > 0$ alors $k > 0$**, donc l'équation $X^2 = k$ admet deux solutions réelles.

De plus, $X^2 = k \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

– **Si $\Delta = 0$ alors $k = 0$**, donc l'équation s'écrit $X^2 = 0$ et elle admet une unique solution réelle : $X = 0$.

De plus, $X = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$.

Donc si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$:
$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

– **Si $\Delta < 0$ alors $k < 0$**, donc l'équation $X^2 = k$ n'admet aucune solution réelle car X^2 ne peut pas être strictement négatif.

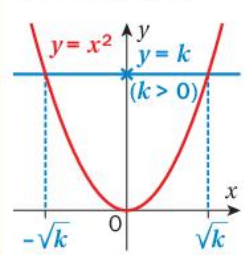
Donc si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. ■

Le principe

1. On commence par **mettre sous forme canonique** le membre de gauche de l'égalité.
▶ Savoir-Faire 1, p. 81

2. On se ramène à la **résolution d'une équation de la forme $X^2 = k$.**

3. **On résout cette équation selon les valeurs de k** afin d'en déduire les solutions éventuelles de l'équation initiale.
Pour cela, on utilise les propriétés de la fonction carré :



La démonstration à compléter

127 En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de déterminer la **forme canonique d'une fonction polynôme du second degré**.

Démonstration

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels fixés.

- Pour tout nombre réel x, $f(x) = \dots x^2 + \dots x + \dots$

$$= \dots \times (x^2 + \dots x) + \dots$$

- Le premier terme correspond à u^2 donc on pose $u = x$.

Le second terme correspond à $2 \times u \times v$ donc on pose $v = \dfrac{b}{2a}$.

On a alors $u^2 + 2 \times u \times v + v^2 = \dots + 2 \times \dots \times \dots + \dots$.

Pour tout nombre réel x, $f(x) = a \times \left(\dots + \dots + \dots - \dfrac{b^2}{4a^2}\right) + \dots$

$$= a \times (\dots + \dots + \dots) - \dots + \dots$$

$$= a \times (\dots + \dots)^2 + \frac{\dots}{4a}$$

$$= a \times \left(\dots + \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{\dots}{\dots}$$

- Pour tout nombre réel x, $f(x) = a \times (x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = \dots$ et $\beta = \dots$. ■

1 **On factorise par a** les deux premiers termes de l'expression développée.

2 **On cherche à factoriser l'expression entre parenthèses à l'aide de l'identité remarquable $u^2 + 2 \times u \times v + v^2 = (u + v)^2$.**

a. On fait apparaître $v^2 - v^2$.

b. On distribue a sur le terme $-v^2$.

c. On utilise l'identité remarquable et on regroupe les termes de droite sur la fraction.

d. On transforme la somme de la parenthèse en différence.

3 On **conclut**.

Démonstrations Vers le BAC

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

128 **1.** On suppose que $a > 0$.

a. Utiliser la forme canonique de f pour démontrer que cette fonction admet un minimum, dont on précisera la valeur ainsi que l'antécédent x_m pour lequel il est atteint.

b. Montrer que si u et v sont deux nombres réels tels que $u < v \leqslant x_m$ alors $f(u) - f(v) > 0$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\ ;\ x_m]$.

Aide On se ramènera à étudier le signe de :
$a \times (u - v) \times [(u - x_m) + (v - x_m)]$.

c. Étudier de même le sens de variation de f sur $[x_m\ ;\ +\infty[$.

2. Étudier de même les variations de f lorsque $a < 0$.

Pour les exercices 129 à 131

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $f(x) = 0$.

129 **a.** En supposant que $\Delta > 0$ et en notant x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$, développer l'expression $a \times (x - x_1) \times (x - x_2)$ en remplaçant x_1 et x_2 par leurs expressions en fonction de a, b et c. Conclure.

b. En supposant que $\Delta = 0$ et en notant x_0 la solution double de l'équation $f(x) = 0$, développer l'expression $a \times (x - x_0)^2$ en remplaçant x_0 par son expression en fonction de a, b et c. Conclure.

130 **a.** On suppose que $\Delta > 0$. En utilisant la forme factorisée de f, dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. On suppose que $\Delta = 0$. En utilisant la forme factorisée de f, dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. On suppose que $\Delta < 0$. En utilisant la forme canonique de f, dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

131 On suppose que $\Delta > 0$.

a. Rappeler les expressions des racines x_1 et x_2 de f en fonction de a, b et c.

b. Exprimer la somme des racines x_1 et x_2 en fonction de ces coefficients.

c. Exprimer de la même façon le produit des racines x_1 et x_2.

132 Approfondissement

x_1, x_2, s et p sont des nombres réels.

a. On suppose que x_1 et x_2 sont racines de la fonction polynôme du second degré $x \mapsto x^2 - sx + p$.

Montrer que $s = x_1 + x_2$ et que $p = x_1 \times x_2$.

b. Réciproquement, on suppose que $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 \times x_2$. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$x^2 - sx + p = (x - x_1) \times (x - x_2).$$

Conclure.

Fichier Python
Ex. 139
Manuel numérique enseignant

133 Intersection de courbes

On considère, dans le plan muni d'un repère :

- l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{2}{x}$;
- la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.

b. Calculer | Montrer que déterminer l'abscisse des points d'intersection de ces deux courbes revient à résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$.

c. Résoudre cette équation, puis confirmer ou infirmer la conjecture de la question **a**.

134

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 - 12x - 11.$$

a. Exprimer $-\dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{1}{3}$ en fonction de x.

b. En déduire la forme canonique de f.

2. Cas général

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

a. Exprimer $\dfrac{1}{a}f(x) - \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ en fonction de x.

b. En déduire la forme canonique de f.

135 Une équation de degré trois — Approfondissement

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 15x^3 - 34x^2 - 47x + 42.$$

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer une solution entière de l'équation $f(x) = 0$.

b. Calculer | Déterminer les valeurs des nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

d. Rechercher s'il existe une méthode générale de résolution des équations du troisième degré.

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

136 Une équation de degré quatre

P est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 14x^2 - 5x - 12.$$

a. Calculer | Déterminer les valeurs des nombres réels a, b et c tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
Comparer l'ensemble solution obtenu avec celui affiché par le logiciel de calcul formel :

resoudre(-2x^4+5x^3+14x^2-5x-12=0)
$\left[\dfrac{-3}{2}, -1, 1, 4\right]$

c. En déduire une factorisation de $P(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.

Aide Penser à construire un tableau de signes.

137

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 13x - 21.$$

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer une solution entière de l'équation $g(x) = 0$ et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Calculer | Déterminer les valeurs des nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c).$$

c. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, puis valider ou infirmer la conjecture concernant le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

138 Consommation d'un moteur

Un moteur thermique fonctionne grâce à la combustion du carburant contenu dans un mélange air/carburant.
On appelle « coefficient d'air », noté λ, le rapport entre la masse m d'air dans le mélange et le besoin théorique en air b du moteur : $\lambda = \dfrac{m}{b}$.

- Si $\lambda < 1$, le mélange est dit « riche » en carburant.
- Si $\lambda > 1$, le mélange est dit « pauvre » en carburant.
- Si $\lambda = 1$, le mélange est dit « idéal » : la combustion est alors complète et faiblement polluante.

La consommation en carburant d'un certain moteur (en g/kW·h) est donnée par $C(\lambda) = a\lambda^2 - 3\,520\lambda + 2\,476$ où $\lambda \in [0{,}9 ; 1{,}2]$ et a est un nombre réel.

1. Avec un mélange idéal, la consommation du moteur étudié est 556 g/kW·h. Déterminer la valeur de a.

2. Le moteur est correctement réglé si sa consommation est minimale.

a. Déterminer la valeur de λ pour laquelle le moteur est correctement réglé.

b. Le mélange est-il alors « riche » ou « pauvre » ?

139 PROGRAMMATION python

La fonction en Python ci-contre fait intervenir une fonction f polynôme du second degré.

```python
def point_f(x,y):
    if y==3*x**2-x-2:
        return True
    else:
        return False
```

a. Donner une expression de $f(x)$.

b. On appelle la fonction `point_f` avec les paramètres $x = -\dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{23}{9}$. Que renvoie-t-elle ?

c. On appelle la fonction `point_f` avec les paramètres $x = -1$ et $y = 2$. Que renvoie-t-elle ?

d. Préciser le rôle de cette fonction en Python.

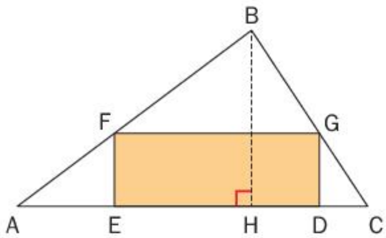
e. Déterminer la forme factorisée de f.

f. L'utilisateur a choisi 0 pour y et la fonction en Python a renvoyé le booléen `True`. Quelle(s) valeur(s) de x l'utilisateur a-t-il pu choisir ?

g. L'utilisateur a choisi -2 pour y et la fonction en Python a renvoyé le booléen `True`. Quelle(s) valeur(s) de x l'utilisateur a-t-il pu choisir ?

Fichier logiciel
Ex. 140
Manuel numérique enseignant

140 Vers le BAC ABC est un triangle tel que AC = 12. H est le pied de la hauteur issue de B avec AH = 8 et BH = 6. On place les points D, E, F et G comme sur la figure ci-dessous pour que DEFG soit un rectangle.
On pose x = AE.



L'objectif de cet exercice est de déterminer les éventuelles valeurs de x qui rendent l'aire du rectangle DEFG maximale.

1. TICE Émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. a. À quel intervalle appartient le nombre réel x ?

b. Exprimer les longueurs EF et DC en fonction de x, puis en déduire l'aire du rectangle DEFG, notée $S(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction S et répondre au problème posé.

141 ABC est un triangle équilatéral de côté 10 cm et M est un point du segment [AB] tel que AM = x. N est le point du segment [AC] tel que AM = AN. H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle ABN.
On souhaite déterminer la position du point M sur [AB] pour que la distance BN soit minimale.

a. Faire une figure.

b. Démontrer que AMN est un triangle équilatéral.

c. Montrer alors que H est le milieu du segment [AM].

d. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que :
$$\text{HN} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

e. Démontrer que, pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$:
$$\text{BN}^2 = x^2 - 10x + 100.$$

f. Répondre alors au problème posé.

142 Chercher | **a.** Théo a résolu une équation du troisième degré ; il a trouvé trois solutions.
Qu'en pensez-vous ?

b. Donner une équation de degré 3 qui admet comme solutions 4, 5 et 6.

c. Donner une équation de degré 3 qui admet pour seules solutions 4 et 5.

143 α et β sont deux nombres réels distincts.
• Chercher | Existe-t-il, selon les valeurs de α et β, une fonction polynôme du second degré f admettant pour racines α et β et vérifiant $f(0) = 1$? Si oui, déterminer son expression en fonction des nombres réels α et β.

Aide Penser à utiliser la forme factorisée de f.

144 **Avec un paramètre**
On considère l'équation :
$$(m-2)x^2 + 2mx - 1 = 0$$
où m est un nombre réel.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation lorsque $m = 2$.

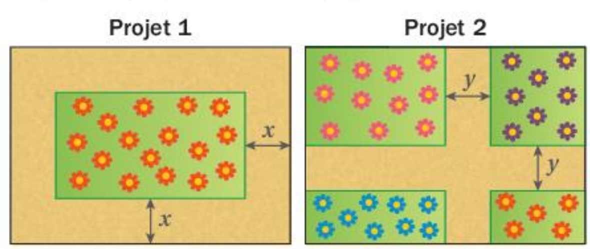
2. Chercher | En supposant que $m \neq 2$, déterminer les éventuelles valeurs de m pour lesquelles :

a. l'équation admet une unique solution réelle ;

b. l'équation admet deux solutions réelles.

145 IN ENGLISH p. 381
Write the function $f(x) = 2x^2 - 7x - 1$, where $x \in \mathbb{R}$, in the form $a(x+h)^2 + k$, where a, h and $k \in \mathbb{R}$. Hence, write the minimum point of f.

146 **Le problème du jardinier** En groupe
Chercher | Un jardinier doit réaliser un parc public sur un terrain rectangulaire de 30 m × 16 m. L'architecte de la ville lui donne pour contrainte que l'aire de la partie végétalisée soit égale à l'aire de la partie piétonne.
Le jardinier propose les deux projets suivants :



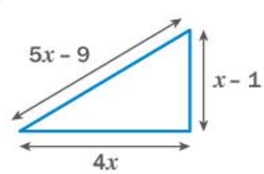
1. Pour chaque projet :

a. exprimer l'aire de la partie végétalisée et l'aire de la partie piétonne en fonction de x (resp. y) ;

b. en déduire la valeur de x (resp. y) répondant à la contrainte fixée par l'architecte.

2. L'architecte privilégiera le projet permettant d'avoir une largeur d'allée la plus grande.
Quel projet sera choisi ?

147 IN ENGLISH p. 381
The lengths of the sides of a right-angled triangle are given by the expressions $x - 1$, $4x$ and $5x - 9$, as shown in the diagram.



a. Find the value of x.

b. Verify, with this value of x, that the lengths of the sides of the triangle above form a Pythagorean triple.

Hint A "Pythagorean triple" is a set of positive integers a, b and c that fits the rule $a^2 + b^2 = c^2$.

Fichier Python
Ex. 148
Manuel numérique enseignant

148 **Discriminant réduit**

On considère l'équation du second degré
(E) : $ax^2 + 2b'x + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b' \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. a. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) s'écrit $\Delta = 4 \times \Delta'$ où $\Delta' = b'^2 - ac$.

> **Info**
> Δ' est appelé le **discriminant réduit** de l'équation (E).

b. Montrer que si $\Delta' > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) lorsque $\Delta' < 0$ et lorsque $\Delta' = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant le discriminant réduit.

a. $-3x^2 + 4x + 1 = 0$ **b.** $x^2 - 6x + 5 = 0$

3. PROGRAMMATION python

Proposer une fonction en Python qui renvoie les éventuelles solutions réelles d'une équation de la forme $ax^2 + 2b'x + c = 0$, les valeurs de a, b' et c étant les paramètres de cette fonction.

149 David a utilisé un logiciel de calcul formel pour traiter un exercice :

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} \leq \frac{3 \cdot x^2 - 1}{x^2 - x}$$

$$\xrightarrow{\text{résoudre}} \{x < 0\}, \left\{\frac{2}{3} \leq x, x < 1\right\}, \{1 < x\}$$

a. Représenter | Proposer un énoncé pour cet exercice.

b. Raisonner | Démontrer le résultat affiché par le logiciel.

150 f est la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{-x^2 + 2x + 5}{x^2 + 3x + 6}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté D_f.

b. À l'aide de la calculatrice, proposer deux nombres entiers m et M tels que, pour tout nombre réel x appartenant à D_f, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

c. Calculer | Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à D_f, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

> **Info**
> m et M sont appelés respectivement **minorant** et **majorant** de la fonction f sur D_f.

151 **Chercher** | Déterminer toutes les fonctions polynômes du second degré ayant :

a. 3 et –1 pour racines ;

b. 0,75 pour racine double ;

c. 3 et –1 pour racines et –4 pour maximum ;

d. –2 et –4 pour racines et –1 pour minimum.

Maths à l'oral

Dans chaque cas, présentez la démarche suivie en exposant les contraintes imposées.

152 **1. a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 + 4x - 7 = 0$.

b. En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$.

2. Utiliser le même procédé pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$.

> **Info**
> Les équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$, avec $a \neq 0$, sont appelées **équations bicarrées**.

153 Pendant la période des soldes, un site de ventes privées affiche une remise de t % sur les prix des chaussures. Pour les clients titulaires de la carte de fidélité, une remise supplémentaire de $0{,}5t$ % sur le prix soldé est accordée.

Noémie bénéficie de ces deux remises et paie 18 € un article dont le prix initial était 25 €.

• **Modéliser** | Quelle est la valeur de t ?

154 Résoudre les équations et inéquations suivantes en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

a. $x^2 + 3x - 6{,}75 = 0$

b. $-0{,}5x^2 + x - 0{,}5 = 0$

c. $x^2 - \sqrt{6}\,x + 2 = 0$

d. $x^4 + 12x^2 + 27 = 0$ (poser $X = x^2$)

e. $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - x}$

f. $(4 - x^2)(3x^2 + 8x - 3) < 0$

g. $\dfrac{x}{x^2 - 8} \geqslant 3$

h. $3x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$ (poser $X = \sqrt{x}$)

155 **Changement de variable**

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$15X^2 + 11X - 14 = 0.$$

b. Utiliser un changement de variable pour résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ l'équation :

$$\frac{15}{(x-2)^2} + \frac{11}{x-2} - 14 = 0.$$

2. Utiliser la même méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $-7x + 2\sqrt{x} + 9 = 0$.

> **Info**
> • $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ correspond à $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.
> • $\mathbb{R}_+$ correspond à $[0\,;+\infty[$.
> ▶ Rabat I, Notations

156 La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs est égale à 1 085.

• Déterminer ces trois nombres entiers.

Fichier logiciel
Ex. 157
Manuel numérique enseignant

157 On considère, dans le plan muni d'un repère :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 3$;
- la droite (d_p) d'équation $y = x + p$ où p est un nombre réel fixé.

a. TICE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d_p) où p est défini comme un curseur variant de -8 à 8.
Conjecturer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d_p) en fonction des valeurs prises par p.

b. Calculer | Valider ou corriger la conjecture émise par le calcul.

c. Dans le cas où la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d_p) ont deux points d'intersection S et T, on appelle M le milieu du segment [ST]. À quel ensemble appartient le point M lorsque p décrit $\left]-\infty\,;\frac{21}{4}\right[$?

Aide Établir une conjecture à l'aide du logiciel de géométrie dynamique et calculer l'abscisse du point M.

158 **Vers le BAC** P est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + c \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

1. Chercher | Discuter, suivant les valeurs de c, du nombre de solutions réelles de l'équation $P(x) = 0$.

2. Pour cette question, on suppose que $c = -1$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$ et l'inéquation $P(x) < 0$.

b. Déterminer la forme canonique de P et en déduire son tableau de variations.

3. Calculer | Somme des entiers

a. Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$P(n+1) - P(1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

159 On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation suivante :

$$\frac{1}{x} + x = c \text{ où } c \neq 0.$$

a. Chercher | Discuter, suivant les valeurs de c, du nombre de solutions de cette équation.

b. Résoudre cette équation, si possible, pour $c = 3$.

c. Application : Peut-on trouver un nombre qui, ajouté à son inverse, donne pour résultat $\frac{34}{15}$? Justifier la réponse et déterminer ce nombre s'il existe.

160 On considère l'inéquation (I) : $mx^2 + 6x + 5 < 0$ où m est un nombre réel.

a. Résoudre l'inéquation (I) dans $\mathbb{R}$ pour $m = 1$, puis pour $m = 2$.

b. Déterminer l'ensemble des nombres réels m tels que l'inéquation (I) n'admette aucune solution dans $\mathbb{R}$.

161 **Coup de vent**

On considère une éolienne horizontale. La fréquence $f(v)$ de rotation de la pale (en tours par minute) est donnée en fonction de la vitesse v du vent (en km·h^{-1}) par la relation :

$$f(v) = -0{,}024v^2 + 6{,}4v + 600$$

pour $v \in [40\,;\,130]$.

Pour des raisons techniques, la fréquence de rotation de la pale ne peut excéder 1 000 tours par minute. Au-delà, la pale est arrêtée.

a. Résoudre l'inéquation $f(v) < 1\,000$ dans $[40\,;\,130]$. En déduire l'intervalle décrit par v permettant un bon fonctionnement de la pale.

b. Pour la valeur maximale de v acceptable, rechercher, sur l'échelle de Beaufort, la force et l'appellation du vent correspondant.

Info
L'**échelle de Beaufort** est une échelle de mesure de la force du vent comportant 13 degrés (de 0 à 12). Elle a été conçue en 1805 par l'officier de marine britannique Francis Beaufort (1774-1857).

162 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Les points A(15 ; 5,5), B(0 ; 13) et C(8 ; 3,4) appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$ représentant f dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer la valeur de c.

b. Montrer que a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 225a + 15b = -7{,}5 \\ 64a + 8b = -9{,}6 \end{cases}.$$

c. Résoudre le système.

d. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 0{,}1(x-10)^2 + 3.$$

e. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. a. Tracer $\mathscr{P}$ dans le plan muni d'un repère.

b. Tracer la droite (d) d'équation $y = 0{,}4x + 5$.

c. Conjecturer la position de $\mathscr{P}$ par rapport à (d).

d. Valider ou infirmer la conjecture du **2c** à l'aide d'un tableau de signes.

163 **Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$** **Approfondissement**

Calculer | Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

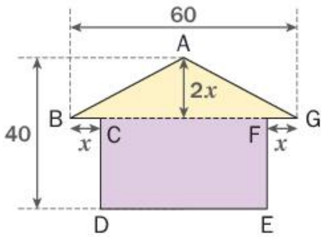
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

Aide On peut reconnaître la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x.

Fichier Python
Ex. 168
Manuel numérique enseignant

164 Logo

Une société sponsorise une course automobile et appose son logo, dessiné ci-dessous, sur les portières des véhicules engagés.



Les cotes sont exprimées en cm.

Pour limiter les coûts, l'entreprise souhaite minimiser l'aire du logo.

● **Modéliser** | Déterminer la valeur de x (en cm) qui permet de minimiser l'aire du logo.

165

x est un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n = 2^n - 1$.

1. En utilisant l'égalité obtenue dans l'exercice **163**, justifier que si $x^n - 1$ est un nombre premier alors $x = 2$.

2. On suppose que n n'est pas un nombre premier et on note d un diviseur de n avec $1 < d < n$ tel que $n = dk$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer la somme $1 + 2^d + (2^d)^2 + \ldots + (2^d)^{k-1}$.

b. Montrer que M_d divise M_n.

c. En déduire que M_n n'est pas premier.

3. Raisonner | Donner alors une **condition nécessaire** pour que $2^n - 1$ soit premier.

4. Vérifier que M_{11} n'est pas un nombre premier.

La condition énoncée au **3** est-elle une **condition suffisante** ?

Info

Les entiers de la forme $M_n = 2^n - 1$ sont appelés nombres de Mersenne. En janvier 2018, une équipe de chercheurs a prouvé que $2^{77\,232\,917} - 1$ est un nombre premier. Il s'écrit avec 23 249 425 chiffres.

166 Formule déjeuner

Un restaurant propose une formule « midi » à 8 €.

Son comptable a montré que pour x formules « midi » vendues ($x \in [0\,;100]$), le coût de revient C (en €) est donné par $C(x) = 0{,}25x^2 - 12x + 200$.

1. a. Exprimer la recette totale $R(x)$ pour x formules « midi » vendues.

b. Montrer que l'expression du bénéfice $B(x)$ pour x formules « midi » vendues ($x \in [0\,;100]$) est :

$$B(x) = -0{,}25x^2 + 20x - 200.$$

2. a. Dresser le tableau de variations de B sur l'intervalle $[0\,;100]$.

b. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

3. Déterminer combien de formules doivent être vendues pour que le bénéfice soit positif.

167 Factorisation de $x^n - a^n$ par $x - a$ — Approfondissement

Calculer | x et a sont deux nombres réels avec a non nul, et n est un entier naturel non nul.

a. En posant $u = \dfrac{x}{a}$, vérifier que $x^n - a^n = a^n \times (u^n - 1)$.

b. En utilisant l'égalité obtenue dans l'exercice **163**, démontrer que :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

c. Expliquer pourquoi cette égalité peut s'écrire :

$$x^n - a^n = (x - a) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}.$$

168 Méthode de Héron — ALGORITHMIQUE

Info

Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du 1er siècle après J.-C., a donné son nom à la méthode de Héron, qui permet de trouver une valeur approchée d'une racine d'un polynôme.

f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$.

1. À l'aide de la calculatrice, vérifier graphiquement qu'une racine x_1 de f peut être approchée par $a_1 = 1{,}5$. On a donc $x_1 = a_1 + e_1$ où e_1 est l'erreur commise en écrivant $x_1 \approx a_1$ avec $0 < e_1 < 1$.

2. On cherche une nouvelle valeur approchée de x_1.

a. Calculer | Montrer que :

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2e_1^2 + 4e_1(a_1 - 3) + 2(a_1 - 3)^2 - 5 = 0.$$

b. En déduire que $e_1 \approx -\dfrac{f(a_1)}{4(a_1 - 3)}$.

Aide On justifiera que $e_1^2 < e_1$ et on admettra que l'on peut négliger le terme e_1^2.

c. En conclure qu'une nouvelle valeur approchée de x_1 est $a_2 = a_1 - \dfrac{f(a_1)}{4(a_1 - 3)}$.

3. Lucas a écrit les deux fonctions en Python suivantes.

```
def f(x):
    return 2*(x-3)**2-5

def methode_heron(g,a,p):
# a : première valeur approchée
# p : précision souhaitée
    e=1
    while e>p:
        a1=a
        a=a-g(a)/(4*(a-3))
        e=abs(a1-a)
    return a
```

a. Quel est le rôle de chacune des variables `a1` et `e` ?

b. Dans la console, Lucas obtient :

```
>>> methode_heron(f,1.5,0.000001)
1.4188611699158102
```

Vérifier que l'affichage donne bien une valeur approchée d'une racine de f à 10^{-6} près.

SES

169 Une entreprise fabrique des composants électroniques. Sa production mensuelle est inférieure à 12 000 articles. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $[0 ; 12]$ par $C(x) = 0{,}6x^2 - 0{,}62x + 18{,}24$.
Chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 7 €.

1. L'entreprise a produit et vendu 4 000 articles en mai 2018 et 6 500 articles en juin 2018.
Le bénéfice a-t-il été plus important au mois de juin ?

2. On note $R(x)$ le montant, en milliers d'euros, de la recette mensuelle pour x milliers d'articles vendus.
Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

3. Représenter | À l'aide de la calculatrice, tracer les courbes représentatives des fonctions C et R.
Avec la précision permise par le graphique, déterminer :

a. l'intervalle dans lequel doit se situer x pour que le bénéfice mensuel réalisé soit positif ;

b. la valeur de x pour laquelle le bénéfice mensuel est maximal.

4. On note $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

a. Vérifier que, pour tout $x \in [0 ; 12]$:
$$B(x) = -0{,}6x^2 + 7{,}62x - 18{,}24.$$

b. Étudier le signe de $B(x)$ et les variations de la fonction B sur $[0 ; 12]$.

5. En déduire le nombre d'articles que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice mensuel :

a. positif ;

b. maximal.

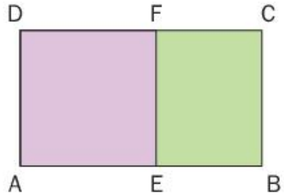
Fiche métier
Contrôleur·se de gestion
hatier-clic.fr/ma1103a

Arts

170 **Le nombre d'or**

On appelle **format d'un rectangle** le quotient de sa longueur L par sa largeur l.
On considère un rectangle ABCD de longueur AB = L et de largeur AD = l telles que $l < L < 2l$.
On construit le carré AEFD dans le rectangle ABCD.

a. En notant x le format du rectangle ABCD, vérifier que $x > 1$ et que le format du rectangle EBCF est égal à $\dfrac{1}{x-1}$.



b. ABCD est appelé **rectangle d'or** s'il a le même format que EBCF.
Montrer que ABCD est un rectangle d'or si et seulement si $x^2 - x - 1 = 0$.

c. En déduire la valeur à donner à x pour que ABCD soit un rectangle d'or ; on note Φ ce nombre réel.

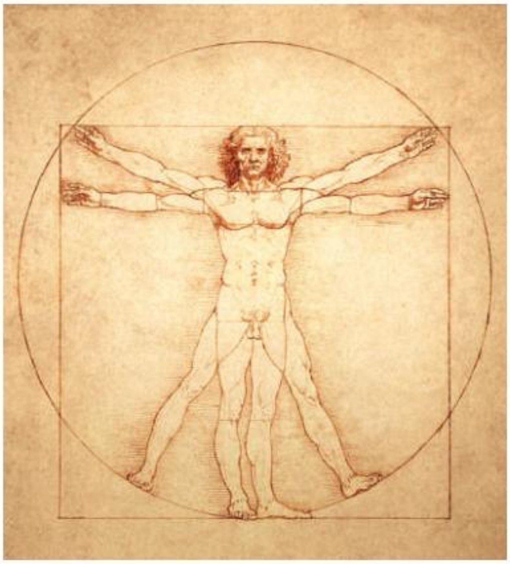
d. Montrer que $\Phi^4 = 3\Phi + 2$.

e. LOGIQUE Raisonner | Montrer que ABCD est un rectangle d'or si et seulement si EBCF est un rectangle d'or.

f. Le nombre Φ est appelé le **nombre d'or**.
Rechercher pourquoi Φ est parfois appelé divine proportion.

Maths à l'oral
Présentez à la classe un diaporama sur ces recherches en faisant le lien avec le dessin ci-contre.

D'après Bac L Centres étrangers, juin 2004.



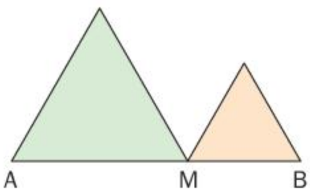
L'Homme de Vitruve, Léonard de Vinci, vers 1490.

Fiche métier
Designer graphique
hatier-clic.fr/ma1103b

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

171 Un segment [AB] a pour longueur 12 cm. M est un point du segment [AB] tel que AM = x (en cm). On forme sur les segments [AM] et [MB] deux triangles équilatéraux.



- Pour quelle valeur de x la somme des aires (en cm^2) de ces triangles est-elle minimale ?

172 Triplets pythagoriciens
Un triplet pythagoricien est un triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ de nombres entiers naturels non nuls vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$.
En classe, après un exposé sur les triplets pythagoriciens, Lana a affirmé que l'on pouvait créer des triplets pythagoriciens de la façon suivante : on choisit un nombre a impair, puis on détermine b et c tels que leur différence vaut 1 et leur somme est égale au carré de a.
- Que penser de l'affirmation de Lana ?

Défis

173 Un batelier descend une rivière de 120 km.
Il la remonte ensuite et met un jour en plus car il parcourt chaque jour 6 km de moins qu'en descendant.
- Déterminer le nombre de jours que ce batelier a mis pour descendre.

D'après Brevet élémentaire de Besançon, 1927.

174 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0.$$

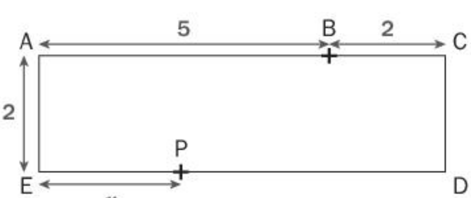
Aide Utiliser le changement de variable $X = x + \dfrac{1}{x}$.

175 h désigne une fonction polynôme du second degré.
- À l'aide de la capture d'écran incomplète ci-contre, déterminer l'expression de $h(x)$.

```
>>> def h(x):
        return ▇▇▇▇▇▇▇▇

>>> [h(1), h(2), h(5)]
[0, 20, 128]
```

176 AEDC est un rectangle tel que AC = 7 et AE = 2, comme représenté ci-contre.
B est un point de [AC] tel que AB = 5.
P est un point de [ED] tel que EP = x.
On note $f(x) = \text{PA}^2 + \text{PB}^2 + \text{PC}^2$.
- Démontrer que f admet un minimum, puis déterminer la valeur de ce minimum ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint.



En groupe

177 Un grand triangle
Déterminer le périmètre d'un triangle rectangle connaissant son aire $\mathcal{A} = 2\,340$ et la longueur de son hypoténuse $h = 97$.

Essayons de retrouver ensemble les formules utiles !

Analyse

Isaac Barrow
(1630-1677)

Mathématicien et philosophe anglais

Auteur d'un important travail sur la **notion de tangente à une courbe** (▶ Chapitre 4), ce professeur de Newton est considéré comme un inspirateur du calcul infinitésimal.

Jean Bernoulli
(1667-1748)

Mathématicien suisse

Proche de Leibniz, il étudie, avec son frère Jacques Bernoulli (1654-1705), le calcul infinitésimal, puis développe des applications et participe à la diffusion de ce nouveau calcul.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Mathématicien et philosophe allemand

Philosophe, savant aux multiples facettes et conseiller politique, il étudie les mathématiques auprès de Christian Huygens (1629-1695) et joue un rôle majeur dans l'invention du calcul infinitésimal. Il est également le fondateur de l'Académie des sciences de Berlin (1700).

Isaac Newton
(1642-1727)

Mathématicien et physicien anglais

Reconnu comme le fondateur de la mécanique classique avec sa théorie de la gravitation universelle, il a également révolutionné d'autres domaines scientifiques. En optique, il développe une théorie de la couleur et, en mathématiques, il est considéré comme l'un des inventeurs du **calcul infinitésimal** (▶ page suivante), qu'il nomme calcul des fluxions et des fluentes.

Leonhard Euler
(1707-1783)

Mathématicien et physicien suisse

Savant prolifique, il aborde au fil de son œuvre l'ensemble des branches des mathématiques. Par son travail, il contribue aux développements ultérieurs du calcul infinitésimal au fil du XVIIIe siècle.

Guillaume de l'Hospital
(1661-1704)

Mathématicien français

Il suit les enseignements de Jean Bernoulli et **rédige le premier traité en français sur le calcul différentiel** : *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696) qui restera longtemps un ouvrage de référence.

Une querelle de priorité entre Leibniz et Newton

Invention majeure de la fin du XVII^e siècle, le calcul différentiel et intégral, aussi appelé infinitésimal, va devenir très vite un outil mathématique incontournable. La notion de fonction dérivée (▶ Chapitre 4) provient du calcul différentiel.

Les historiens considèrent aujourd'hui que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) et Isaac Newton (1642-1727) ont découvert tous les deux ce calcul, indépendamment l'un de l'autre, à quelques années d'intervalle. Le premier texte de Leibniz à ce sujet paraît en 1684 tandis que ceux de Newton sont plus tardifs, mais il est établi que ce dernier les avait écrits bien avant de les publier. Pourtant, à l'époque, la paternité de ce nouveau calcul va susciter une vive controverse. Dès 1699, Newton et son entourage commencent à clamer qu'il en est « le plus ancien inventeur » et accusent Leibniz de plagiat. Finalement, un comité de la *Royal Society*, institution présidée par Newton, est réuni pour arbitrer la querelle et, en 1711, tranche sans surprise en faveur de Newton.

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales: TAB.XII.

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d $\overline{ax}$ erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*; si sit z − y + w + x æqu. v, erit d $\overline{z - y + w + x}$ seu dv, æqu dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro + z scribi + dz, pro − z scribi − dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

▲ *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, G. W. Leibniz, 1684.

La diffusion du nouveau calcul

Très rapidement, **le calcul infinitésimal** connaît un succès important et **s'avère un outil efficace pour résoudre des problèmes physico-mathématiques** qui, jusque-là, résistaient aux savants. Dans les premières décennies, ils sont pourtant peu nombreux en Europe à maîtriser ce nouveau calcul : Leibniz, Newton, les Bernoulli, L'Hospital, etc. Souvent éloignés géographiquement, ils prennent l'habitude de s'écrire pour se lancer des défis.

Un des problèmes qui les occupe est celui de la chaînette. Il s'agit de déterminer la courbe formée par une chaîne au repos suspendue par ses deux extrémités. En 1690, Jean Bernoulli établit l'équation précise de cette courbe et montre notamment qu'elle fait intervenir la fonction exponentielle (▶ Chapitre 6).

Zoom sur…

Sofia Kovalevskaïa

Née à Moscou, Sofia Kovalevskaïa (1850-1891) est remarquée très jeune pour ses capacités scientifiques. À 19 ans, elle s'inscrit à l'université d'Heidelberg en Allemagne et part ensuite à Berlin suivre des cours particuliers avec le grand mathématicien Karl Weierstrass (1815-1897). **Elle étudie les équations aux dérivées partielles, publie un mémoire sur la forme des anneaux de Saturne et obtient son doctorat à 24 ans.** Elle est la première femme à obtenir ce titre en Allemagne. Après un retour difficile en Russie, elle s'installe à Stockholm où elle devient professeure d'université.

CHAPITRE 4

Dérivation

La dérivation permet d'étudier des situations variées en physique, en économie, etc. Elle permet par exemple, en cinématique, de calculer la vitesse instantanée d'un véhicule à tout instant. En comptabilité, elle permet de déterminer le coût marginal, c'est-à-dire le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

- Activités 1 et 2
- Cours 1
- Savoir-faire 1 et 2
- Quiz 13 à 17
- Les incontournables 31 à 35
- Entraînement 42 à 60

OBJECTIF 2

Calculer la dérivée d'une fonction usuelle

- Activité 3
- Cours 2
- Savoir-faire 3
- Quiz 18 à 21
- Les incontournables 36 et 37
- Entraînement 61 à 82

OBJECTIF 3

Calculer la dérivée d'une fonction

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 4 et 5
- Quiz 22 et 23
- Les incontournables 38 à 41
- Entraînement 83 à 105

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

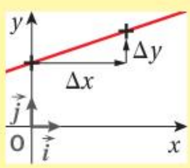
- Comment définir une droite ?
- Dans le plan, qu'appelle-t-on équation réduite de droite ? Quelle est sa forme ?
- Citer les fonctions de référence que vous connaissez.

Rappels

Équations de droites

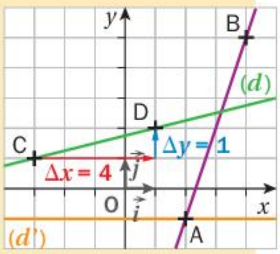
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation de droite** de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des nombres réels.
- Un point $M(x_M ; y_M)$ appartient à cette droite si et seulement si $y_M = mx_M + p$.
- Si (d) est une droite d'équation $y = mx + p$ passant par les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ distincts, alors le nombre réel m est appelé **la pente** (ou coefficient directeur) de (d) et il est donné par $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Pour lire graphiquement la **pente** m d'une droite, on place deux points distincts sur la droite ; m est alors égale au rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Exemples

On considère les points $A(2 ; -1)$, $B(4 ; 5)$ et les droites (d) et (d') représentés ci-contre dans le plan muni d'un repère.



- Les points A et B n'ont pas la même abscisse, donc la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$.

Sa pente m vaut $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-(-1)}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

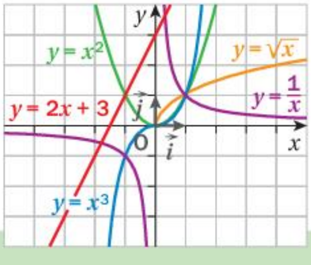
$A(2 ; -1) \in (AB)$ donc $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow -1 = 3 \times 2 + p$
$\Leftrightarrow p = -1 - 6 = -7$.

Une équation de (AB) est donc $y = 3x - 7$.

- Par lecture graphique, on observe que la pente de la droite (d) est égale à $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{1}{4}$.
- La droite (d') est parallèle à l'axe des abscisses ; la pente de la droite (d') est donc égale à 0.

Fonctions de référence

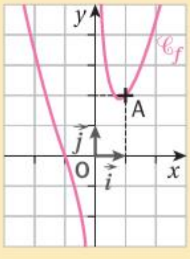
Fonction …	définie sur …	par $f(x) = …$
affine	$\mathbb{R}$	$ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)
carré	$\mathbb{R}$	x^2
inverse	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$
cube	$\mathbb{R}$	x^3
racine carrée	$[0 ; +\infty[$	$\sqrt{x}$



Exemples

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = u(x) + v(x)$ où u est la fonction carré et v la fonction inverse.
Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
A est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.



On calcule : $f(1) = 1^2 + \dfrac{1}{1} = 2$.
Donc l'ordonnée du point A est égale à 2 ; on a ainsi A(1 ; 2).

- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k \times u(x)$ où u est la fonction cube et $k = 4$.

Réactivation

Équations de droites

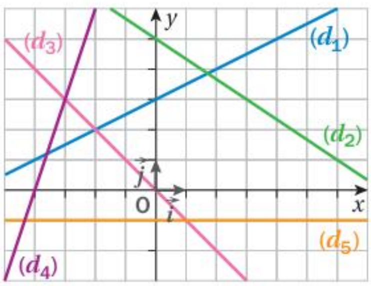
1 Déterminer une équation de chaque droite.

a. (d_1) qui passe par A(3 ; 1) et B(5 ; –7).

b. (d_2) qui passe par C(–2 ; 2) et D(1 ; –1).

c. (d_3) qui passe par E(5 ; 0) et F(–4 ; 0).

2 Pour chacune des droites représentées ci-dessous, lire graphiquement sa pente.

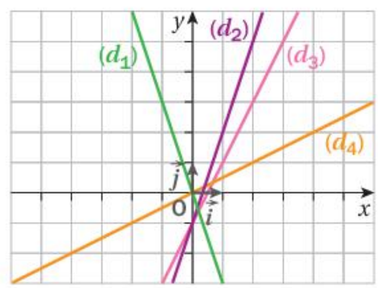


3 **Vrai ou faux ?**

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. « Sur le graphique ci-dessous, les droites (d_1) et (d_2) ont des pentes opposées. »

b. « Sur le graphique ci-dessous, la pente de la droite (d_3) est l'inverse de celle de la droite (d_4). »



4 Lila part à la chasse au trésor à l'aide d'une carte munie d'un repère, retrouvée dans des archives. Avec un détecteur de métaux, elle parcourt le segment [DA] avec D(20 ; 25) et A(32 ; 50).

- Sachant que le trésor se trouve au point T(24 ; 40), Lila va-t-elle le trouver ?

Fonctions de référence

5 **QCM**

f est la fonction carré ; on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère. A et M sont les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et a, où a est un nombre réel différent de 1.

1. L'ordonnée du point M vaut :

a. $a + 1$. **b.** a^2. **c.** on ne peut pas savoir.

2. La pente de la droite (AM) vaut :

a. $\dfrac{a^2-1}{a-1}$. **b.** $a - 1$. **c.** $\dfrac{a^2-1}{1-a}$.

3. Si $a \neq 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux points distincts d'ordonnée a^2. Leurs abscisses sont :

a. $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$. **b.** a et a^2. **c.** $-a$ et a.

6 Écrire chacune des fonctions suivantes sous la forme $x \mapsto u(x) + v(x)$, somme de deux fonctions de référence u et v, ou sous la forme $x \mapsto k \times u(x)$, produit d'un nombre réel k par une fonction de référence u.

On précisera dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction.

a. $f_1 : x \mapsto x^3 + 5x + 7$ **b.** $f_2 : x \mapsto 4x^3$

c. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x} - 5x + 3$ **d.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2+5}{3}$

e. $f_5 : x \mapsto \dfrac{-3}{x}$ **f.** $f_6 : x \mapsto x^2 + 28x - 7$

g. $f_7 : x \mapsto \dfrac{5}{x}$ **h.** $f_8 : x \mapsto -\dfrac{7x^3}{4}$

Corrigés p. 368

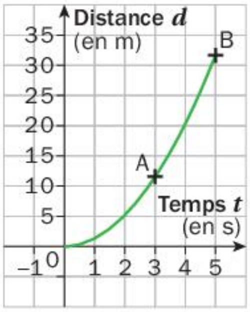
Activités

Fichier logiciel et +Prof
Activité 2
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

1 Vitesse instantanée

Arthur vient d'obtenir son permis de conduire ; il s'intéresse au moyen de calculer la vitesse de sa voiture à tout instant de la phase de démarrage. Pour son modèle de voiture, la distance parcourue, en mètres, après t secondes est donnée par $d(t) = 1{,}265t^2$ pour tout $t \in [0 ; 5]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction d dans le plan muni d'un repère. A et B sont les points de la courbe d'abscisses respectives 3 et 5.



1. Calculer la vitesse moyenne de la voiture entre les instants $t = 3$ et $t = 5$. Comment interpréter graphiquement cette vitesse ?

Aide La **vitesse moyenne** est égale au quotient de la distance parcourue par le temps mis pour parcourir cette distance.

2. a. Pour tout $h \in]0 ; 2]$, montrer que la vitesse moyenne $V(h)$ entre les instants $t = 3$ et $t = 3 + h$ vaut :

$$V(h) = \frac{d(3+h) - d(3)}{h} = 1{,}265h + 7{,}59.$$

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

h	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
$V(h)$					

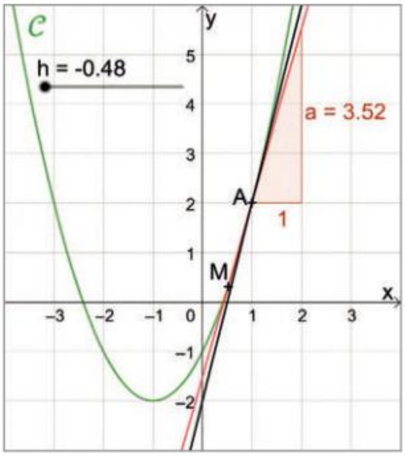
c. Quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, de quelle valeur se rapproche la vitesse moyenne* $V(h)$?
Quelle est la vitesse instantanée, en km·h^{-1}, du véhicule après 3 secondes ?

* Cette valeur « limite » est appelée la **vitesse instantanée** de la voiture à l'instant $t = 3$.
On l'appelle aussi le **nombre dérivé** de la fonction d en 3.

OBJECTIF 1
Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

2 Vers la tangente TICE

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et on considère le point A(1 ; $f(1)$).



1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- tracer la courbe $\mathscr{C}$ et placer le point A ;
- créer un curseur h variant de –0,5 à 0,5 avec un pas de 0,001 et placer le point M($1 + h$; $f(1 + h)$) ;
- construire la droite (AM), sécante à la courbe $\mathscr{C}$, puis faire afficher sa pente.

b. Que remarque-t-on lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?

Aide Utiliser l'outil Pente .

2. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $1 + h$.

a. Exprimer la pente $t(h)$ de la droite (AM) en fonction de h et simplifier l'expression obtenue.

b. Quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, vers quel nombre réel se rapproche la pente $t(h)$? On le note ℓ.

On dit que lorsque h tend vers 0, $t(h)$ tend vers ℓ.

c. On considère la droite $\mathscr{T}$ passant par le point A et de pente ℓ.

La droite $\mathscr{T}$ est appelée la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

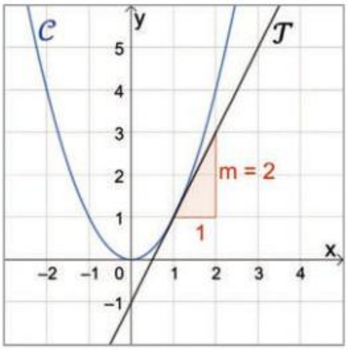
Construire la droite $\mathscr{T}$ dans la fenêtre précédente du logiciel de géométrie dynamique.

Aide Saisir `Tangente(A, f)` dans la zone de saisie.

OBJECTIF 2
Calculer la dérivée d'une fonction usuelle

3 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.



1. Conjecturer TICE

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ;
- créer un curseur a variant de –4 à 4 avec un pas de 1 ;
- construire la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, puis faire afficher sa pente.

b. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide des données relevées avec le logiciel.

a	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f'(a)$									

c. Conjecturer une expression de $f'(a)$ en fonction de a.

2. Démontrer

a. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, calculer le taux de variation de f entre a et $a + h$.

b. Justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer l'expression de $f'(a)$ en fonction de a.

La fonction $a \mapsto f'(a)$ est appelée la **fonction dérivée de f**.

OBJECTIF 3
Calculer la dérivée d'une fonction

4 Conjecturer une formule En groupe

1. On considère les fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 2)$

$f_2 : x \mapsto (3x + 2)(x^3 - 5)$

$f_3 : x \mapsto 3x\sqrt{x}$

$f_4 : x \mapsto (-4x + 101)(-7x - 99)$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x} \times (3x + 1)$

$f_6 : x \mapsto (x^2 - 4)(x + 17)$

a. Les expressions des fonctions ci-dessus sont de la forme $x \mapsto u(x) \times v(x)$.
Identifier pour chacune d'elles les fonctions u et v, puis calculer leurs dérivées u' et v'.

b. TICE À l'aide d'un logiciel de calcul formel, calculer la dérivée des fonctions f_1 à f_6 en utilisant la commande « deriver » ou « dérivée » comme dans les exemples ci-dessous.

Avec *Xcas* :

```
deriver((x^2+3)(x^2-5x+2))
```
$$2x(x^2 - 5x + 2) + (x^2 + 3)(2x - 5)$$

Avec *GeoGebra* :

1 Dérivée$\left(\dfrac{1}{x}(3x+1)\right)$

$\rightarrow -\dfrac{(3x+1)}{x^2} + \dfrac{3}{x}$

c. À l'aide des affichages obtenus, conjecturer une formule de dérivation, faisant intervenir les fonctions u, v, u' et v', pour une fonction produit $x \mapsto u(x) \times v(x)$.

2. Reprendre la démarche de la question **1** avec d'autres fonctions pour conjecturer une formule de dérivation pour une fonction quotient $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Maths à l'oral

Présentez en groupe vos conjectures en les illustrant avec un ou plusieurs exemples.

Fichier logiciel
Taux de variation
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1 Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

Savoir-faire 1 et 2 p. 115

f désigne une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre réel appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient aussi à I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

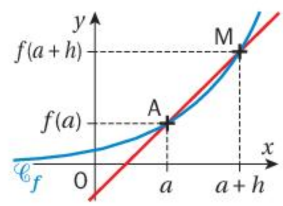
Définition

Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est le rapport :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Interprétation graphique

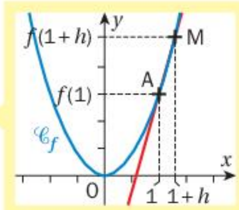
On note A et M les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a + h$. La droite (AM) est une sécante issue de A à $\mathscr{C}_f$;
sa **pente** vaut $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Il s'agit du **taux de variation** de f entre a et $a + h$.



A(a ; $f(a)$) et M($a + h$; $f(a + h)$)

Exemple On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
Le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$ vaut :

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3(1+h)^2-3}{h} = \frac{6h+3h^2}{h} = \frac{h(6+3h)}{h} = 6+3h.$$



La pente de la sécante (AM) est $6 + 3h$.

Définitions

- On dit que la fonction f est **dérivable en a** si le taux de variation $t(h)$ de f entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel ℓ lorsque h tend vers 0.
- ℓ est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en a** ; on le note $f'(a)$.

On a $f'(a) = \ell = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

« $t(h)$ tend vers ℓ lorsque h tend vers 0 » signifie que « $t(h)$ devient proche de ℓ lorsque h se rapproche de 0 ».

Interprétation graphique du nombre dérivé

Lorsque h tend vers 0, le point M de $\mathscr{C}_f$ se rapproche du point A. Dire que $t(h)$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers 0 revient donc à dire que la pente de la droite (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit « limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 ».

En reprenant l'**exemple** ci-dessus,
lorsque h tend vers 0, $t(h)$ tend vers 6. On a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6$.
Ainsi f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 vaut $f'(1) = 6$.

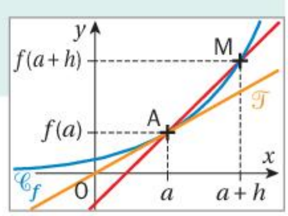
Si h se rapproche de 0, alors $6 + 3h$ devient proche de 6.

Définition

f est une fonction dérivable en a.
La **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(a ; $f(a)$)** est la droite passant par le point A et de pente $f'(a)$.

Interprétation graphique

La tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A est la droite qui est « la plus proche » de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point A : c'est la « limite des sécantes issues de A » à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemples de fonctions non dérivables en 0
Exercices 55 et 56 p. 123

Propriété

Si la fonction f est dérivable en a, alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(a ; $f(a)$) a pour équation $\boldsymbol{y = f(a) + f'(a) \times (x - a)}$.

Démonstration : exercice 107 p. 129

Si le nombre dérivé $f'(a)$ vaut 0, alors $y = f(a)$, et la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

En reprenant l'**exemple** ci-dessus, on a $f'(1) = 6$ et $f(1) = 3$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A(1 ; 3) a donc pour équation $y = 3 + 6(x - 1)$, c'est-à-dire $y = 6x - 3$ (équation réduite).

OBJECTIF 2 Calculer la dérivée d'une fonction usuelle

Savoir-faire 3 p. 116

Définitions

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout nombre réel appartenant à I.
- Lorsque f est dérivable sur I, la **fonction dérivée** de f est la fonction f' qui, à chaque nombre réel x de I, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Cette fonction est notée $f' : x \mapsto f'(x)$.

L'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable est appelé **l'ensemble de dérivabilité de f**.

f' est aussi appelée **dérivée** de f.

Exemple On considère la fonction affine $f : x \mapsto 4x + 7$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel a et pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 4$, d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 4$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f'(x) = 4$.

Dans d'autres disciplines, si $y = f(x)$, on peut aussi écrire $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

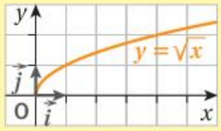
Exercice 112 p. 130

Propriété Dérivées des fonctions usuelles

Fonction ...	définie sur ...	par ...	dérivable sur ...	Fonction dérivée
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$[0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration à compléter : ex 106 p. 129 et Démonstrations : ex 108 p. 129

La fonction racine carrée est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



Exercice 106 p. 129

Exemple La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f'(x) = 3x^2$.

On prend l'exemple $n = 3$ dans le cas de la fonction puissance.

Propriété Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction somme $x \mapsto u(x) + v(x)$, notée $u + v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$.

Démonstration : exercice 109 p. 129

On retient : $(u + v)' = u' + v'$

Exemple On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 7$.
f est la somme de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f'(x) = 2x + 4$.

Propriété Dérivée d'un produit par un nombre réel

Si k est un nombre réel et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto k \times u(x)$, notée $k \times u$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{(k \times u)'(x) = k \times u'(x)}$.

Démonstration : exercice 110 p. 129

On retient : $(ku)' = ku'$

Exemple On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -3\sqrt{x}$.
Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = -3 \times u(x)$ où $u(x) = \sqrt{x}$.
La fonction u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est définie, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, par $f'(x) = -3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Conséquence des deux propriétés : les fonctions polynômes (Chapitre 3) sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Savoir-faire 3 p. 116

OBJECTIF 3 Calculer la dérivée d'une fonction

Savoir-faire 4 et 5 p. 117

Propriété Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit $x \mapsto u(x) \times v(x)$, notée $u \times v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Démonstration rédigée p. 128

On retient : $(u \times v)' = u'v + uv'$

Conséquence

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto (u(x))^2$, notée u^2, est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$ (▸ Info, p. 128).

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

f est le produit des fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, donc elle est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

$\forall x \in\ ]0\ ;+\infty[$, $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$$= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\ ;+\infty[$ mais dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

Propriété Dérivée d'un quotient

▸ Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction quotient $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$, notée $\dfrac{u}{v}$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$.

▸ Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$, notée $\dfrac{1}{v}$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{v'(x)}{(v(x))^2}$.

Démonstration : exercice 111 p. 129

⚠ Il faut ici vérifier que pour tout nombre réel x dans I, on a $v(x) \neq 0$.

On retient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Exemple

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $h(x) = \dfrac{2x-4}{x+2}$.

h est le quotient des fonctions $u : x \mapsto 2x - 4$ et $v : x \mapsto x + 2$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

La fonction v s'annule en $x = -2$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $h'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$.

$$= \frac{2(x+2) - (2x-4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2}.$$

h est une **fonction homographique** : c'est le quotient de deux fonctions affines.

Propriété (admise) Dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si a et b sont deux nombres réels tels que pour tout x dans l'intervalle I, $ax + b$ appartient à J, alors la fonction $f : x \mapsto g(ax + b)$ est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

f s'écrit $x \mapsto g(2x - 4)$ où g est la fonction racine carrée qui est dérivable sur $J =]0\ ;+\infty[$.

Or, $2x - 4 \in J \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in\ ]2\ ;+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $I =]2\ ;+\infty[$ et, $\forall x \in I$, $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

La fonction racine carrée n'étant pas dérivable en $x = 0$, f n'est pas dérivable en $x = 2$.

1 Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

OBJECTIF 1
Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

a. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 2$ en $a = 1$. **b.** $g : x \mapsto \sqrt{x+2}$ en $a = -2$.

Solution

a. On calcule le taux de variation de f entre 1 et $(1 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}^*$:

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+4(1+h)-2-3}{h} = \frac{1-2h+h^2+4+4h-5}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h+6.$$

Lorsque h tend vers 0, $(h + 6)$ tend vers le nombre réel 6.

Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6$.

Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 vaut $\boxed{f'(1) = 6}$.

b. On calcule le taux de variation de g entre -2 et $-2 + h$, avec $h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t(h) = \frac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = \frac{\sqrt{-2+h+2}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h tend vers 0 avec $h > 0$, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en conservant des valeurs positives, donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = +\infty$.

La limite du taux de variation n'est pas un nombre réel, donc g n'est pas dérivable en -2.

$f(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 2 = 3$

On simplifie l'expression en factorisant par h au numérateur.

On applique la définition du nombre dérivé.

g est définie sur $[-2 ; +\infty[$ (car $x + 2$ doit être positif). $-2 + h > -2 \Leftrightarrow h > 0$.

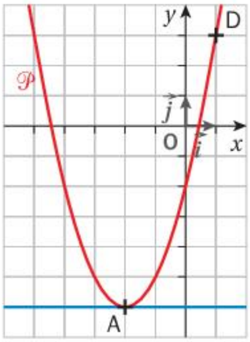
2 Déterminer une équation d'une tangente

OBJECTIF 1
Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

On a tracé ci-contre la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 2$, ainsi que la tangente à $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse -2.

a. Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$.

b. Justifier que la parabole $\mathscr{P}$ admet une tangente au point D d'abscisse 1. Donner une équation de cette droite.



Solution

a. La tangente à $\mathscr{P}$ au point A a pour pente 0 donc $\boxed{f'(-2) = 0}$.

b. La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 6$ donc $\mathscr{P}$ admet une tangente au point D d'abscisse 1. Cette droite a pour équation $y = f(1) + f'(1) \times (x - 1)$.
Or $f'(1) = 6$ et $f(1) = 3$.
Donc une équation de la tangente est $y = 3 + 6(x - 1)$, c'est-à-dire $\boxed{y = 6x - 3}$.

La tangente au point A est horizontale, donc sa pente est 0.

Ce raisonnement a été détaillé dans le Savoir-faire 1 ci-dessus.

On applique la formule du cours.

Application

7 Déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

a. $f : x \mapsto 2x^2 + x - 1$ en $a = -1$.

b. $g : x \mapsto \sqrt{x-3}$ en $a = 3$.

8 Justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. $f : x \mapsto x^2 - 3$ en $a = 2$. **b.** $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ en $a = 1$.

Les incontournables 31 à 35 p. 121

3 Calculer la dérivée d'une fonction polynôme

OBJECTIF 2
Calculer la dérivée d'une fonction usuelle

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto 5x^4$

b. $g : x \mapsto -5x^2 + 7x + 2$

c. $h : x \mapsto 4x^3 - \dfrac{x^2}{3} - 7x + 2$

d. $l : x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{4}$

Solution

a. La fonction f est de la forme $5 \times u$ avec $u : x \mapsto x^4$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction puissance et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 4x^3$.
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 5 \times u'(x) = 5 \times 4x^3 = 20x^3.}$$

On reconnaît une fonction de la forme $k \times u$; on utilise donc la formule de la dérivée d'un produit par un réel :
$(k \times u)' = k \times u'$

b. La fonction g est de la forme $u + v$ avec $u : x \mapsto -5x^2$ et $v : x \mapsto 7x + 2$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction carré par un nombre réel. De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine. On en conclut que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -5 \times 2x = -10x$ et $v'(x) = 7$.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = u'(x) + v'(x) = -10x + 7.}$

On utilise ici la formule de la dérivée d'une somme :
$(u + v)' = u' + v'$

c. La fonction h est de la forme $u + v + w$ avec $u : x \mapsto 4x^3$, $v : x \mapsto -\dfrac{x^2}{3}$ et $w : x \mapsto -7x + 2$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction puissance par un nombre réel, et w est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$, $v'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 2x = -\dfrac{2x}{3}$ et $w'(x) = -7$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 12x^2 - \dfrac{2x}{3} - 7.}$

On utilise ici la formule de la dérivée d'une somme en l'appliquant à trois fonctions :
$(u + v + w)' = u' + v' + w'$

d. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $l(x) = \dfrac{1}{4} \times \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)$.
La fonction l est de la forme $\dfrac{1}{4} \times u$ avec $u : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles, dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc l est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ l'(x) = \dfrac{1}{4} \times u'(x) = \dfrac{1}{4} \times \left(3x^2 + 2x + 1\right) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{4}.}$

On applique la formule de la dérivée d'une somme pour calculer $u'(x)$, puis la formule de la dérivée d'un produit par un réel pour calculer $l'(x)$.

Application

9 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto 6x^5$

b. $g : x \mapsto -8x^2 + 4x - 21$

c. $h : x \mapsto 4x^3 - \dfrac{x^2}{3} - 7x + 2$

d. $k : x \mapsto -3x^2 + 8x - \dfrac{16}{3}$

e. $l : x \mapsto \dfrac{-5x^2 - x + 7}{5}$

f. $m : x \mapsto (x - 3)^2$

Aide Développer $(x - 3)^2$.

10 Arthur a utilisé un logiciel de calcul formel pour calculer la dérivée de trois fonctions :

deriver(7x²+7.5x+13) $7 * 2x + 7.5$
deriver(8x^3-5x²+15x-7.5) $8 * 3x^2 - 5 * 2x + 15$
deriver((-5x²+3x+7)/2) $\dfrac{-5 * 2x + 3}{2}$

• Retrouver les résultats obtenus avec le logiciel, puis donner une expression simplifiée de chacune des dérivées.

Les incontournables 36 et 37 p. 121

Vidéo
Calculer la dérivée d'un produit, d'un quotient
hatier-clic.fr/ma1117

OBJECTIF 3
Calculer la dérivée d'une fonction

4 Calculer la dérivée d'un produit

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto (2x^2+3x)(x^2-5x+2)$ **b.** $g : x \mapsto (5x+2)\sqrt{x}$

Solution

a. La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u : x \mapsto 2x^2 + 3x$ et $v : x \mapsto x^2 - 5x + 2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2 \times 2x + 3 = 4x + 3$ et $v'(x) = 2x - 5$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$= (4x+3)\times\left(x^2-5x+2\right)+\left(2x^2+3x\right)\times(2x-5)$$
$$= 4x^3 - 20x^2 + 8x + 3x^2 - 15x + 6 + 4x^3 - 10x^2 + 6x^2 - 15x$$
$$= \boxed{8x^3 - 21x^2 - 22x + 6.}$$

b. La fonction g est de la forme $u \times v$ avec $u : x \mapsto 5x + 2$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

Donc g est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 5$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc $\forall x \in\ ]0\ ;+\infty[$:

$$g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$= 5 \times \sqrt{x} + (5x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5\times\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+5x+2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{15x+2}{2\sqrt{x}}}.$$

On reconnaît la forme d'un produit $u \times v$ et on identifie les fonctions u et v.

On utilise la formule : $(u \times v)' = u'v + uv'$

On développe, puis on simplifie l'expression obtenue.

On détermine le plus grand ensemble sur lequel les deux fonctions sont dérivables.

OBJECTIF 3
Calculer la dérivée d'une fonction

5 Calculer la dérivée d'un quotient

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ **b.** $g : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

Solution

a. La fonction f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v : x \mapsto x^3$, fonction usuelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme v ne s'annule qu'en 0, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $v'(x) = 3x^2$; ainsi $f'(x) = -\dfrac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\dfrac{3x^2}{\left(x^3\right)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = \boxed{-\dfrac{3}{x^4}}.$

b. La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 3x - 1$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geqslant 1$, v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3\times\left(x^2+1\right)-(3x-1)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \boxed{\frac{-3x^2+2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}}.$$

On cherche les éventuelles valeurs pour lesquelles la fonction v s'annule.

On utilise la formule : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Application

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

11 **a.** $f : x \mapsto 3x\left(2x^2+x-1\right)$
b. $g : x \mapsto (-4x+7)\left(-x^2+1\right)$

12 **a.** $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3}$ **b.** $g : x \mapsto \dfrac{3x+6}{x^2+2}$

Les incontournables 38 à 41 p. 121

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Fonction dérivable, nombre dérivé

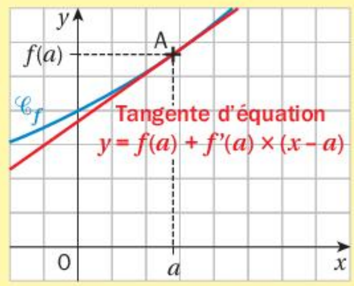
f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- f est **dérivable en a** si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ où ℓ est un nombre réel.
- $f'(a) = \ell$ est le **nombre dérivé** de la fonction f en a.
- f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout nombre réel a de I.
- Lorsque f est dérivable sur I, la **fonction dérivée** de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I.

Interprétation graphique

Si la fonction f est dérivable en a, la droite passant par le point A(a ; $f(a)$) et de pente $f'(a)$ est la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A**.

Elle a pour équation $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.



Cours 1 p. 112

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction …	définie sur …	par …	dérivable sur …	Fonction dérivée
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$[0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Cours 2 p. 113

Opérations sur les fonctions dérivées

Les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
Somme : $u + v$	$u' + v'$	I
Multiplication par un nombre réel : ku ($k \in \mathbb{R}$)	ku'	I
Produit : uv	$u'v + uv'$	I
Inverse : $\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ dérivable sur I.
Quotient : $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, alors $\dfrac{u}{v}$ dérivable sur I.
Composée : $f : x \mapsto g(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)	$f' : x \mapsto a \times g'(ax + b)$	Si g dérivable sur J et, $\forall x \in I$, $ax + b \in J$, alors f dérivable sur I.

Cours 2 et 3, p. 113-114

... ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
13 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ vaut :	-2	$\frac{-2h-2}{h}$	$\frac{-2h}{h}$	$-2h - 1$
14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ vaut :	2	$2 + h$	$\frac{2h+h^2}{h}$	$2 + h^2$
15 La limite, lorsque h tend vers 0, de $t(h) = \frac{h^2 - 3h}{h}$ vaut :	-2	-3	0	Elle n'existe pas.
16 La tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse -2 a pour pente :	4	$f'(-2)$ où f est la fonction carré.	-2	-4
17 Une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ est :	$y = -a^2 + 2ax$	$y = a^2 + 2ax$	$y = -a^2 + 2a(x - a)$	$y = 2a + a^2(x - a)$
18 La dérivée d'une fonction affine est toujours :	non monotone.	strictement décroissante.	constante.	strictement croissante.
19 La pente de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 2 vaut :	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
20 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 25$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ldots$:	$2x - 2$	$2x + 23$	$x - 2$	$2(x - 1)$
21 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{6}{x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \ldots$:	$\frac{6}{x^2}$	$-\frac{6}{x^2}$	$-\frac{3}{x^2}$	6
22 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1) \times (2x - 3)$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ldots$:	$4x$	$6x^2 - 6x + 2$	$2(3x^2 - 3x + 1)$	$2x(2x-3) + 2(x^2+1)$
23 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{x+2}{3x\quad 6}$. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, f'(x) = \ldots$:	$\frac{3x - 6 - 3(x+2)}{(3x-6)^2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-12}{(3x-6)^2}$	$\frac{6x}{(3x-6)^2}$

Corrigés p. 368

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

24 À chacun sa formule !

Pour chacune des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer une expression de sa fonction dérivée en utilisant l'une des formules ci-dessous.
Contrainte : chaque formule ne peut être utilisée qu'une seule fois.

a. $f_1 : x \mapsto (3x+2)^3$ **b.** $f_2 : x \mapsto (3x+2)^2$ **c.** $f_3 : \dfrac{1}{x^2+1}$ **d.** $f_4 : x \mapsto x \times \dfrac{1}{x^2+1}$ **e.** $f_5 : x \mapsto \dfrac{3x+2}{7}$

Différentes formules pour calculer la dérivée d'une fonction

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = ku'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)$

25 Parlons stratégie ! À l'oral

Préciser l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction, puis calculer sa dérivée.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $p_1 : x \mapsto (2x+1)(1-3x)$ **b.** $p_2 : x \mapsto (5x+1)^2$ **c.** $p_3 : x \mapsto (x^2+7x+1)(8x-5)$
d. $p_4 : x \mapsto (3-5x)^2$ **e.** $p_5 : x \mapsto (8x-1)(8x+1)$ **f.** $p_6 : x \mapsto (1-11x)(x^3-9)$

Différentes stratégies pour calculer la dérivée d'une fonction

- **Stratégie 1** Je développe, puis je dérive la fonction polynôme.
- **Stratégie 2** J'utilise la dérivée du produit de deux fonctions.
- J'ai une **autre stratégie** !

26 Pas si dur ! À l'oral

Pour chacune des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de sa fonction dérivée en utilisant la dérivée d'une somme de fonctions usuelles.

a. $f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1} + (x-5)(1-x)$ **b.** $g : x \mapsto \sqrt{x^4+2x^2+1}$ **c.** $h : x \mapsto \left(x^2-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right) + \dfrac{\sqrt{5}x}{3} + 7{,}5\sqrt{11}$

27 En moins de 40 secondes !

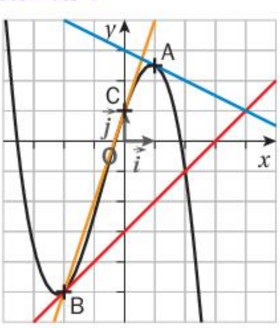
Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes dérivables sur $\mathbb{R}$.

a. $f_1 : x \mapsto 5x^3 + 7x^2 - 5x + 18$
b. $f_2 : x \mapsto (3x-5)^7$
c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+1}$ **d.** $f_4 : x \mapsto (x-1)(x+1)$

28 En moins de 30 secondes !

Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que trois de ses tangentes aux points A, B et C.

- Déterminer les valeurs des nombres dérivés $f'(0)$, $f'(-2)$ et $f'(1)$.



29 En moins de 30 secondes !

Préciser l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction.

a. $f_1 : x \mapsto x^2 + 4x + 9$ **b.** $f_2 : x \mapsto (x-3)^2 - 7$
c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x+7}{4x-1}$ **d.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{4x^2+6x-9}{(x+6)^2}$
e. $f_5 : x \mapsto \dfrac{4x^2+6x-9}{x^2+6}$ **f.** $f_6 : x \mapsto \sqrt{3x+8}$

30 Réfléchissons à une stratégie !

Christophe affirme qu'il peut déterminer en moins de 50 secondes l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

$q_1 : x \mapsto \dfrac{x-7}{x+3}$ $q_2 : x \mapsto \dfrac{6x+7}{4x-1}$ $q_3 : x \mapsto \dfrac{-4x+3}{11x+7}$

$q_4 : x \mapsto \dfrac{5x+3}{-8x+9}$

- Quelle stratégie utilise Christophe ?

Info Ces fonctions sont dites **homographiques**.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

31 Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

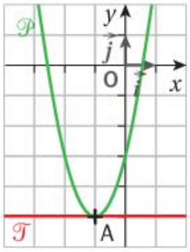
a. $f : x \mapsto -2x + 3$ en $a = 2$.
b. $g : x \mapsto 2x - 5$ en $a = -1$.
c. $k : x \mapsto 2x^2 - 3$ en $a = 2$.
d. $l : x \mapsto 2x^2 + 5x - 2$ en $a = 2$.

32 Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

a. $f : x \mapsto \sqrt{x-5}$ en $a = 5$.
b. $g : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$ en $a = 0$.
c. $k : x \mapsto \sqrt{4x-2}$ en $a = 2$.
d. $l : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ en $a = 0$.

Déterminer une équation d'une tangente

33 On a tracé ci-contre la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, ainsi que la tangente à $\mathcal{P}$ au point A d'abscisse -1.

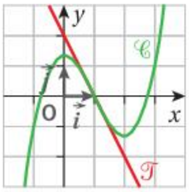


a. Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$.
b. Justifier que la parabole $\mathcal{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2. Donner une équation de cette droite.

34 Dans chaque cas, justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 1$ en $a = 2$.
b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en $a = 3$.

35 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, notée $\mathcal{T}$.



a. Déterminer par lecture graphique une équation de la droite $\mathcal{T}$.
En déduire $f'(1)$.
b. Déterminer par lecture graphique les valeurs de a pour lesquelles $f'(a) = 0$.

Calculer la dérivée d'une fonction polynôme

36 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto -6x^3$
b. $g : x \mapsto -4x^2 + 8{,}2$
c. $h : x \mapsto -3x^2 + 2x - 18$
d. $k : x \mapsto -2x^3 + 7x^2 - \dfrac{x}{3} + 12$
e. $l : x \mapsto \dfrac{5x^2 - 2x + 9}{3}$

37 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2}{5}$
b. $g : x \mapsto -5x^2 + 7{,}2x - 5$
c. $h : x \mapsto 8x^2 + \dfrac{5x-2}{7}$
d. $k : x \mapsto (3x - 7)^2$
e. $l : x \mapsto (5 - 3x)(5 + 3x)$

Aide Pour **d** et **e**, penser à développer.

Calculer la dérivée d'un produit

38 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sans développer.

a. $f : x \mapsto 3x\left(x^2 - 1\right)$
b. $g : x \mapsto (-2x + 3)(3x - 5)$
c. $h : x \mapsto \left(-5x^2 + 1\right)\left(2x^2 + 3x\right)$
d. $k : x \mapsto \dfrac{1}{x} \times (3x - 5)$

39 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sans développer.

a. $f : x \mapsto 5\sqrt{x} \times (3x + 1)$
b. $g : x \mapsto 10x\sqrt{x}$
c. $h : x \mapsto \left(3\sqrt{x} - 1\right)(2x + 1)$
d. $k : x \mapsto (5x + 1)^2$

Calculer la dérivée d'un quotient

40 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{1}{-2x+4}$
b. $g : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x+6}$
c. $h : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2+1}$
d. $k : x \mapsto \dfrac{x^3}{x+4}$

41 Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
b. $g : x \mapsto \dfrac{2x}{-3x+1}$
c. $h : x \mapsto \dfrac{-2x+1}{x^2+5x-1}$
d. $k : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Corrigés p. 368

Entraînement

Fichier Python
Ex. 50
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

Savoir-faire 1 et 2 p. 115

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

42 Vrai ou faux ?

f est une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre réel de I et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

a. « Si la fonction f est définie en a, alors elle est dérivable en a. »

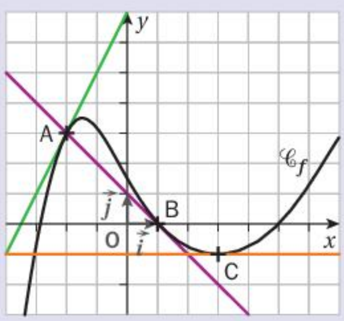
b. « Si le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$ ($h \in \mathbb{R}^*$) est égal à $\frac{2}{h}$, alors f n'est pas dérivable en 2. »

c. « Si le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$ ($h \in \mathbb{R}^*$) est égal à $-3h + 4$, alors $f'(3) = -3$. »

d. « Si la fonction f est dérivable en a, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :
$$y = f'(a) \times x + f(a) - a \times f'(a). »$$

e. « Si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse -2 une tangente d'équation $y = 4x + 3$, alors $f'(-2) = 4$. »

43 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre. On a tracé les tangentes aux points A, B et C.



a. Déterminer graphiquement $f'(-2)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

b. Déterminer une équation de chacune des tangentes tracées.

44 f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a. David a démontré que $f(5) = 121$ et $f'(5) = 0$.
Comment peut-il déterminer sans calcul une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5 ?

b. Mehdi a démontré que $f'(2) = f'(-2)$.
Que peut-il en déduire sur les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -2 et 2 ?

c. Sarah a démontré que $y = -3x + 2$ est une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.
Que peut-elle en déduire pour $f'(5)$ et pour $f(5)$?

Pour les exercices 45 et 46

Dans chaque cas, déterminer si la fonction est dérivable en a et, s'il existe, donner la valeur du nombre dérivé en a.

45 **a.** $f : x \mapsto -3x + 1$ en $a = 1$.
b. $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ en $a = 2$.
c. $h : x \mapsto x^2 + 7x - 3$ en $a = 3$.
d. $k : x \mapsto \sqrt{x-2}$ en $a = 2$.

46 **a.** $f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 1$ en $a = 0$.
b. $g : x \mapsto 2x^2 - 5$ en $a = 0$.
c. $h : x \mapsto (x - 3)^2$ en $a = 3$.
d. $k : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ en $a = 0$.

Pour les exercices 47 et 48

Justifier que la fonction f est dérivable en a et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

47 **a.** $f : x \mapsto x^2 - 4$ en $a = 2$.
b. $f : x \mapsto \frac{1}{2x}$ en $a = 1$.

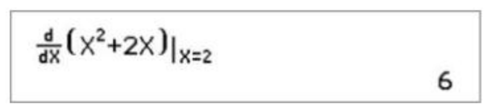
48 **a.** $f : x \mapsto x^2 - 2x + 6$ en $a = -1$.
b. $f : x \mapsto x^3$ en $a = 1$.

Aide $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.

a. Montrer que la fonction f est dérivable en 2.

b. Kim utilise sa calculatrice pour déterminer le nombre dérivé de f en 2 ; elle obtient l'affichage suivant :



Retrouver par le calcul la valeur obtenue pour $f'(2)$.

c. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre dérivé de f en $\sqrt{2}$. Retrouver le résultat par le calcul.

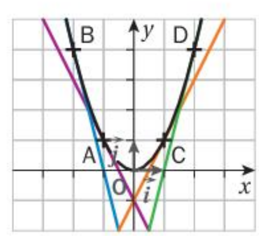
50 PROGRAMMATION python

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en un nombre réel a. La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

a. Proposer un algorithme qui, à partir des coordonnées de deux points distincts de la droite $\mathscr{T}$, détermine le nombre dérivé de f en a.

b. Programmer cet algorithme à l'aide d'une fonction en Python.

51 On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction carré, ainsi que ses tangentes en quatre points.



a. Quelle conjecture peut-on faire sur le signe de la pente d'une tangente quelconque à cette courbe ?

b. Valider ou infirmer cette conjecture.

Aide Déterminer le nombre dérivé de la fonction carré en $a \in \mathbb{R}$.

Fichier Python
Ex. 59
Manuel numérique enseignant

★★

52 Construction commentée

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous un tableau de valeurs avec les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$ pour quatre valeurs du nombre réel a.

a	-4	-2	0	2
$f(a)$	2	-1	$3{,}5$	5
$f'(a)$	-1	0	1	$0{,}5$

Dans le plan muni d'un repère :

a. placer les points de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi connus ;

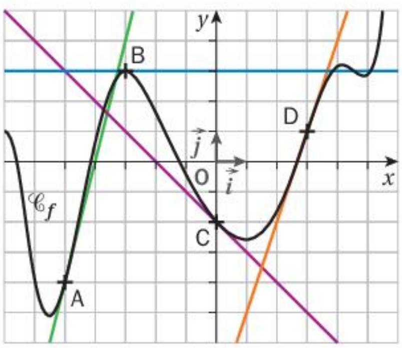
b. tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en ces points ;

c. tracer une allure possible de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Maths à l'oral
Expliquez chaque étape de votre construction en argumentant avec des résultats du cours.

53

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A, B, C et D.

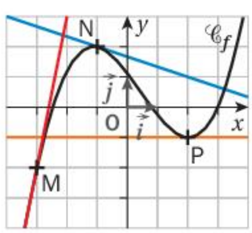


a. Déterminer graphiquement $f'(-5)$, $f'(-3)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.

b. Déterminer une équation de chacune des tangentes tracées.

54

On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points M, N et P.



● Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$, ainsi qu'une équation de chacune des tangentes tracées.

55

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

a. Construire dans le plan muni d'un repère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

b. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.

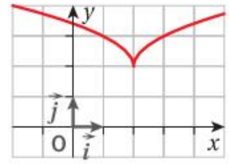
c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Info

f est appelée la **fonction valeur absolue** ; on note, pour tout nombre réel x, $f(x) = |x|$. $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente au point d'abscisse 0 : la courbe présente en 0 un « point anguleux ».

56 Vrai ou faux ?

En observant la courbe représentative ci-contre d'une fonction f, Eva affirme que f est dérivable en 2. Maxime n'est pas d'accord avec elle et affirme le contraire.

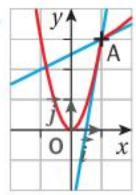


● Qu'en pensez-vous ?

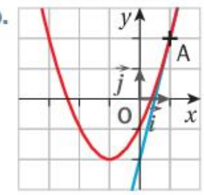
57 IN ENGLISH ▶ p. 381

The graphs of three differents functions are given in the diagrams below including their tangents at $x = 1$.
In each case, determine whether the function is differentiable at $x = 1$ and if so, give the value of the derivative at this point.

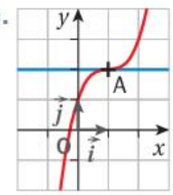
a.



b.



c.



58

Dans le plan muni d'un repère, la droite $\mathscr{T}$ est la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$.

a. $\mathscr{T} : y = 5x + 6$ et $a = 2$.

b. $\mathscr{T} : y = -3x + 5$ et $a = 0$.

c. $\mathscr{T} : y = 7$ et $a = -6$.

59 PROGRAMMATION python

Emma écrit en Python la fonction suivante :

```python
def nombre_derive(g,a,n):
    taux_variation=[]
    for k in range(1,n+1):
        h=10**(-k)
        t=(g(a+h)-g(a))/h
        taux_variation.append(t)
    return taux_variation
```

a. Que renvoie cette fonction ?

b. Emma ajoute en Python la fonction notée `f` :

```python
def f(x):
    return x**2+3*x-6
```

En appelant dans la console `nombre_derive(f,2,5)`, Emma obtient l'affichage ci-dessous. Que peut-on conjecturer ?

```
[7.1000000000000085, 7.0099999999998275,
7.000999999998925, 7.000100000027487,
7.000010000091094]
```

c. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 6$ en $a = 2$. Confirmer ou infirmer la conjecture du **b.**

60

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 1|$.

● Étudier la dérivabilité de f en 1 et en -1.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Calculer la dérivée d'une fonction usuelle

Savoir-faire 3 p. 116

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

61 Associer à chacune des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ci-dessous l'expression de sa fonction dérivée.

Fonctions
1. $f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$
2. $f : x \mapsto x^2 + x + 28$
3. $f : x \mapsto -x^2 + 28x - 3$
4. $f : x \mapsto 4x + 3$
5. $f : x \mapsto 14x^2 + 4x + 1$

Fonctions dérivées
a. $f' : x \mapsto 4$
b. $f' : x \mapsto -2x + 28$
c. $f' : x \mapsto 28x + 4$
d. $f' : x \mapsto 4x + 1$
e. $f' : x \mapsto 2x + 1$

62 Vrai ou faux ?
La fonction f est la fonction carré, g la fonction inverse et h la fonction cube.

a. « Le nombre dérivé de f en -5 est égal à -10. »
b. « Le nombre dérivé de g en 2 est égal à -4. »
c. « Il existe un nombre réel a tel que $h'(a) < 0$. »
d. « En $x = 0$, les tangentes aux courbes représentatives des fonctions f et h sont confondues. »
e. « L'équation $g'(x) = 0$ admet une solution dans $\mathbb{R}^*$. »
f. « La courbe représentative de h admet des tangentes parallèles aux points d'abscisse -3 et 3. »

63 Recopier et compléter le tableau suivant.

Fonction définie sur I	Fonction dérivée définie sur J
$f : x \mapsto x^5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$	…
…	$g : x \mapsto 2x - \dfrac{1}{x^2}$; $\mathrm{J} = \mathbb{R}^*$
$h : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$	…
…	$k' : x \mapsto 1\,000x^{999}$; $\mathrm{J} = \mathbb{R}$

64 Hugo cherche à déterminer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto (x+1)^2$ et $g : x \mapsto (x+1)(x-1)$ définies sur $\mathbb{R}$. En développant puis en utilisant la dérivée d'une somme, il a obtenu $f' : x \mapsto 2x + 2$ et $g' : x \mapsto 2x$.
- Retrouver les calculs faits par Hugo.

65 Sofia calcule les dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto (x+1)^2$; $g : x \mapsto x^2 + 2x + 12$ et $h : x \mapsto x(x+2) - 18$.
- Elle obtient la même fonction dérivée et pense avoir commis une erreur. Qu'en pensez-vous ?

66 Dans chaque cas, donner un exemple de fonction répondant aux critères énoncés.

a. f définie sur $[0 ; +\infty[$ et non dérivable en 0.
b. g définie sur $[-1 ; +\infty[$ et non dérivable en -1.
c. h définie sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0.

Pour les exercices 67 à 72
Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

67 **a.** $f : x \mapsto x^5$ **b.** $g : x \mapsto -4x + 17{,}2$
c. $h : x \mapsto -7$ **d.** $k : x \mapsto 4x^2 - 3x + 2$

68 **a.** $f : x \mapsto -4x^4$ **b.** $g : x \mapsto 2 - 7x$
c. $h : x \mapsto -x^2 - 7$ **d.** $k : x \mapsto -5x^2 + 7x + 2$

69 **a.** $f : x \mapsto -6\sqrt{x}$ **b.** $g : x \mapsto -\dfrac{7}{x}$
c. $h : t \mapsto \dfrac{t^2}{3} - t - 7$ **d.** $k : s \mapsto -3s^2 + s + \dfrac{28}{3}$

70 **a.** $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2}$ **b.** $g : x \mapsto \dfrac{x^2+x+3}{4}$
c. $h : x \mapsto 3\sqrt{x} + 6x - 1$ **d.** $k : x \mapsto -8x^2 - 6x + 2$

71 **a.** $f : t \mapsto 0{,}5t^2$ **b.** $g : u \mapsto 4u - 5$
c. $h : x \mapsto -2x^3 - 5x^2 + x - 1$ **d.** $k : t \mapsto 4t^2 - t$

72 **a.** $f : x \mapsto 7{,}5x - 18$ **b.** $g : x \mapsto 3x^3 - 5x$
c. $h : x \mapsto -9x - \dfrac{1}{x}$ **d.** $k : x \mapsto -2\sqrt{x} - 5$

Pour les exercices 73 à 76
Afin de contrôler les résultats obtenus, on pourra tracer à la calculatrice la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f étudiée et la tangente au point A.

73 La fonction f est la fonction carré.
a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $a = 1$.
b. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$? Justifier.

74 La fonction f est la fonction cube.
a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $a = -3$.
b. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 1$? Justifier.

75 La fonction f est la fonction inverse.
a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $a = 2$.
b. Montrer que la droite $\mathscr{T}$ est parallèle à une autre tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point dont on déterminera l'abscisse. Déterminer une équation de cette tangente.
c. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = 2x$? Justifier.

76 La fonction f est la fonction racine carrée.
a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $a = 4$.
b. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite d'équation $y = -2x$? Justifier.

Fichier Python
Ex. 82
Manuel numérique enseignant

★★

77 **De la conjecture à sa démonstration**

1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5.$$

Conjecturer le nombre de points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, puis encadrer l'abscisse de chacun de ces points par deux entiers consécutifs.

2. a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

c. Confirmer ou infirmer la conjecture énoncée à la question **1**.

Maths à l'oral

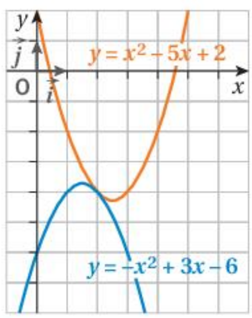
Expliquez en quoi l'équation du **b** permet de valider ou non la conjecture faite au **1** sur les tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

78 IN ENGLISH ▸ p. 381

Consider in the same coordinate plane, two parabolas :
$y = x^2 - 5x + 2$ and
$y = -x^2 + 3x - 6$.

a. Show that these two parabolas have a unique intersection point A.

b. Show that these two parabolas have the same tangent line in point A.



For info

The two parabolas are tangent to each other in point A.

79 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5.$$

a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée.

b. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

c. Étudier le signe de la différence $f(x) - (2x + 1)$.

d. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{T}$.

80 Une entreprise fabrique de l'engrais. Le coût total journalier pour la production de q litres d'engrais est donné par $C(q) = 0{,}5q^2 + 2q + 180$, où $q \in [5 ; 50]$.

Le coût marginal pour une production de q litres peut être approché par $C'(q)$.

Info

En économie, le **coût marginal** pour une quantité q produite est le coût de fabrication pour une unité supplémentaire, c'est-à-dire $C_m(q) = C(q + 1) - C(q)$.

a. Déterminer la dérivée de la fonction C.

b. Déterminer quel est le coût marginal engendré par la production du 30ᵉ litre.

81 Le viaduc de Millau, conçu par l'architecte Lord Norman Foster, franchit la vallée du Tarn avec, au point le plus haut, une hauteur de 343 mètres.

On lâche une pierre de ce point à l'instant $t = 0$. Après t secondes, la distance parcourue par la pierre est donnée, en mètres, par $d(t) = 4{,}9t^2$.

a. Au bout de combien de temps la pierre touche-t-elle le sol ?

b. Calculer la vitesse instantanée de la pierre au moment où elle atteint le sol.

Aide À l'instant t, la vitesse instantanée est $v(t) = d'(t)$.

82 Vers le BAC Un médicament contre la douleur est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang, en milligrammes par litre de sang, est modélisée par la fonction C qui, au temps écoulé x en heures, associe $C(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ où $x \in [0 ; 6]$.

Le produit actif est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure à 5 mg/L.

1. PROGRAMMATION python

Lorsque la fonction en Python suivante est exécutée, on obtient la liste [1, 2, 3, 4, 5].

```
def produit_actif( ):
    intervalle=[]
    for t in range(0,7):
        if (t**3-12*t**2+36*t)>=5:
            intervalle.append(t)
    return intervalle
```

Le médicament est-il actif au bout d'une heure ? Au bout de combien d'heures faut-il administrer à nouveau le médicament pour que son effet soit maintenu ?

2. a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction C, puis calculer sa dérivée.

b. Justifier que la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de C au point A d'abscisse 4 admet pour équation $y = -12x + 64$.

c. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage ci-contre.

Vérifier la factorisation obtenue.

C(x) := x³ – 12 x² + 36 x
→ **C(x) := x³ – 12 x² + 36 x**
Factoriser(C(x) – (–12 x + 64))
→ **(x – 4)³**

d. Étudier le signe de la différence $C(x) - (-12x + 64)$.

e. En déduire la position relative de la courbe représentative de C par rapport à la droite $\mathscr{T}$.

f. Un pharmacien affirme que la concentration du produit actif dans le sang diminue plus rapidement entre 2 h et 4 h qu'entre 4 h et 6 h après avoir pris le médicament. Que pensez-vous de cette affirmation ?

D'après Bac ST2S Polynésie, juin 2018.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Calculer la dérivée d'une fonction

Savoir-faire 4 et 5 p. 117

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

83 Vrai ou faux ?

a. « La fonction $f : x \mapsto (7x+1)^2$ a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto 49$. »

b. « La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto -\dfrac{2}{x^3}$. »

c. « La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x+2}$ a pour fonction dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{2}{3}$. »

d. « La dérivée du produit de deux fonctions dérivables est le produit des deux dérivées. »

e. « La dérivée du carré d'une fonction n'est pas égal, en général, au carré de la dérivée. »

84 Associer à chacune des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ l'expression de sa fonction dérivée.

Fonctions
1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
2. $f : x \mapsto (2x+3)^2$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+1}$
4. $f : x \mapsto (-2x+3)^2$
5. $f : x \mapsto x(x^2+x+1)$

Fonctions dérivées
a. $f' : x \mapsto 3x^2+2x+1$
b. $f' : x \mapsto -4(-2x+3)$
c. $f' : x \mapsto \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$
d. $f' : x \mapsto \dfrac{-4x}{(2x^2+1)^2}$
e. $f' : x \mapsto 4(2x+3)$

85 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage ci-contre.

1	Dérivée(f(x))
	$\rightarrow\ 2x(-3x+2)-3(x^2+1)$
2	Dérivée(g(x))
	$\rightarrow\ -\dfrac{5}{(5x+3)^2}$
3	Dérivée(h(x))
	$\rightarrow\ \dfrac{-6(x+7)+6x+2}{(6x+2)^2}$

- Retrouver les expressions des fonctions f, g et h.

86 QCM

1. La fonction $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$ est dérivable sur :

a. $\mathbb{R}$ **b.** $[0\,;+\infty[$ **c.** $]0\,;+\infty[$

2. La fonction $f : x \mapsto (x+1)\sqrt{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \ldots$:

a. $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$ **b.** $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ **c.** $x \mapsto x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{-3x+2}$ est dérivable sur :

a. $\mathbb{R}$ **b.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ **c.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{-3x+2}$ a pour dérivée $f'(x) = \ldots$:

a. $\dfrac{14}{(3x-2)^2}$ **b.** $-\dfrac{4}{3}$ **c.** $\dfrac{24x}{(3x-2)^2}$

Pour les exercices 87 à 93

Pour chacune des fonctions f et g, déterminer son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

87 $f : x \mapsto (5x+3)(-2x+1)$ $g : x \mapsto -4x\sqrt{x}$

88 $f : x \mapsto (3x^2-5)(2x-4)$ $g : x \mapsto (5x-7) \times \dfrac{1}{x}$

89 $f : x \mapsto \dfrac{1}{-2x+4}$ $g : x \mapsto \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

90 $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+2x+4}$ $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

91 $f : x \mapsto \dfrac{5x+7}{-3x+2}$ $g : x \mapsto \dfrac{5x}{2x-1}$

92 $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4x+1}$ $g : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-1}$

93 $f : t \mapsto \dfrac{-2t+3}{4t-8}$ $g : s \mapsto \dfrac{-s^2+2}{3s-6}$

Pour les exercices 94 et 95

Pour chaque fonction, reconnaître sa forme (produit ou quotient), déterminer son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

94 **a.** $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x-7}$ **b.** $g : x \mapsto -6x^2(4x-1)$

c. $h : x \mapsto \sqrt{x} \times (6x-1)$ **d.** $k : x \mapsto \dfrac{1}{-5x+10}$

95 **a.** $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x+2}$ **b.** $g : x \mapsto 8x^2(-6x+2)$

c. $h : x \mapsto (5x+3)(5x-2)$ **d.** $k : x \mapsto -\dfrac{x^2+1}{4x}$

96 Les fonctions f et g sont définies par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2x-4}+5x^2-3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{x+3}{x^2+1}+5x\sqrt{x}.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage ci-contre.

1	Dérivée(f(x))
	$\rightarrow\ 10x-\dfrac{2}{(2x-4)^2}$
2	Dérivée(g(x))
	$\rightarrow\ \dfrac{15}{2}\sqrt{x}+\dfrac{-2x(x+3)+x^2+1}{(x^2+1)^2}$

- Pour chacune des fonctions f et g, déterminer son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

97 La fonction f est définie sur $[3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x-6}.$$

a. Résoudre l'inéquation $2x-6>0$.
En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

b. Calculer la dérivée de la fonction f.

98 La fonction f est définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \sqrt{-3x+1}.$$

a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

b. Calculer la dérivée de la fonction f.

★★

99 **Copies à la loupe**

Enzo et Amel ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer la dérivée d'une fonction f.

Enzo

f est de la forme uv avec :

$u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -x + 2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -1$.

Donc $f'(x) = 2x(-x + 2) + (-x^2) = -3x^2 + 4x$.

Amel

En développant, on obtient, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = -x^3 + 2x^2$.

f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 4x$.

a. Retrouver l'expression de la fonction f donnée dans l'énoncé traité.

b. Les réponses d'Enzo et Amel sont-elles correctes ?

c. Comparer les méthodes employées.

Maths à l'oral

Commentez chaque méthode en vous appuyant sur les propriétés du cours.

100 **Vrai ou faux ?** LOGIQUE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x^2 + 5)(-2x + 3).$$

a. « Il existe au moins un nombre réel x tel que $f'(x) = 0$. »

b. « Pour tout nombre réel x, $f'(x) < 0$. »

c. « Si $g : x \mapsto -6x^3 + 9x^2 - 10x + 35$, alors pour tout nombre réel x, $g'(x) = f'(x)$. »

d. « Il existe au moins une tangente à la courbe représentative de f parallèle à la droite d'équation $y = x$. »

101 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - 1}.$$

a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée.

b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage ci-contre.

●	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - 1}$
●	g : Tangente(1, f) → y = 0.67x - 0.67

Retrouver par le calcul une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

102 IN ENGLISH ▶ p. 381

The function f is such that $f(x) = \frac{1}{2x - 6}$, where $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

a. State the domain on which the given function f is differentiable and give its derivative.

b. Determine an equation of the tangent line of f at the point $x = 1$.

103 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 2}{x - 1}$. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

a. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

b. Existe-t-il des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente a une pente égale à 1 ? Justifier.

c. Existe-t-il des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 1$? Si oui, déterminer leurs abscisses.

104 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)^2$. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Tracer à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}_f$ et conjecturer le nombre de points de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. a. Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée.

b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

c. Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(x - 1)(9x^2 - 9x + 2)$.

d. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

105 Vers le BAC Une étude s'intéresse à un modèle de voiture roulant au biocarburant. La consommation de ce véhicule, exprimée en litres pour 100 km, est modélisée par $C(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$, où x est la vitesse de la voiture exprimée en km/h avec $x \in [30 ; 130]$.

1. Calculer la consommation de la voiture lorsqu'elle roule à 30 km/h.

2. a. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient l'affichage ci-dessous.

1	Simplifier$\left(\text{Dérivée}\left(C(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}\right)\right)$ $\rightarrow$ $C'(x) = \frac{800\,x - 60000}{x^3}$

Retrouver par le calcul la dérivée de C sur [30 ; 130].

b. Résoudre dans l'intervalle [30 ; 130] l'équation $C'(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

c. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle [30 ; 130]. Conjecturer la valeur minimale de la consommation de la voiture. En quelle vitesse semble-t-elle atteinte ? Quel lien peut-on faire avec le résultat obtenu à la question **b** ?

3. ALGORITHMIQUE

En exécutant l'algorithme ci-contre, la variable x prend pour valeur finale 46. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

$x \leftarrow 30$
$y \leftarrow \frac{44}{3}$
Tant que $y > 5$
  $x \leftarrow x + 1$
  $y \leftarrow \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$
Fin Tant Que

D'après Bac STMG Polynésie, juin 2018.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : dérivée d'un produit
hatier-clic.fr/ma1128

La démonstration rédigée

Propriété **Dérivée d'un produit**
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit $x \mapsto u(x) \times v(x)$, notée $u \times v$, est dérivable sur I et, pour tout nombre réel x de I, $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

OBJECTIF : on souhaite étudier la dérivabilité de la fonction $u \times v$ et déterminer une expression de sa dérivée.

Démonstration

Pour tout $a \in \mathrm{I}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathrm{I}$, le taux de variation de la fonction $u \times v$ entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a+h) + u(a)\times v(a+h) - u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= \frac{(u(a+h)-u(a))\times v(a+h) + u(a)\times(v(a+h)-v(a))}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Les fonctions u et v étant par hypothèse dérivables sur I, elles sont donc dérivables en a. On en déduit que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a).$$

Le nombre réel $u(a)$ ne dépend pas de h donc $\lim\limits_{h\to 0} u(a) = u(a)$.

Par ailleurs, on admet que $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.

En reprenant l'expression de $t(h)$, on obtient donc :

$$\lim_{h\to 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a).$$

Pour tout $a \in \mathrm{I}$, le taux de variation $t(h)$ tend vers le nombre $\ell = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Donc, pour tout $a \in \mathrm{I}$:

- la fonction $u \times v$ est dérivable en a ;
- $(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.

La fonction $u \times v$ est donc dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$. ■

Info
u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
En écrivant $u^2 = u \times u$, on obtient que la fonction u^2 est dérivable sur I et que $(u^2)' = 2u'u$.

Le principe

1 On commence par **calculer le taux de variation** de la fonction $u \times v$ en a :
a. on utilise la définition du taux de variation ;
b. on cherche à faire apparaître le taux de variation de u en a et celui de v en a.
Pour cela, on retranche et on ajoute $u(a) \times v(a+h)$ au numérateur (ce qui revient à ajouter 0).

2 On étudie la **limite du taux de variation lorsque h tend vers 0**.
Pour cela, on étudie la limite de chaque facteur des termes de $t(h)$ et on utilise l'hypothèse « u et v sont dérivables sur I ».

3 On conclut sur la dérivabilité et sur l'expression éventuelle de la dérivée en **utilisant la définition** de la dérivabilité et du nombre dérivé.

La démonstration à compléter

106 En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de montrer que **la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable sur]0 ; +∞[**, et de déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur cet intervalle.

Démonstration

f est la fonction racine carrée définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \dots$.

- Pour tout a appartenant à [0 ; +∞[et pour tout h appartenant à $\mathbb{R}^*$ tel que $a + h > 0$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots}$$

Lorsque h tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 ; on ne peut alors pas déterminer la limite de ce quotient.

- $$t(h) = \frac{(\dots)\times(\dots)}{\dots\times(\dots)}$$
$$= \frac{\dots}{\dots\times(\dots)}$$
$$= \frac{\dots}{\dots\times(\dots)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

- **Si $a = 0$**, $t(h) = \dots$. Donc lorsque h tend vers 0, $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus ..., qui tendent vers ... ; ainsi $t(h)$ ne tend pas vers un nombre réel et f n'est donc pas dérivable en 0.

Si $a > 0$, lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h}+\sqrt{a}$ tend vers .... Donc $t(h)$ tend vers ..., qui est un nombre réel. Ainsi, f est ... en a et $f'(a) = \dots$.

- Donc la fonction racine carrée est dérivable sur ... et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dots$. ■

1 On calcule le **taux de variation** de la fonction racine carrée en a en utilisant le cours.

2 **On cherche à transformer l'écriture de $t(h)$** :
a. on multiplie au numérateur et au dénominateur par $(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})$;
b. on utilise au numérateur l'identité remarquable $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
c. on simplifie l'expression par h au numérateur et au dénominateur.

3 On **étudie la limite** de $t(h)$ lorsque h tend vers 0 ; il faut ici distinguer le cas $a = 0$ et le cas $a > 0$.

4 On **conclut** en utilisant les définitions de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle et de la fonction dérivée.

Démonstrations Vers le BAC

107 f est une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I tel que f soit dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan, A le point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse a et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

a. Expliquer pourquoi il existe un nombre réel p tel que la droite $\mathscr{T}$ ait pour équation $y = p + f'(a) \times x$.

b. Déterminer une expression de p en utilisant que A appartient à $\mathscr{C}_f$. En déduire une équation de $\mathscr{T}$.

108 Dans chaque cas, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et déterminer une expression de sa fonction dérivée.

a. $f : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$) I = $\mathbb{R}$

b. $f : x \mapsto mx + p$ ($m \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{R}$) I = $\mathbb{R}$

c. $f : x \mapsto x^2$ I = $\mathbb{R}$

d. $f : x \mapsto x^3$ I = $\mathbb{R}$

e. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ I = $\mathbb{R}^*$

Pour les exercices 109 à 111

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

109 **1.** Pour tout $a \in$ I et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

a. calculer le taux de variation $t(h)$ de la fonction $u + v$ entre a et $a + h$;

b. étudier la limite de $t(h)$ lorsque h tend vers 0.

2. Conclure.

110 k est un nombre réel.

- Montrer que la fonction $k \times u$ est dérivable sur I et déterminer une expression de sa fonction dérivée.

111 La fonction v ne s'annule pas sur I.

a. Démontrer que la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et déterminer une expression de sa fonction dérivée.

b. En écrivant que $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, démontrer que la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et déterminer une expression de sa fonction dérivée.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 113 et 114
Manuel numérique enseignant

112 Histoire des mathématiques En groupe

La notion de dérivée a été introduite par :

– le physicien anglais Isaac Newton (1643-1727) ;

– et le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Newton introduit « le calcul des fluxions », prémices des dérivées, et Leibniz développe « le calcul différentiel ».

• Rechercher :

– quel était le contexte des recherches de Newton lorsqu'il introduisit la notion de « fluxion » ?

– quelle(s) notation(s) utilisait Leibniz ? Quel est le lien avec la notation $\dfrac{dy}{dx}$?

– quel(s) mathématicien(s) ont introduit la notion de tangente à une courbe. À quelle période ?

Maths à l'oral

Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

113 Dans le plan muni d'un repère, on considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

1. a. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{H}$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$. On note cette droite $\mathscr{T}$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{T}$ coupe chacun des axes du repère en un point. On nomme ces points B et C.

c. Montrer que le point A est le milieu du segment [BC].

2. TICE

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

· tracer la courbe $\mathscr{H}$;

· créer un curseur a variant de -5 à 5 avec un pas de 1 et construire la tangente à la courbe $\mathscr{H}$ au point d'abscisse a.

b. Chercher | Conjecturer si le résultat démontré pour $a = \dfrac{3}{2}$ à la question **1c** peut être généralisé.

3. a. Calculer | Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{H}$ au point M d'abscisse a. On note cette droite $\mathscr{T}_a$.

b. Démontrer que la droite $\mathscr{T}_a$ coupe chacun des axes du repère en un point.

c. Confirmer ou infirmer la conjecture énoncée à la question **2b**.

114 Vers le BAC Une entreprise conçoit des composants électroniques. Leur coût de production s'exprime, en centaines d'euros, en fonction de la quantité q par :

$$C(q) = 0{,}01q^2 + 2q + 2{,}5.$$

a. Quel est le coût de production de 100 composants électroniques ? de 101 composants électroniques ? Quel est le coût entraîné par la fabrication du 101ᵉ composant électronique ?

b. PROGRAMMATION python Proposer une fonction en Python qui prend pour paramètre le nombre de composants produits et qui renvoie le coût marginal correspondant (▶ Info p. 125).

c. Démontrer que la fonction C est dérivable en $a = 100$ et déterminer la valeur du nombre dérivé $C'(100)$.

d. En économie, on approche le coût marginal $C_m(q)$ par le nombre dérivé $C'(q)$. Quelle est l'erreur commise lorsque l'on fait cette approximation pour $q = 100$?

115 La fonction f est la fonction carré, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et a un nombre réel.

a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a.

b. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ qui passent par le point B(2 ; 3). Donner une équation de chacune d'entre elles.

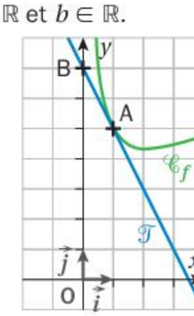
116 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b \times \sqrt{x} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

On a tracé ci-contre, pour deux valeurs particulières de a et b :

– la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$;

– une tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.



• **Calculer |** Avec les informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de a et b.

117 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

b. Calculer | Déterminer les valeurs de a, b et c pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse 1 et une tangente de pente 2 au point A(−1 ; 1).

Fichier logiciel
Ex. 118
Manuel numérique enseignant

118 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3.$$

1. TICE **a.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- créer un curseur a variant de -4 à 4 et construire la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

b. Conjecturer si la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une (des) tangente(s) parallèle(s) à l'axe des abscisses.

2. a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$).

b. Raisonner | Confirmer ou infirmer la conjecture du **1b**.

119 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-2} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

b. Calculer | Déterminer les valeurs de a et b pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point A(0 ; 1) et admette une tangente horizontale au point A.

120 Vers le BAC On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{1}{2x-3}$.

1. **a.** À l'aide de la calculatrice, tracer :
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la droite $\mathscr{T}$, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Chercher | Conjecturer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{T}$ et s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ strictement parallèle à la droite $\mathscr{T}$.

2. a. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

b. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$.

c. Vérifier que, $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x) - (-2x+1) = \dfrac{4(x-1)^2}{2x-3}$.

d. Étudier le signe de la différence $f(x) - (-2x+1)$.

e. Confirmer ou infirmer la première conjecture de la question **1b**.

3. Raisonner | Montrer que la droite $\mathscr{T}$ est parallèle à une autre tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point dont on déterminera l'abscisse. Confirmer ou infirmer la seconde conjecture de la question **1b**.

121 On considère, dans le plan muni d'un repère, la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^3 - 3x + 6$.

a. Expliquer pourquoi la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente en chacun de ses points.

b. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a une pente égale à 4.

c. Raisonner | On appelle (d) la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de α l'existence de points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite (d).

122 **Propagation d'une épidémie** Vers le BAC

Les habitants d'une ville sont touchés par une épidémie de grippe. Le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jours, peut être modélisé par la fonction f définie pour tout $t \in [0\,;30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. a. Quel est le nombre de malades le 6e jour ?

b. Combien de jours dure l'épidémie ?

2. a. Vérifier que la fonction f est dérivable sur $[0\,;30]$ et déterminer sa dérivée f'.

b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 10. On la note $\mathscr{T}$.

c. Sur la calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{T}$. Énoncer une conjecture sur la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{T}$.

3. a. Calculer | Démontrer que, $\forall t \in [0\,;30]$:

$$f(t) - (300t - 1000) = -(t-10)^3.$$

Aide $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

b. Raisonner | Confirmer ou infirmer la conjecture énoncée en **2c**.

c. Modéliser | Comparer la progression du nombre de nouveaux malades chaque jour avant le 10e jour avec celle après le 10e jour.

123 **Dérivée seconde d'une fonction**

Info

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si sa dérivée f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on appelle **dérivée seconde** de f, notée f'', la dérivée de f'.

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont deux fois dérivables sur l'intervalle I et déterminer leur dérivée seconde.

a. $f : x \mapsto x^2 + 7x - 3$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

b. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}^*$

c. $h : x \mapsto \sqrt{x}$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$

2. a. Jérémy affirme que la dérivée seconde d'une fonction polynôme du second degré est une fonction constante. Qu'en pensez-vous ?

b. Raisonner | Que peut-on dire de la dérivée seconde d'une fonction polynôme de degré 3 ? et de la dérivée seconde d'une fonction polynôme de degré n (où $n \in \mathbb{N}^*$) ?

124 Dérivée d'un produit de trois fonctions

u, v et w sont trois fonctions dérivables sur un intervalle I. La fonction f est définie sur I par $x \mapsto u(x) \times v(x) \times w(x)$. On note $f = u \times v \times w$.

1. a. Raisonner | On considère la fonction $g = u \times v$ dérivable sur I. Démontrer que la fonction $f = g \times w$ est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée en fonction de g, g', w et w'.

b. En déduire que la fonction $u \times v \times w$ est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée en fonction de u, v, w et de leurs dérivées.

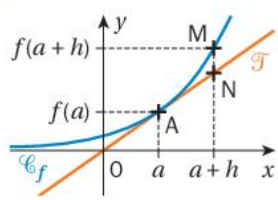
2. a. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée.

- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3} \times \dfrac{1}{x-2} \times \dfrac{1}{x-1}$
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-7} \times (x^2+5)\sqrt{x}$

b. TICE Vérifier vos résultats à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

125 Approximation affine

La courbe ci-contre représente une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La droite $\mathcal{T}$ est la tangente à cette courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $a \in$ I.



Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in$ I, on considère :
– le point $\text{M}(a + h\,;f(a + h)) \in \mathscr{C}_f$;
– le point $\text{N} \in \mathcal{T}$ ayant pour abscisse $a + h$.

1. Calculer l'ordonnée du point N. Que peut-on dire de cette ordonnée lorsque h tend vers 0 ?

2. D'après la définition du nombre dérivé de f en a, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. En écrivant que, pour h proche de 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$, montrer que pour h proche de 0, $f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$.

> **Info**
> La fonction $h \mapsto f(a) + h \times f'(a)$ est appelée **approximation affine** de f en $a + h$ lorsque h est proche de 0.

3. a. Déterminer l'approximation affine de la fonction racine carrée en $4 + h$ lorsque h est proche de 0.

b. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{4{,}01}$ et de $\sqrt{3{,}996}$.

4. En utilisant le même procédé qu'à la question **3**, déterminer une valeur approchée de $\dfrac{1}{3{,}01}$ et de $\dfrac{1}{2{,}993}$.

5. Modéliser | L'indice CAC40 a augmenté de 0,5 % sur deux journées consécutives.
Montrer que l'augmentation globale est approximativement une augmentation de 1 %.

> **Info**
> Le CAC 40 est un indice boursier qui réunit les 40 plus importantes sociétés françaises côtées en bourse.

126 Tangentes communes à deux courbes

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ayant pour courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le plan muni d'un repère.

1. a. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune en un point commun si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ solution du système :

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}.$$

b. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ et $g : x \mapsto -x^2 + 6x - 2$. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune en un point commun.

2. a. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune si et seulement si il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ (▶ Rabat I, Notations) solution du système :

$$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f'(a) \times (b-a) = g(b) - f(a) \end{cases}.$$

b. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ et $g : x \mapsto -x^2 + 6x - 5$. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent deux tangentes communes ; on les note $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

c. On nomme A et B les points d'intersection respectifs de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ avec $\mathscr{C}_f$, et C et D les points d'intersection respectifs de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ avec $\mathscr{C}_g$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3. On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune. Déterminer son équation.

127

Dans une entreprise fabriquant du sucre de canne, le coût total de production (en euros) en fonction de la quantité produite q (en tonnes) peut être modélisé par la fonction C définie pour tout $q \in [0\,;10]$ par $C(q) = q^3 - 6q^2 + 24q + 100$.

1. Calculer $C(0)$. Interpréter le résultat.

> **Info**
> En économie, on appelle **coût moyen** le quotient du coût total par la quantité produite, et **coût marginal** le coût de fabrication pour une unité supplémentaire.

2. Déterminer le coût moyen pour 8 tonnes de sucre produit.

3. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total. Déterminer le coût marginal lorsque l'on produit 9 tonnes de sucre.

4. a. Vérifier que, $\forall q \in]0\,;10]$, l'équation $\dfrac{C(q)}{q} = C'(q)$ est équivalente à l'équation $2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$.

b. Calculer | Vérifier que, pour tout $q \in]0\,;10]$, $2q^3 - 6q^2 - 100 = 2(q-5)(q^2 + 2q + 10)$, puis résoudre l'équation $2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$ dans l'intervalle $]0\,;10]$.

c. Modéliser | Pour quelle quantité de sucre produit le coût moyen est-il égal au coût marginal ?

Physique-Chimie

128 Vitesse réglementée

De retour de vacances, Léane emprunte l'autoroute allemande où la vitesse n'est pas limitée. Au passage de la frontière avec la France, elle réalise que la limitation de vitesse est de 130 km/h. Afin de respecter celle-ci, elle freine et stabilise sa vitesse au bout de 4 secondes.

La distance parcourue, en mètres, par la voiture après t secondes depuis le passage de la frontière vérifie :

$$\forall t \in [0\ ;\ 4],\ d(t) = \frac{480t}{t+12}.$$

1. Calculer la vitesse moyenne de la voiture entre $t = 0{,}5$ seconde et $t = 3$ secondes.

Aide La **vitesse moyenne** est égale au quotient de la distance parcourue par le temps mis pour la parcourir.

2. a. Montrer que le taux de variation de la fonction d entre 0,5 et $0{,}5 + h$ (avec $h \in \mathbb{R}^*$) vaut :

$$V(h) = \frac{460{,}8}{h+12{,}5}.$$

b. Comment peut-on interpréter $V(h)$ en terme de vitesse ?

c. Démontrer que la fonction d est dérivable en 0,5 et en déduire la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 0{,}5$.

Aide La **vitesse instantanée à l'instant t_0** est égale, lorsqu'il existe, au nombre dérivé de la fonction d en t_0.

3. Léane aperçoit un radar à l'instant $t = 0{,}5$. Aura-t-elle une contravention pour excès de vitesse ?

D'après Document ressources pour la classe de 1re, Analyse, mars 2012.

Fiche métier
Technicien·ne d'essai
hatier-clic.fr/ma1133a

SES

129 Élasticité de la demande

Le gérant d'un restaurant gastronomique propose un menu unique à 50 €.

Souhaitant améliorer sa recette, il décide d'augmenter le prix du menu. Il constate sur une période de trois mois que :

– lorsque le menu est à 50 €, il sert 400 couverts hebdomadaires ;

– à chaque augmentation de 1 € du prix du menu, il perd 20 couverts sur la semaine.

1. a. Le gérant fixe le menu à 60 €.
Quel est le nombre de couverts qu'il peut espérer servir sur la semaine ?

b. Modéliser par une fonction f le nombre de couverts servis lorsque le prix du menu p est compris entre 50 € et 70 €.

c. Vérifier que pour tout $p \in [50\ ;\ 70]$, $f(p) = 1\,400 - 20p$.

Info En économie, l'**élasticité de la demande par rapport au prix p** est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation du prix de 1 %.

2. Pour $p \in [50\ ;\ 70]$, lorsque le prix passe de p à $p + h$ ($h \in \mathbb{R}^*$), l'élasticité de la demande par rapport au prix p est égale au rapport $\dfrac{\dfrac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}}{\dfrac{(p+h)-p}{p}}$.

a. Expliquer pourquoi l'élasticité de la demande par rapport au prix p peut être approchée par le rapport $e(p) = \dfrac{p \times f'(p)}{f(p)}$.

Aide Utiliser le taux de variation de la fonction f entre p et $p + h$.

b. Exprimer $e(p)$ en fonction de p.

c. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à –6. En déduire comment évolue le nombre de couverts hebdomadaire lorsque le prix du menu passe de 60 € à 60,60 €.

Fiche métier
Comptable
hatier-clic.fr/ma1133b

Recherches mathématiques

Fichier Python
Ex. 133
Manuel numérique enseignant

Questions ouvertes

130 La même dérivée

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ et $g(x) = \dfrac{5}{x-2}$.

a. Déterminer les dérivées de f et de g. Que constate-t-on ?

b. Existe-t-il d'autres fonctions dont la dérivée est égale à f' ? Si oui, lesquelles ?

131 Tangente passant par un point donné

Dans le plan muni d'un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = \dfrac{2x}{1-x}$.

- Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui passe par le point de coordonnées $(-2\,;-1)$?

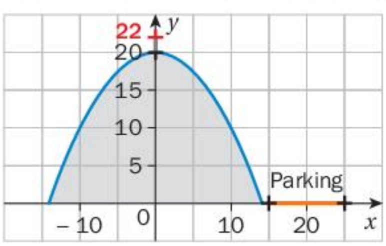
132 Tout voir ?

Un architecte a dessiné une vue en coupe d'un hôtel de hauteur 20 m.

L'hôtel y est représenté par la parabole d'équation $y = -0{,}01x^2 + 20$.

Le parking de l'hôtel est un carré de côté 10 m situé comme sur la vue en coupe ci-dessous.

Au sommet du toit de l'hôtel, sur un piquet de hauteur 2 m, il est prévu d'installer une webcam.



- Cette webcam pourrait-elle assurer la surveillance du parking ? Expliquer le raisonnement.

Défis

133 PROGRAMMATION python

p est une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) définie sur $\mathbb{R}$.

- Écrire en Python une fonction qui renvoie la fonction dérivée de p.

Aide Définir toute fonction polynôme par la liste de ses coefficients.

134 Trois tangentes et une parabole

Dans le plan muni d'un repère, une parabole $\mathscr{P}$ a pour tangentes les droites (d_1), (d_2) et (d_3) d'équations respectives $y = 4x - 4$; $y = 2x - 3$ et $y = -2x - 7$.

- Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.

Aide Toute tangente $\mathscr{T}$ à une parabole $\mathscr{P}$ a un unique point commun avec $\mathscr{P}$.

En groupe

135 Un toboggan

Une entreprise doit installer un toboggan dans un jardin pour enfants. Le profil de ce toboggan est représenté par la courbe ci-contre, constituée de deux portions de paraboles :

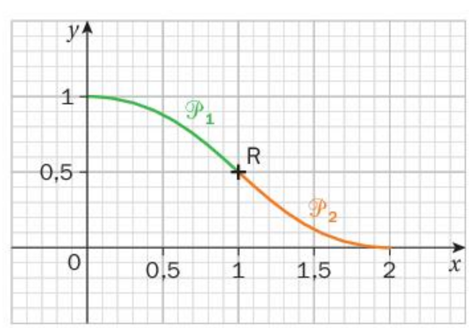
– $\mathscr{P}_1$, courbe représentative d'une fonction f_1 définie sur $[0\,;1]$;

– $\mathscr{P}_2$, courbe représentative d'une fonction f_2 définie sur $[1\,;2]$.

$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ admettent la même tangente au point R d'abscisse 1.

Par ailleurs, les contraintes de sécurité imposent que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 2 soient parallèles à l'axe des abscisses.

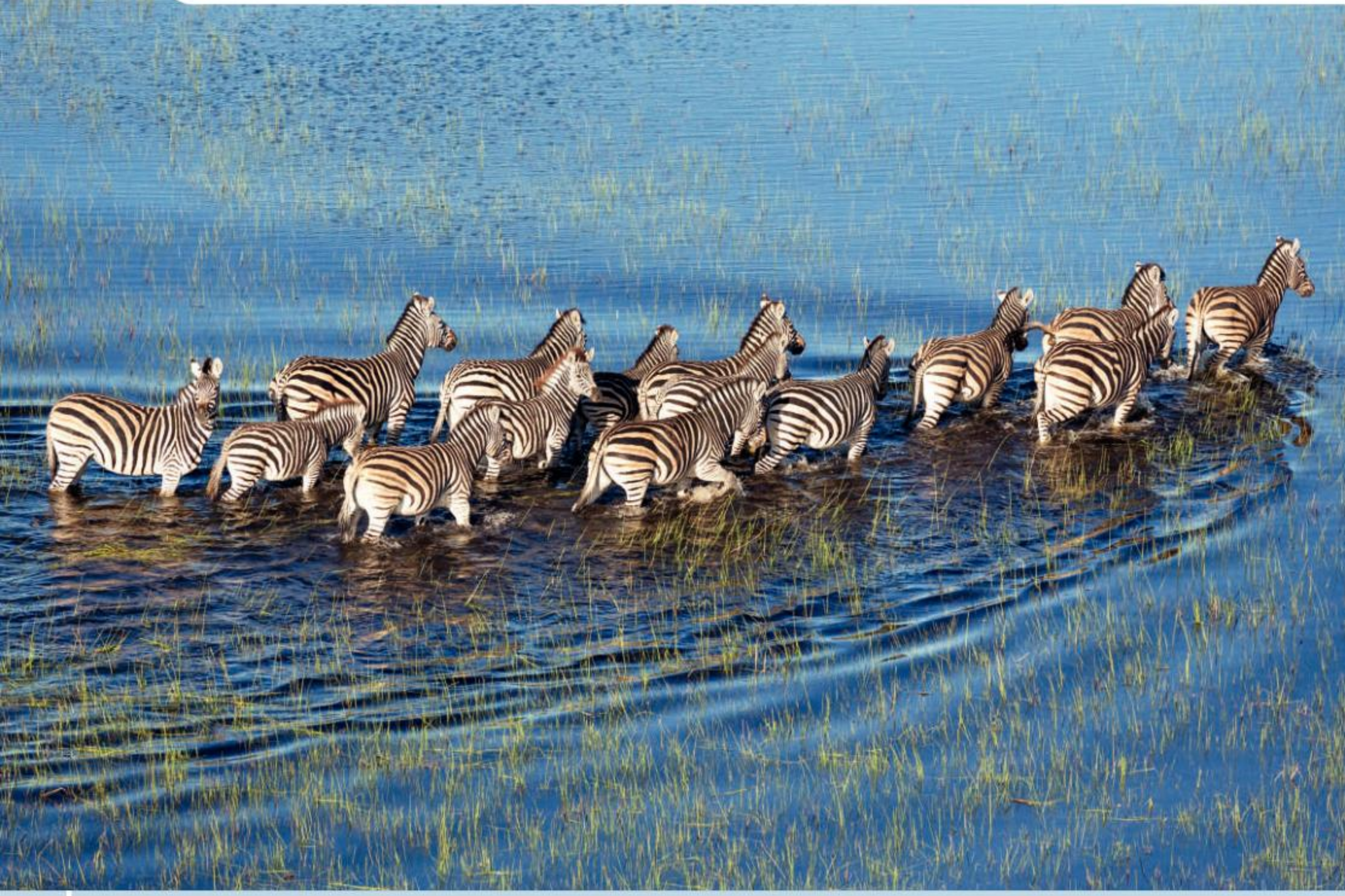
- Déterminer les expressions des fonctions f_1 et f_2.



Essayons de retrouver ensemble les initiatives à prendre.

CHAPITRE 5

Dérivation : applications à l'étude de fonctions



L'évolution d'une population humaine, animale ou de bactéries, la propagation d'une maladie ou bien l'évolution des ressources énergétiques peuvent être modélisées par des fonctions dont la variable est le temps. L'étude de ces fonctions, à l'aide de la dérivation, permet de prévoir l'évolution de ces phénomènes et ainsi une meilleure gestion de l'environnement et des conditions de vie sur la planète.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

- Activités 1 et 2
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 12 à 14
- Les incontournables 23 à 27
- Entraînement 31 à 43

OBJECTIF 2

Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

- Activité 3
- Cours 2
- Savoir-faire 2
- Quiz 15 à 17
- Les incontournables 28 à 30
- Entraînement 44 à 57

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

- Comment définir le signe et les variations d'une fonction ?
- Comment peut-on déterminer le signe d'une fonction ?
- Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction ?

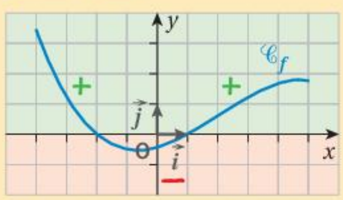
Rappels

Signe d'une fonction

Déterminer graphiquement le signe d'une fonction revient à étudier la **position de sa courbe par rapport à l'axe des abscisses.**

Exemple

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$.



$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ et $x = 1$. $\mathscr{C}_f$ est strictement **au-dessus** de l'axe des abscisses pour $x \in [-4\,;\,-2[\, \cup\,]1\,;\,5]$.
$\mathscr{C}_f$ est strictement **en dessous** de l'axe des abscisses pour $x \in\,]-2\,;\,1[$.
On dresse ainsi le tableau de signes de f :

x	-4		-2		1		5
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer algébriquement le signe d'une fonction revient à **résoudre** l'équation $f(x) = 0$ et les **inéquations** $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{4-x}$.

On résout dans $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ l'équation :
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$
La fonction f est une fonction quotient de deux fonctions affines u et v telles que :
$$u(x) = x + 2 \quad \text{et} \quad v(x) = 4 - x.$$
On dresse le tableau de signes de f à partir du signe de chacune des fonctions u et v, en utilisant la règle du signe d'un quotient :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $v(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Dérivées des fonctions usuelles ▸ Chapitre 4

Fonction …	définie sur …	par …	dérivable sur …	Fonction dérivée
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
puissance	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
inverse	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
racine carrée	$[0\,;\,+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples

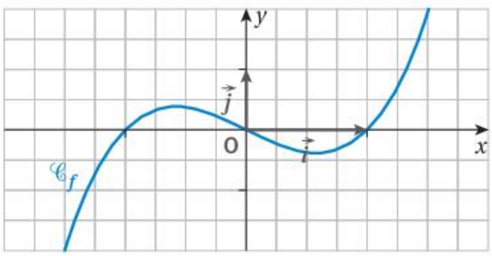
- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$.
f est une fonction polynôme de degré 3, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times 3 \times x^2 - 3$
$= 12x^2 - 3.$
- g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 4x - 5 + \sqrt{x}$.
g est la somme d'une fonction affine et de la fonction racine carrée, donc g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[,\ g'(x) = 4 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Signe d'une fonction

1 La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-1{,}5\ ;\ 1{,}5]$.

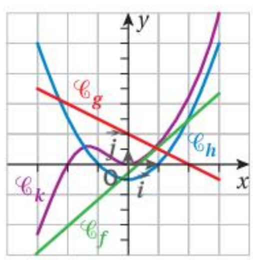


a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

b. Préciser les intervalles sur lesquels f est strictement positive, puis les intervalles sur lesquels f est strictement négative.

c. Dresser, selon les valeurs de x, le tableau de signes de la fonction f.

2 Dresser, selon les valeurs de x, le tableau de signes de chacune des fonctions f, g, h et k définies sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ par leurs courbes ci-contre.



3 Dresser, selon les valeurs de x, le tableau de signes de chacune des fonctions suivantes.

a. $f(x) = -5x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

b. $g(x) = (2 - 4x)(x - 3)$, définie sur $\mathbb{R}$.

c. $h(x) = \dfrac{-x+1}{-x-2}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

d. $k(x) = -x^2 + 6x - 9$, définie sur $\mathbb{R}$.

4 Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 5 et 100 pièces. Le montant des charges (en €) correspondant à la fabrication de x pièces est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[5\ ;\ 100]$ par $C(x) = x^2 + 20x + 900$.

L'entreprise vend chaque jour la totalité de sa production journalière. Chaque pièce est vendue 120 €.

a. Modéliser, par une fonction notée R définie sur $[5\ ;\ 100]$, la recette journalière exprimée en fonction de x.

b. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer quotidiennement pour que la production soit rentable.

Aide La production est rentable si le bénéfice (différence entre la recette et les charges liées à la fabrication) est positif.

Dérivées des fonctions usuelles

5 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée.

a. $f : x \mapsto -3x^5$

b. $g : x \mapsto 8x^2 - \dfrac{1}{3}$

c. $h : x \mapsto -7x^2 + 3x - 1$

d. $k : x \mapsto 3x^3 - 5x^2 - \dfrac{x}{4} + 1{,}5$

e. $l : x \mapsto 5\sqrt{x} - 3x + 2$

6 **Vrai ou faux ?**

« Les fonctions suivantes, dérivables sur $\mathbb{R}$, admettent la même fonction dérivée. »

$f : x \mapsto 2(x - 1)$ $\qquad$ $g : x \mapsto 2x^2 - 5$

$h : x \mapsto 2x + \dfrac{7}{2}$

7 Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total journalier de production de x litres, en centaines d'euros, est donné par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 50]$ par :

$C(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 200$.

Le coût marginal de production, noté $C_m(x)$, est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire ; on l'assimile au nombre dérivé du coût total.

- Calculer le coût marginal pour une production journalière de 20 litres dans cette entreprise.

Corrigés p. 368

Activités

Fichier logiciel
Activité 1
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

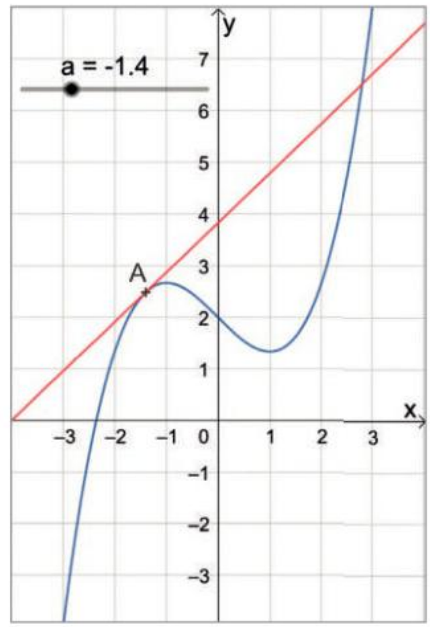
1 Du signe du nombre dérivé au sens de variation TICE

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2.$$

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

b. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.



2. a. À l'aide du logiciel, créer un curseur a (compris entre -3 et 3) avec un pas de $0,1$.

Placer le point $A(a ; f(a))$.

Tracer ensuite la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ au point A. Faire afficher son équation réduite dans la fenêtre.

Aide
- Pour placer le point A, saisir `A=(a,f(a))` dans la zone de saisie.
- Pour tracer la tangente, utiliser l'outil Tangentes.

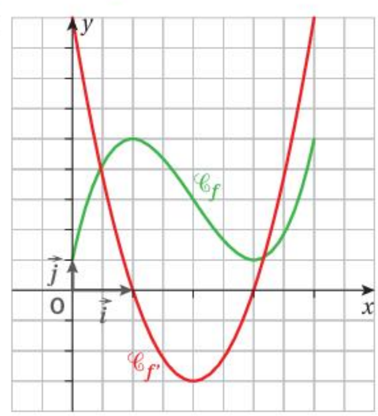
b. À partir de cette équation, lire le nombre dérivé $f'(a)$ pour différentes valeurs de a (faire varier le curseur).

3. Conjecturer un lien entre le sens de variation de la fonction f sur un intervalle et le signe du nombre dérivé $f'(x)$.

OBJECTIF 1
Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

2 Lien entre courbes représentatives de f et de f'

1. Dans le plan muni d'un repère, on a représenté ci-contre :
– en vert la courbe d'une fonction f définie sur $[0 ; 4]$;
– en rouge la courbe de sa fonction dérivée f'.



a. Par lecture graphique, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0 ; 4]$.

b. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 4]$.

c. Conjecturer un lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variation de la fonction f.

2. On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = -x^3 + 3x - 2.$$

a. Tracer, à l'aide d'un outil numérique, les courbes représentatives des fonctions g et h, ainsi que celles de leurs fonctions dérivées.

b. En observant ces courbes, la conjecture émise à la question **1c** semble-t-elle se confirmer ?

OBJECTIF 2
Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

3 Optimisations En groupe

Situation 1 Tempérage du chocolat noir

Le tempérage du chocolat permet d'obtenir un chocolat craquant et brillant destiné à réaliser des enrobages, des bonbons, etc.
Il se déroule en trois étapes :
- on chauffe le chocolat pour le rendre liquide ; la température du chocolat noir ne doit alors pas dépasser les 55 °C pour qu'il soit utilisable par la suite ;
- on refroidit le chocolat pour qu'il atteigne une température inférieure à 31 °C ;
- on réchauffe le chocolat pour qu'il atteigne 31 °C, sa température idéale d'utilisation.

On modélise la température (en °C) du chocolat après t minutes depuis le début d'un tempérage par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 12,5] par $f(t) = 0{,}14t^3 - 3{,}15t^2 + 18{,}48t + 18$.

Pour s'assurer que le chocolat sera utilisable, le chocolatier cherche à déterminer la température **maximale** atteinte par le chocolat lors de ce tempérage.

1. TICE À l'aide d'un outil numérique, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f, puis afficher le maximum de cette fonction sur l'intervalle [0 ; 12,5].

2. On admet que f est dérivable sur [0 ; 12,5] et on note f' sa dérivée.
a. Calculer $f'(t)$, puis dresser son tableau de signes sur [0 ; 12,5].
b. En déduire le tableau de variations de f.
c. Quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ? À quel instant t est-elle atteinte ? Vérifier la cohérence de ces résultats avec ceux obtenus en **1**.

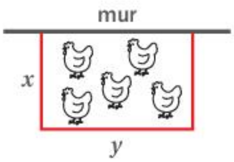
Rechercher le **maximum** (ou le minimum) d'une fonction sur un intervalle, c'est **optimiser** le problème.

d. Émettre une conjecture sur le lien entre la valeur de t correspondant à la température maximale et l'une des valeurs de t pour lesquelles la dérivée s'annule en changeant de signe.

D'après Bac Hôtellerie Antilles-Guyane Métropole, juin 2016.

Situation 2 L'enclos

Pour son élevage de poules bio en plein air, une agricultrice souhaite construire un enclos rectangulaire de dimensions x et y et d'aire 1 250 m^2. Cet enclos sera délimité par un mur sur un côté et par du grillage sur les trois autres côtés, comme représenté sur le schéma ci-contre. L'agricultrice cherche à **optimiser**, c'est-à-dire ici à **minimiser**, la longueur de grillage nécessaire.



1. Modéliser la longueur du grillage de l'enclos par une fonction g définie sur l'intervalle]1 ; 1 250[.

2. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de]1 ; 1 250[, $g(x) \geqslant 100$. Que peut-on en conclure concernant la longueur minimale de grillage nécessaire ?
b. TICE Quelles sont les dimensions x et y de l'enclos qui correspondent à cette longueur de grillage minimale ?

3. On admet que g est dérivable sur]1 ; 1 250[et on note g' sa dérivée.
a. Calculer $g'(x)$, puis dresser son tableau de signes sur]1 ; 1 250[.
b. Pour quelle valeur de x de]1 ; 1 250[, la dérivée s'annule-t-elle en changeant de signe ?
c. Émettre une conjecture sur le lien entre ce résultat et la valeur de x obtenue à la question **2**.

Maths à l'oral
Présentez en groupe votre conjecture en vous appuyant sur la situation étudiée.

OBJECTIF 1 Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Savoir-faire 1 p. 142

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

Théorème

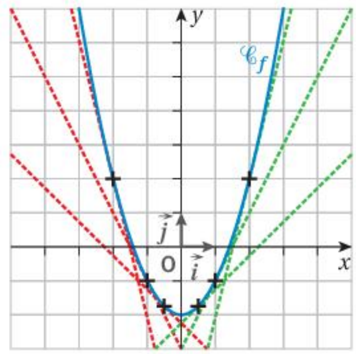
- Si f est **croissante** sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est **décroissante** sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est **constante** sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.

Démonstration rédigée p. 152 et Démonstration : exercice 59 p. 153

Rappel
f est croissante sur I si et seulement si pour tous nombres réels u et v de I tels que $u < v$ on a $f(u) \leqslant f(v)$.

Interprétation graphique

- f est **décroissante** sur $I =]-\infty\ ;\ 0]$ donc en chaque point de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur cet intervalle, la pente de la tangente est **négative**.
- f est **croissante** sur $I = [0\ ;\ +\infty[$ donc en chaque point de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur cet intervalle, la pente de la tangente est **positive**.



La **pente** de la tangente est égale au **nombre dérivé**.

Théorème (admis)

- Si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ alors f est **croissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$ alors f est **décroissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Ce théorème permet d'étudier les variations d'une fonction.

Exemple 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

$f'(x)$ est un polynôme de degré 2 dont les racines sont 1 et -1.
On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ (▶ Chapitre 3) :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

Pour tout nombre réel x de $[-1\ ;\ 1]$, $f'(x) \leqslant 0$ et, pour tout nombre réel x de $]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$.

Donc f est croissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$, puis décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$ et enfin à nouveau croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Variations de f	↗	$f(-1)$	↘ $f(1)$	↗

Pour étudier les variations de f, on peut construire un tableau regroupant le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

OBJECTIF 2 Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

Savoir-faire 2 p. 143

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I
et a un nombre réel appartenant à I.

Définitions

- Le nombre réel M est le **maximum** de la fonction f sur I si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leqslant M$ et s'il existe un nombre réel u de I tel que $f(u) = M$.
On dit alors que le maximum M de f sur I est atteint en u.
- Le nombre réel m est le **minimum** de la fonction f sur I si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \geqslant m$ et s'il existe un nombre réel v de I tel que $f(v) = m$.
On dit alors que le minimum m de f sur I est atteint en v.

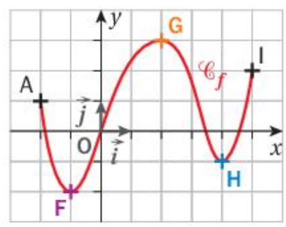
On appelle **extremum** de la fonction f sur I un **maximum** ou un **minimum** de f sur I.

Exemple 2

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle I = [−2 ; 5].

Le **maximum** de f sur I est égal à 3 et est atteint en $x = 2$.

Le **minimum** de f sur I est égal à −2 et est atteint en $x = -1$.



Définition

On dit que le nombre réel α est **un extremum local** de la fonction f sur I s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I tel que α soit un extremum de f sur J.

En reprenant l'**exemple 2** ci-dessus, le nombre réel −1 est **un minimum local** de la fonction f sur I car −1 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle J =]3 ; 5[par exemple.

On distingue ici **un minimum local** de f sur un intervalle inclus dans I **du minimum global** de f sur I.

Théorème

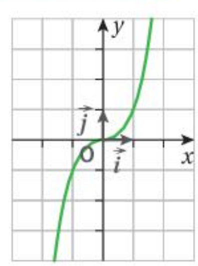
Si le nombre réel a n'est pas une borne de l'intervalle I et si la fonction f admet un extremum local en a sur I, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration à compléter : exercice 58 p. 153

Ce théorème fournit une **condition nécessaire** pour l'existence d'un extremum d'une fonction dérivable sur un intervalle I.

⚠ **La réciproque de ce théorème est fausse.**

La fonction cube définie et dérivable sur ℝ par $f(x) = x^3$ est un **contre-exemple** qui permet de le démontrer.
En effet, pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2$.
$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ mais la fonction cube, strictement croissante sur ℝ, n'admet pas d'extremum sur ℝ.



Théorème (admis)

Si le nombre réel a n'est pas une borne de l'intervalle I et si la fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a sur I.

Ce théorème fournit une **condition suffisante** pour l'existence d'un extremum d'une fonction dérivable sur un intervalle I.

Reprenons la fonction f de l'**exemple 1** ci-contre.

Sur l'intervalle [−1,5 ; 1,5], la fonction dérivée f' s'annule en changeant de signe pour $x = -1$ et $x = 1$.
f admet donc **deux extrema locaux** en $x = -1$ et $x = 1$.

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2$.

2 est un **maximum local** de la fonction f sur [−1,5 ; 1,5], atteint en $x = -1$.
−2 est un **minimum local** de la fonction f sur [−1,5 ; 1,5], atteint en $x = 1$.

Savoir-faire

Vidéo
Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée
hatier-clic.fr/ma1142

OBJECTIF 1
Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

1 Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x.$$

Solution

f est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{6} \times x^2 - 2 \times \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1.$$

f' est une fonction polynôme du second degré avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -1$.

Pour étudier son signe, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}.$$

$\Delta > 0$ donc $f'(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1} = 2.$$

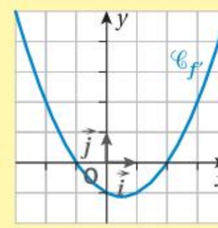
Comme a est positif, on en déduit que f' est négative sur $[-1 ; 2]$ et positive sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$.
On complète alors le signe de $f'(x)$ dans la 2e ligne du tableau ci-dessous.
D'après le théorème qui lie le signe de la dérivée aux variations de la fonction, on en déduit les variations de la fonction f dans la 3e ligne du tableau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗	$\frac{7}{12}$	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	

Pour compléter ce tableau, on calcule :

- $f(-1) = \frac{1}{6} \times (-1)^3 - \frac{1}{4} \times (-1)^2 - (-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{-2 - 3 + 12}{12} = \frac{7}{12}$;
- $f(2) = \frac{1}{6} \times (2)^3 - \frac{1}{4} \times (2)^2 - 2 = \frac{8}{6} - 1 - 2 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$.

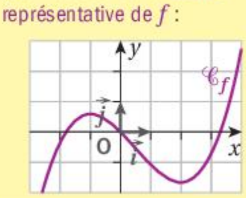
Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré, voir Savoir-faire 4 p. 84 (Chapitre 3).



Pour tout nombre réel x d'un intervalle I :
– si $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I ;
– si $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

On peut contrôler les variations d'une fonction en faisant afficher sa courbe représentative à l'aide d'un outil numérique.

Le calcul des valeurs exactes ou approchées des images de −1 et 2 par f est nécessaire pour le tracé de la courbe représentative de f :



Application

8 Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations, puis tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
a. $f(x) = 5x^2 - 3x$ **b.** $g(x) = -x^2 + 5x + 7$ **c.** $h(x) = -x^3 - x^2 + x - 1$

9 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Les incontournables 23 à 27 p. 147

2 Rechercher un extremum

OBJECTIF 2
Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

a. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à 36 cm^2 pour que son périmètre soit minimal.
b. Calculer ce périmètre minimal.

Solution

a. • On **modélise** le problème.
On note x la longueur et y la largeur du rectangle, x et y étant des nombres réels strictement positifs. Comme $y = \dfrac{36}{x}$, on note $P(x)$ le périmètre de ce rectangle. P est alors une fonction définie pour tout nombre réel x strictement positif par :

$$P(x) = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) = 2x + \frac{72}{x}.$$

• On étudie les variations de P sur $]0\ ;+\infty[$.
P est une somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.
Pour tout x dans $]0\ ;+\infty[$, on a $P'(x) = 2 - \dfrac{72}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 72}{x^2} = \dfrac{2\left(x^2 - 36\right)}{x^2}$.
Comme $x^2 > 0$ sur $]0\ ;+\infty[$, $P'(x)$ a le même signe que le polynôme $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$, qui admet deux racines réelles distinctes sur $\mathbb{R}$: 6 et -6. On en déduit le tableau de variations de P sur $]0\ ;+\infty[$:

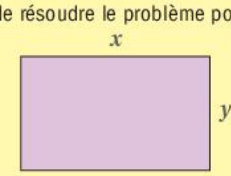
x	0		6		$+\infty$
Signe de $P'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de P	‖	↘	$P(6)$	↗	

• Sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, la fonction dérivée P' s'annule en changeant de signe pour $x = 6$. Donc P admet **un minimum** sur $]0\ ;+\infty[$, atteint en $x = 6$.
On peut donc en déduire les dimensions du rectangle de périmètre minimal :

$$\boxed{x = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad y = \frac{36}{x} = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm.}}$$

b. $P(6) = 2 \times 6 + \dfrac{72}{6} = 12 + 12 = 24$
On a donc $P(x) \geqslant 24$ pour tout x de $]0\ ;+\infty[$.
On en déduit que le minimum de P sur $]0\ ;+\infty[$ vaut 24.
Ainsi, le périmètre minimal de ce rectangle est égal à 24 cm.

Modéliser c'est traduire la situation mathématiquement par une fonction permettant de résoudre le problème posé.



Le périmètre de ce rectangle est égal à $2 \times (x + y)$.
Son aire est égale à 36 cm^2, donc :
$xy = 36 \Leftrightarrow y = \dfrac{36}{x}$, $x > 0$.

-6 n'appartient pas à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Optimiser ce problème, revient à **rechercher le minimum de la fonction P** sur $]0\ ;+\infty[$.

On peut **contrôler** ces résultats en vérifiant les variations et extremums à l'aide d'un outil numérique (courbe et table de valeurs).

Ce rectangle de périmètre minimal est un carré.

Application

10 Déterminer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est égal à 26 cm pour que son aire soit maximale, puis calculer cette aire maximale.

11 On a modélisé l'évolution d'une épidémie par la fonction f exprimant le nombre de cas en milliers par $f(t) = -\dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{5}{2}t^2 + 28t$, avec $t \in [1\ ;20]$ le temps écoulé (en jours) depuis le début de l'épidémie.
• Déterminer le nombre de jours au bout duquel le pic de l'épidémie est atteint, ainsi que le nombre de cas correspondant.

Les incontournables 28 à 30 p. 147

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est **croissante** sur I.	Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est **décroissante** sur I.	Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Du tableau de signes de f' au tableau de variations de f

f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et α est un nombre réel tel que $\alpha \in [a\,;\,b]$.

x	a		α		b
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	$f(a)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(b)$

$\forall x \in [a\,;\,\alpha]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est **croissante** sur $[a\,;\,\alpha]$.

$\forall x \in [\alpha\,;\,b]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est **décroissante** sur $[\alpha\,;\,b]$.

▶ Cours 1 p. 140

Extremum et extremum local d'une fonction

- Si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leqslant M$ et s'il existe un nombre réel u de I tel que $f(u) = M$, alors M est **le maximum** de la fonction f sur I, atteint en u.
- Si, pour tout nombre réel x de I, $f(x) \geqslant m$ et s'il existe un nombre réel v de I tel que $f(v) = m$, alors m est **le minimum** de la fonction f sur I, atteint en v.

Un **extremum** de f sur I correspond au **maximum** ou au **minimum** de f sur I.

- Un **extremum local** est **un extremum** de f sur un intervalle ouvert inclus dans I.

Condition nécessaire
Si f admet un extremum local en α (qui n'est pas une borne de I), alors $f'(\alpha) = 0$.

Condition suffisante
Si la fonction dérivée f' s'annule en α en changeant de signe, alors f admet un extremum local en α sur I.

Du tableau de signes de f' à l'extremum de f

x		α	
Signe de $f'(x)$	+	0	−
Variations de f	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

$f(\alpha) = M$

x		α	
Signe de $f'(x)$	−	0	+
Variations de f	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

$f(\alpha) = m$

▶ Cours 2 p. 141

... ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

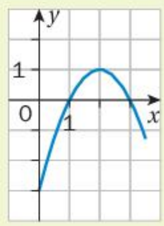
Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

12 Voici le tableau de signes de la fonction dérivée f' d'une fonction f, définie et dérivable sur [0 ; 3,5] :

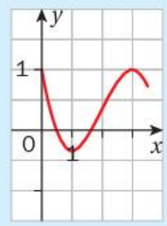
x	0		1		3		3,5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Une courbe représentative possible pour la fonction f est :

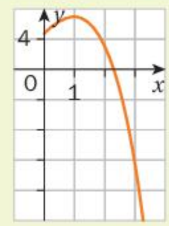
A



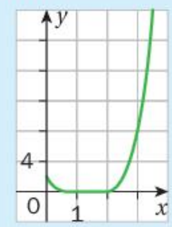
B



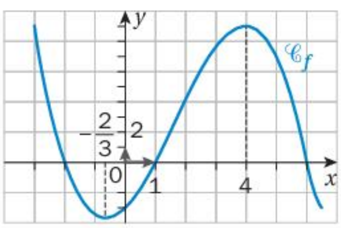
C



D



13 Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur [–3 ; 6,5] :



On note f' la fonction dérivée de f. On a $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si x appartient à :

A	B	C	D
$\left[-3 ; -\frac{2}{3}\right] \cup [4 ; 6{,}5]$	$[-2 ; 1] \cup [6 ; 6{,}5]$	$\left[-\frac{2}{3} ; 4\right]$	$[-3 ; -2] \cup [1 ; 6]$

Pour les exercices 14 et 15

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 6]. On note f' la fonction dérivée de f.

x	0		1		4		6
Variations de f	10	↘	4,5	↗	18	↘	–8

14 On a $f'(x) \leqslant 0$ si et seulement si x appartient à :

A	B	C	D
[1 ; 4]	[0 ; 1]	[4 ; 6]	[0 ; 1] ∪ [4 ; 6]

15 Sur l'intervalle [0 ; 6], la fonction f admet :

A	B	C	D
au moins un extremum.	4 comme maximum et 1 comme minimum.	son maximum en $x = 4$ et son minimum en $x = 1$.	18 comme maximum et –8 comme minimum.

16 La fonction g est définie sur l'intervalle [–2 ; 8] par :

$$g(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 32.$$

g est dérivable sur [–2 ; 8].
Le minimum de la fonction g sur [–2 ; 8] est :

A	B	C	D
–24	–80	4	–82

17 La fonction h est définie sur l'intervalle [–2 ; 5] par :

$$h(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x.$$

h est dérivable sur [–2 ; 5].
Le maximum de la fonction h sur [–2 ; 5] est :

A	B	C	D
–115	4	20	115

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

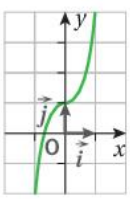
Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

18 Parlons stratégies ! À l'oral

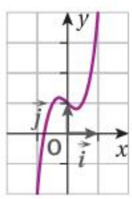
Dans les repères ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives de trois fonctions définies sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
Associer à chaque courbe l'expression de la fonction représentée parmi celles proposées ci-dessous.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

$f(x) = 2x^3 + x + 1$ $\qquad$ $g(x) = 4x^3 - x + 1$ $\qquad$ $h(x) = 3x^3 + 1$

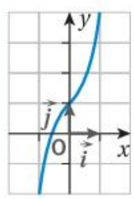
a.



b.



c.



Différentes stratégies pour reconnaître l'expression d'une fonction à partir de sa courbe représentative

Stratégie 1
Je construis le tableau de variations complet de la fonction représentée.

Stratégie 2
J'utilise des valeurs particulières lues sur la courbe.

Stratégie 3
J'observe les valeurs qui annulent la dérivée de la fonction représentée.

J'ai une **autre stratégie** !

19 Parlons stratégies ! À l'oral

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions dérivées des fonctions définies sur I par les expressions suivantes. Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^4 - 2x^2$

b. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

c. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$

d. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f_4(x) = -5x^2 + \dfrac{3}{2}x$

e. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$, $f_5(x) = (1-x)\sqrt{x}$

f. $\mathrm{I} = \mathbb{R}^*$, $f_6(x) = x + \dfrac{16}{x}$

Différentes stratégies pour dresser un tableau de signes

Stratégie 1
Je pense à factoriser et au signe d'un produit ou d'un quotient.

Stratégie 2
Je pense au signe d'une fonction polynôme du second degré.

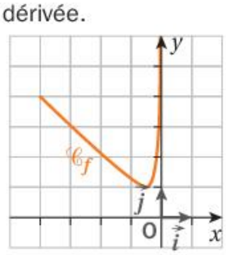
Stratégie 3
Je pense au signe d'une fonction affine ou à celui de la fonction racine carrée.

J'ai une **autre stratégie** !

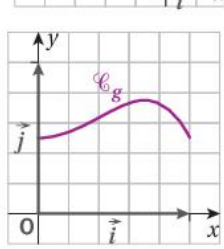
20 En moins de deux minutes !

Dans chaque cas, construire le tableau de variations de la fonction en précisant ses extremums, ainsi que le tableau de signes de la fonction dérivée.

a. f définie sur $\mathrm{I} =]-4\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 4[$ est impaire et sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère sur $]-4\ ;\ 0[$ est donnée ci-contre.



b. g définie sur $\mathrm{J} = [-1\ ;\ 1]$ est paire et sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère sur $[0\ ;\ 1]$ est donnée ci-contre.



21 En moins de quatre minutes !

Dresser le tableau de variations de chaque fonction sur son ensemble de définition.

a. $f_1 : x \mapsto x^3 + 7x + 21$

b. $f_2 : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$

c. $f_3 : x \mapsto -4\sqrt{x} - 3x + 4$

d. $f_4 : x \mapsto -x^3 + \dfrac{1}{x}$

22 En moins de quinze minutes !

Dresser le tableau de variations de chaque fonction sur son ensemble de définition.

a. $f_1 : x \mapsto x^3\left(x - \dfrac{4}{3}\right)$

b. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{1+x}$

d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

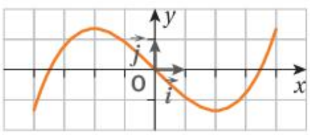
e. $f_5 : x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 12$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

23 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.



a. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

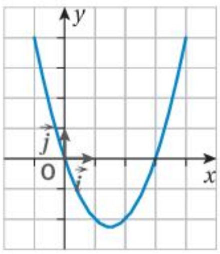
b. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

24 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-5	-1	7	$+\infty$
Variations de f		0	-4	0	

• Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis celui de $f(x)$.

25 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 4]$.



a. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-1 ; 4]$.

b. On donne :

$$f(-1) = -\frac{11}{6} \ ; \ f(0) = 0 \ ; \ f(3) = -4{,}5 \ \text{et} \ f(4) = -\frac{8}{3}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $[-1 ; 4]$.

26 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = -4x^2 + x - 11$ **b.** $g(x) = -x^3 + 2x^2 - 7$

c. $h(x) = x(3x-1)(-2x+3)$ **d.** $k(x) = -6x^2 + 30x + 25$

e. $l(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 20$

27 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes définies sur I.

a. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

b. $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$, $g(x) = \dfrac{x-7}{x}$.

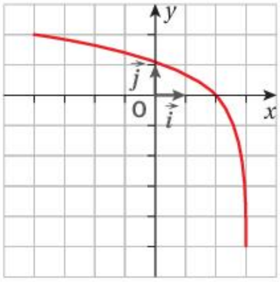
c. $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$, $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

d. $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $k(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

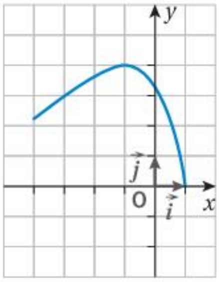
Rechercher un extremum

28 On donne ci-dessous quatre courbes représentatives de fonctions dérivées de fonctions dérivables et définies sur un intervalle I.
Pour chacune d'elles, préciser si la fonction associée admet un extremum et en préciser sa nature (minimum ou maximum). Justifier.

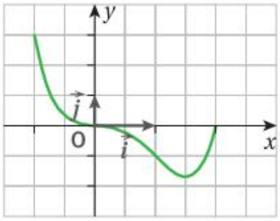
a. $\mathrm{I} = [-4 ; 3]$



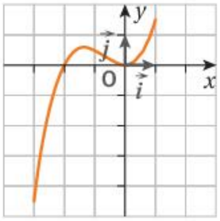
b. $\mathrm{I} = [-4 ; 1]$



c. $\mathrm{I} = [-1 ; 2]$



d. $\mathrm{I} = [-3 ; 1]$



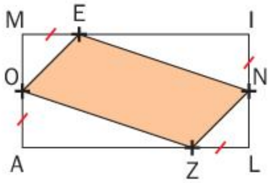
29 Une entreprise produit des clés USB.
La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$B(x) = -x^2 + 10x - 9$$

où x représente le nombre de milliers de clés USB vendues.

• Déterminer le nombre de clés USB à produire pour que cette entreprise réalise un bénéfice mensuel maximal.

30 MILA est un rectangle tel que MI = 4 et IL = 2.
Les points E, N, Z et O sont tels que ME = IN = LZ = AO.



• Existe-t-il une position du point E pour laquelle l'aire du parallélogramme ENZO soit minimale ? Justifier.

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

Savoir-faire 1 p. 142

Questions FLASH

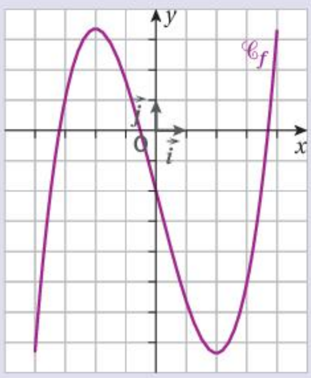
Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

31 f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ telle que $f(-3) = f(3) = -24$, $f(-1) = 8$ et $f(4) = -17$.
Voici le tableau de signes de $f'(x)$:

x	-3		-1		3		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Dresser le tableau de variations de f.

32 Vrai ou faux ?
f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$ représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.



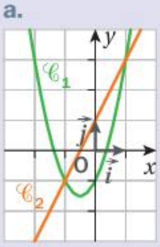
a. « Sur l'intervalle $[-4\ ;\ -2]$, f est positive. »
b. « Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, f est strictement décroissante. »
c. « Pour tout réel x de $[2\ ;\ 4]$, $f'(x) \leqslant 0$. »
d. « Sur l'intervalle $[-2\ ;\ -0{,}5]$, f' est négative. »

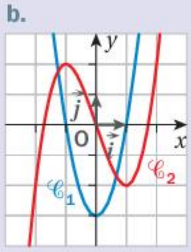
33 Voici le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 8]$.

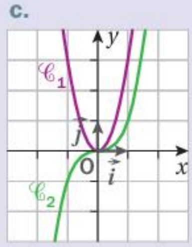
x	-5	$-2{,}5$	4	8
Variations de f	-2 ↗	1 ↘	-1 ↗	4

On note f' la fonction dérivée de f.
1. QCM
a. $f'(-2{,}5) = 1$ **b.** $f'(-1) < 0$ **c.** $f'(-1) = 4$
2. Recopier et compléter les phrases suivantes.
a. $f'(x) \leqslant 0$ si et seulement si x appartient à ....
b. $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si x appartient à ....

34 Dans chaque cas, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives d'une fonction f et de sa dérivée f'.
Associer chaque courbe à sa fonction. Justifier.

a.


b.


c.


Pour les exercices 35 et 36
Pour chaque fonction, définie et dérivable sur I, calculer sa dérivée, puis dresser son tableau de variations.

35 **a.** $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
b. $g : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
c. $h : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
d. $k : x \mapsto -2\sqrt{x} + 1$, $\mathrm{I} =]0\ ;\ +\infty[$.
e. $l : x \mapsto x\sqrt{x} + 1$, $\mathrm{I} =]0\ ;\ +\infty[$.

36 **a.** $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
b. $g : x \mapsto \dfrac{3x}{x+1}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
c. $h : x \mapsto x^4 - \dfrac{4}{3}x^3$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
d. $k : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+1}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
e. $l : x \mapsto (x-3)(x^2+1)$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

37 Vrai ou faux ? LOGIQUE
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
Variations de f	↗	5 ↘	$-\dfrac{3}{2}$ ↗	

a. « $f(-2) < f(-1)$. »
b. « $f(0) < f(2)$. »
c. « $f(-3) > f(4)$. »
d. « Si $-1 \leqslant x \leqslant 2$ alors $-\dfrac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant 5$. »
e. « La dérivée de f s'annule pour $x = 2$. »
f. « $f'(-1) = 5$. »
g. « $f'(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ 2[$. »
h. « $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-10\ ;\ -1]$. »

38 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a calculé la dérivée de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

1 Développer$\left(\text{Dérivée}\left(\dfrac{x^2 - x + 2}{(x-2)}\right)\right)$
→ $\dfrac{\mathbf{x^2 - 4\,x}}{\mathbf{x^2 - 4\,x + 4}}$

a. Vérifier le résultat affiché.
b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
c. En déduire le tableau de variations de f.
Justifier.

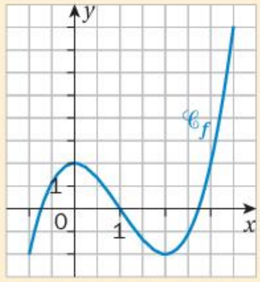
Fichier Python
Ex. 40
Manuel numérique enseignant

★★

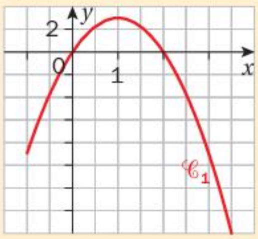
39 QCM

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur [–1 ; 3,5].

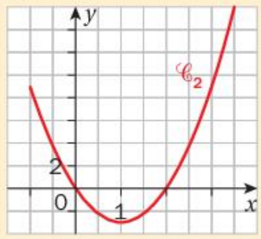
Parmi les quatre courbes ci-dessous, laquelle pourrait représenter graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f ?



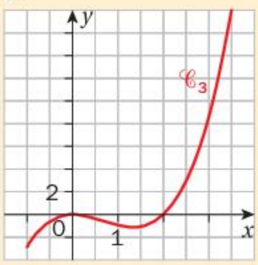
a.



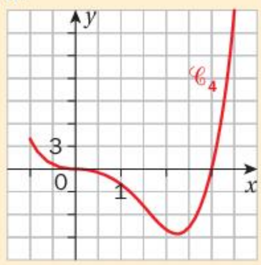
b.



c.



d.



Maths à l'oral

Expliquez oralement chaque étape de votre raisonnement pour justifier votre réponse.

40 PROGRAMMATION python

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + 5$ où a et b sont des réels ($a \neq 0$).

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et de b.

b. Proposer un algorithme qui, à partir des valeurs de a et b connues, indique les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone et le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles.

c. Programmer cet algorithme à l'aide d'une fonction en Python.

41 LOGIQUE

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On considère la proposition suivante :

« Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, alors $f(-3) \leqslant f(1)$. »

a. Cette proposition est-elle vraie ? Justifier.

b. La proposition réciproque de cette proposition est-elle vraie ? Justifier.

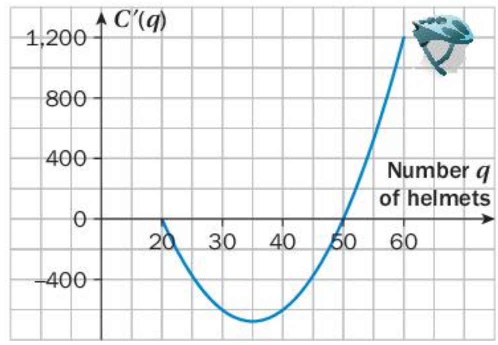
2. Vrai ou faux ?

a. « Si f est strictement négative sur $\mathbb{R}$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. »

b. « Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f' est négative sur $\mathbb{R}$. »

42 IN ENGLISH ▶ p. 381

A business manufactures helmets for cyclists. The cost of production in euros is modelled by the function C, defined and differentiable in the interval [20;60]. C is a function of q, the number of helmets manufactured. Drawn in the graph below is the curve represented by the derivative function C'.



a. State the subintervals in which C' is negative, positive or zero.

b. State the subintervals in which C is increasing, decreasing or static.

c. What can you say about the variation in the cost of production of these helmets? Explain.

43

À Amsterdam, une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines afin de promouvoir une nouvelle marque de smoothies.

Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes de cette ville ayant pris connaissance de la marque est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 30] par :

$$f(x) = \frac{75x}{x+2}.$$

L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit ce smoothie est qu'au moins 70 % des habitants d'Amsterdam aient pris connaissance de cette marque.

a. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif est atteint ?

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 30].

Aide Dériver la fonction f et étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dans un repère, construire la courbe représentative de la fonction f sur [0 ; 30].

d. Après les 15 premières semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.

e. Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires à l'agence publicitaire pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

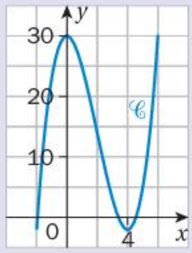
OBJECTIF 2 Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

Savoir-faire 2 p. 143

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

44 f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-contre.



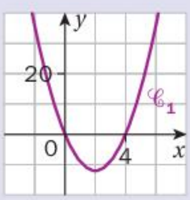
1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Justifier.

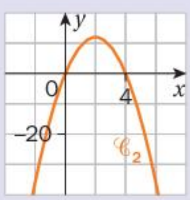
x	-2	…	4	6
Signe de $f'(x)$	… … … … …			
Variations de f	-2 ↗ … ↘ -2 ↗ …			

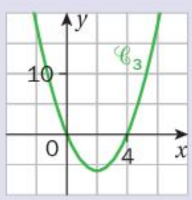
2. QCM
La fonction f admet un extremum local en $x =$ … :
a. -2 **b.** 0 **c.** 4 **d.** 6

3. Vrai ou faux ?
a. « 30 est le maximum de f sur $[-2\ ;6]$. »
b. « Si $-2 \leqslant x \leqslant 6$, alors $0 \leqslant f(x) \leqslant 30$. »

4. Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celle(s) qui pourrai(en)t représenter la dérivée de f. Justifier.







45 QCM
f est la fonction définie et dérivable sur $[-3\ ;2]$ par :
$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

1. Pour tout x de $[-3\ ;2]$, $f'(x)$ est égale à :
a. $3x^2 - 2x - 5$ **b.** $5x^2 - 3x - 5$
c. $2x^2 - 6x - 5$ **d.** $3x^2 + 2x - 5$

2. La fonction f admet un extremum local en $x =$ … :
a. 1 **b.** $-\frac{5}{3}$ **c.** -1 **d.** 0

3. Le minimum de la fonction f sur $[-3\ ;2]$ est :
a. -2 **b.** $-\frac{5}{3}$ **c.** 0 **d.** -1

46 f est une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;80]$. On donne le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0		10		60		80
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Pour quelle valeur de x, f admet-elle un maximum local sur $[0\ ;80]$? et un minimum local ? Justifier.

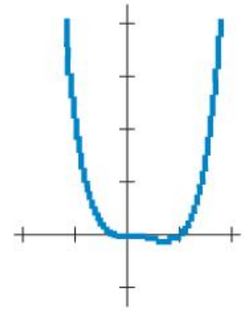
47 De la conjecture à sa démonstration

1. Tracer à la calculatrice la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :
$$f(x) = 2x - \sqrt{x}.$$
Conjecturer la valeur minimale prise par f sur $]0\ ;+\infty[$ et la valeur de x pour laquelle cette valeur est atteinte.

2. a. f' désigne la dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(x)$, puis dresser son tableau de signes.
b. Dresser le tableau de variations de f.
c. Confirmer ou infirmer la conjecture émise à la question **1**.

48 De la conjecture à sa démonstration

Sur le graphique ci-contre, obtenu à l'aide d'un outil numérique, est représentée sur l'intervalle $[-2\ ;2]$ la fonction f définie par :
$$f(x) = x^4 - x^3.$$



1. Conjecturer les variations et le minimum de la fonction f sur $[-2\ ;2]$.

2. a. Calculer la dérivée f' de f, puis dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
b. Dresser le tableau de variations de f.
c. Confirmer ou infirmer la conjecture émise à la question **1**.

49 De la conjecture à sa démonstration

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. TICE À l'aide d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f. Conjecturer le minimum et le maximum de la fonction f, ainsi que les valeurs de x pour lesquelles ces extrema sont atteints.

2. a. Calculer la dérivée f' de f, puis dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
b. Dresser le tableau de variations de f.
c. Confirmer ou infirmer la conjecture émise à la question **1**.

50 Vrai ou faux ? LOGIQUE

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel appartenant à I.

a. « Il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ non dérivable en $x = 0$ qui admet un minimum pour $x = 0$. »

b. « Il existe une fonction dérivable sur l'intervalle I qui admet un maximum en a sur I dont la dérivée ne s'annule pas en a. »

★★

51 **Vrai ou faux ?**

Une entreprise fabrique et vend des montres connectées. On modélise le bénéfice (en €), pour x centaines de montres fabriquées et vendues par semaine, par la fonction B définie sur [0 ; 9] par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200.$$

a. « Fabriquer et vendre 600 montres connectées par semaine est rentable pour l'entreprise. »

Info
Le système est rentable si l'entreprise réalise un bénéfice positif.

b. « La fonction B', dérivée de la fonction B, est définie pour tout x de [0 ; 9] par :

$$B'(x) = 120x^2 - 1\,122x + 1\,917. \text{ »}$$

c. « La fonction B', dérivée de la fonction B, s'annule trois fois sur l'intervalle [0 ; 9]. »

d. « Le bénéfice hebdomadaire maximum est réalisé pour 772 montres connectées fabriquées et vendues. »

Maths à l'oral
Justifiez oralement vos réponses en vous appuyant sur le signe d'une fonction (**a**) ou sur le lien entre signe de la dérivée, variations et extremum (**b**, **c** et **d**).

52 LOGIQUE

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel. Recopier et compléter les phrases suivantes avec « *il faut* » ou « *il suffit* ».

a. Pour que f admette un extremum en a, ... que $f'(a) = 0$.

b. Pour que $f'(a) = 0$, ... que f admette un extremum en a.

53 Une entreprise fabrique chaque jour des vélos électriques. La production quotidienne varie entre 0 et 25 vélos. On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière.

B est la fonction bénéfice, en euros, définie sur l'intervalle [0 ; 25] par :

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100.$$

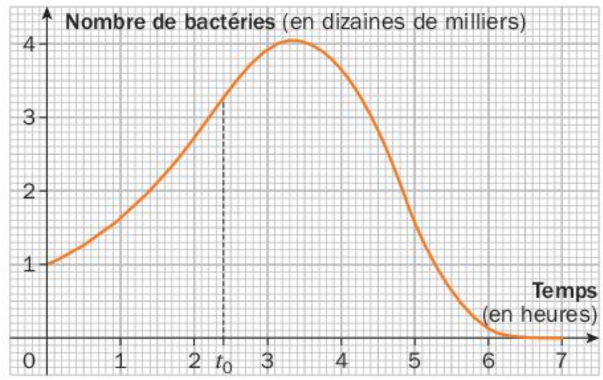
a. Justifier le tableau de signes suivant.

x	0		3		17		25
Signe de $B'(x)$		−	0	+	0	−	

b. Dresser le tableau de variations complet de la fonction B sur [0 ; 25].

c. Déterminer le nombre de vélos électriques que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

54 Dans un milieu de culture, une population bactérienne évolue en fonction du temps t exprimé en heures. À l'instant $t = 0$, il y a 10 000 bactéries dans la culture. À l'instant t_0, on y introduit un antibiotique. Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de bactéries (en dizaines de milliers) en fonction du temps t (en heures).



a. Déterminer graphiquement une estimation du nombre maximum de bactéries obtenu dans ce milieu de culture.

b. Entre 3 h et 5 h après le début de l'étude, le nombre de bactéries (en dizaines de milliers) est donné en fonction de t (en heures) par $f(t) = -0{,}9t^2 + 6t - 5{,}95$.
Déterminer le nombre maximal de bactéries obtenues dans ce milieu et préciser au bout de combien de temps ce maximum est atteint.

D'après Bac ST2S, Métropole, septembre 2018.

55 IN ENGLISH ▶ p. 381

In a spa-beauty clinic, the weekend beauty offers are priced at x euro each. The turnover in euros achieved by the centre is modelled by the function R defined in the interval [100;300]: $R(x) = -0{,}6x^2 + 219x$.

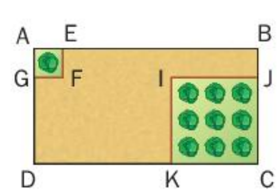
a. What price per offer should be used so that the turnover would be a maximum?

b. What then would be this maximum turnover?

56 Un salon de coiffure est ouvert de 9 h à 19 h. Le nombre de clients présents dans le salon au cours de la journée est modélisé par la fonction N définie sur [0 ; 10] par $N(t) = -0{,}5t^3 + 6{,}75t^2 - 21t + 35$ où t désigne le temps en heures écoulé depuis 9 h.

- À quelle heure le nombre de clients attendus dans le salon est-il maximal ? Donner une estimation de ce nombre.

57 Dans une cour rectangulaire ABCD de 8 m sur 4 m, on souhaite délimiter deux carrés potagers dans deux coins opposés (AEFG et IJCK) avec G, F, I et J alignés.



- Comment faut-il construire ces deux carrés potagers pour que l'aire de la zone restante soit maximale ?

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Vidéo
Démonstration : sens de variation et signe de la dérivée
hatier-clic.fr/ma1152

La démonstration rédigée

Théorème

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si f est croissante sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

OBJECTIF : **on souhaite établir un lien entre les variations de f et le signe de sa dérivée f'.**

Démonstration

- Pour tout $a \in \mathrm{I}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathrm{I}$, le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On raisonne alors par **disjonction des cas** (Rabat VI, Raisonnements) selon le signe de h.

– **Si $h > 0$**, alors $a + h > a$.
Comme f est croissante sur I, on a :

$$f(a + h) \geqslant f(a) \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) \geqslant 0.$$

Donc le quotient $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est **positif**
car c'est le quotient de deux nombres positifs (h et $f(a + h) - f(a)$).

– **Si $h < 0$**, alors $a + h < a$.
Comme f est croissante sur I, on a :

$$f(a + h) \leqslant f(a) \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) \leqslant 0.$$

Ainsi, le quotient $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est **positif**
car c'est le quotient de deux nombres négatifs (h et $f(a + h) - f(a)$).

Par conséquent, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a $t(h) \geqslant 0$.

- f est dérivable sur I donc f est dérivable en a et $\lim\limits_{h\to 0} t(h)$ existe.
Pour tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\lim_{h\to 0} t(h) = f'(a).$$

Comme $t(h) \geqslant 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a donc $f'(a) \geqslant 0$.

Info
On dit que l'on effectue un **passage à la limite**.

- Ainsi, si f est croissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$. ■

Le principe

1. On commence par calculer **le taux de variation** de f en a.
2. On étudie le **signe de ce taux de variation**. Pour cela, **on utilise l'hypothèse** « f est croissante sur I » et **la définition** d'une fonction croissante.
3. On en déduit le **signe du nombre dérivé** sur I **en utilisant l'hypothèse** « f est dérivable sur I » et **la définition** du nombre dérivé.
4. On conclut **en utilisant la définition** de la fonction dérivée.

La démonstration à compléter

58 En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de déterminer **une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction** dérivable sur un intervalle I.

Démonstration

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
a est un nombre réel appartenant à I.
Supposons que f admet un maximum local en a, a n'étant pas une borne de I.

- f est dérivable en a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots) - f(\ldots)}{h}.$$

- Comme $f(a)$ est **un maximum local de la fonction f sur I**, alors il existe un … J inclus dans I tel que $f(a)$ soit **un maximum de f sur J**.
Donc pour tout nombre réel x de J, $f(x)$ … $f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a)$ … 0.
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in$ J, en prenant $x = a + h$,
$f(a + h) - f(a)$ … 0.

- On raisonne par **disjonction des cas** selon le signe de h.
– **Si $h > 0$,** alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ … 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ … 0.
Donc $f'(a)$ … 0.
– **Si $h < 0$,** alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ … 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ … 0.
Donc $f'(a)$ … 0.

- Ainsi, pour $h > 0$, $f'(a)$ … 0, et pour $h < 0$, $f'(a)$ … 0.
Le seul nombre à la fois positif et négatif est zéro.
Donc si f admet un maximum en a sur I, alors $f'(a) =$ … . ■

Appliquez le même raisonnement pour déterminer une condition nécessaire pour l'existence d'un **minimum local** d'une fonction f en a et ainsi obtenir une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction dérivable sur un intervalle I.

1 On utilise la **définition du nombre dérivé** de f en a.

2 On utilise la **définition d'un extremum local.**

3 **On étudie le signe de $f'(a)$.**
Pour cela, on détermine :
a. le signe du quotient d'un nombre négatif par un nombre positif ;
b. le signe du quotient d'un nombre négatif par un nombre négatif.

4 On conclut.

Démonstrations Vers le BAC

Pour les exercices 59 et 60
f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un nombre réel appartenant à I.

59 **a.** Démontrer que si f est décroissante sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.

Aide On pourra s'inspirer de la **démonstration rédigée** ci-contre.

b. De la même façon, démontrer que si f est constante sur I alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.

60 On considère le théorème suivant :
Si le nombre réel a n'est pas une borne de l'intervalle I et si la fonction f admet un extremum local en a sur I, alors $f'(a) = 0$.

- Démontrer que la réciproque (▶ Rabat V, Logique) de ce théorème est fausse en utilisant un contre-exemple différent de celui présenté dans le cours p. 141.

61 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$
avec a, b et c des nombres réels quelconques, $a \neq 0$.
- Démontrer que la fonction f admet exactement un maximum et un minimum local sur $\mathbb{R}$ si et seulement si b est non nul.

Aide On pourra raisonner par disjonction des cas (▶ Rabat VI, Raisonnements).

Fichiers Python et logiciel
Ex. 62, 65 et 67
Manuel numérique enseignant

62 PROGRAMMATION python

f est une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{a}{x}$ où a est un nombre réel.

1. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a.

b. Étudier les variations de la fonction f pour $a = 1$, puis pour $a = -1$.

c. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$?

2. a. Proposer un algorithme qui, à partir de la valeur de a saisie, indique les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone.

b. Programmer cet algorithme en Python.

63 f est une fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b et c sont des nombres réels.

On donne le tableau de variations de la fonction f.

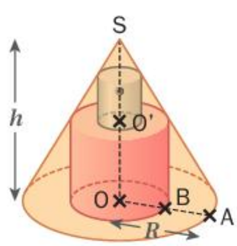
x	1		2		3
Variations de f	…	↘	-4	↗	2

a. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[1 ; 3]$.

b. Chercher | Calculer $f(1)$. Justifier.

64 Boîte conique

Calculer | Un parfumeur veut fabriquer une boîte de présentation en forme de cône pour contenir un flacon de parfum cylindrique de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm.



On note R le rayon de la base de la boîte conique et h sa hauteur.

Pour diminuer le coût de fabrication, le parfumeur souhaite utiliser le moins de carton possible et donc trouver la boîte conique de volume minimal.

a. Compte tenu des contraintes, exprimer la hauteur h de la boîte conique en fonction de R.

En déduire son volume $\mathcal{V}$ en fonction de R.

b. Déterminer la valeur du rayon R et de la hauteur h de cette boîte conique de sorte que son volume soit minimal. Quel est ce volume minimal (arrondi au dixième de cm^3) ?

65 PROGRAMMATION python

f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).

a. Proposer un algorithme qui, à partir des valeurs connues a, b et c, indique la valeur de l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.

b. Programmer cet algorithme en Python à l'aide d'une fonction renvoyant une liste des résultats demandés.

66 Recette et bénéfice

Calculer | Une entreprise fabrique et vend des trottinettes électriques. On modélise le coût total de fabrication journalier, en centaines d'euros, de x trottinettes ($2 \leqslant x \leqslant 14$) par la fonction notée C telle que :

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x - 50.$$

Le nombre x de trottinettes demandées est fonction de leur prix unitaire P, en centaines d'euros, qui vérifie la condition $P = 12 - \dfrac{1}{2}x$.

1. a. Déterminer la recette totale journalière $R(x)$ correspondant à la vente de x trottinettes.

b. Pour quel nombre de trottinettes vendues quotidiennement réalise-t-on la recette maximale ? Quel est dans ce cas le prix d'une trottinette ?

2. a. Exprimer le bénéfice journalier $B(x)$ obtenu pour la vente de x trottinettes.

Aide Le bénéfice d'une entreprise se calcule par différence entre la recette et le coût de production.

b. Pour quel nombre de trottinettes vendues réalise-t-on le bénéfice journalier maximal ? Quel est dans ce cas le prix d'une trottinette électrique ?

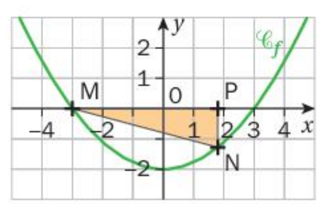
c. Pour quel(s) nombre(s) de trottinettes vendues réalise-t-on un bénéfice journalier ?

d. Avec la calculatrice, représenter dans un même repère les courbes représentatives des fonctions C, R et B sur $[2 ; 14]$.

e. Que peut-on dire du bénéfice journalier de cette entreprise lorsque la recette journalière est maximale ? Justifier.

67 Triangle d'aire maximale TICE

Dans un repère orthonormé, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{9}x^2 - 2$.



M est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -3, N est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, nombre réel appartenant à l'intervalle $[-3 ; 3]$, et P est le point de coordonnées $(a ; 0)$.

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$, puis le triangle MNP.

b. Modéliser | Exprimer l'aire du triangle MNP à l'aide d'une fonction de a.

c. L'aire du triangle MNP admet-elle un maximum ? Conjecturer la réponse à l'aide du logiciel, puis la confirmer ou l'infirmer en précisant si possible la valeur de ce maximum et la valeur de a correspondante.

Fichier logiciel
Ex. 73
Manuel numérique enseignant

68 Histoire des mathématiques

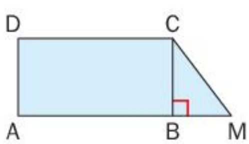
La mathématicienne et philosophe italienne Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) a découvert une courbe qui porte son nom : *la courbe d'Agnesi*.

a. Rechercher :
– dans quel ouvrage et en quelle année cette courbe a-t-elle été présentée par cette mathématicienne ? Quels étaient les domaines mathématiques développés dans cet ouvrage ?
– quel nom a-t-on donné à l'époque à cette courbe ? Pourquoi ?
– quelle est l'équation de cette courbe ?

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ représentée par la courbe d'Agnesi.

69 Modéliser | ABCD est un rectangle et BMC un triangle rectangle en B comme sur la figure ci-dessous.



On donne AB = 2 et CM = 1, et on pose BM = x.

a. Modéliser l'aire du trapèze AMCD à l'aide d'une fonction de x.

b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, Elena a obtenu les résultats ci-dessous.

1 $0.5\,(x+4)\,\sqrt{1-x^2}$
$\rightarrow \frac{1}{2}\,(x+4)\,\sqrt{-x^2+1}$

2 Dérivée($1)
$\rightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{x+4}{\sqrt{-x^2+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+1}$

3 Factoriser($2)
$\rightarrow (2x^2+4x-1)\cdot\frac{\sqrt{-x^2+1}}{2\,(x-1)\,(x+1)}$

4 Résoudre($3 = 0)
$\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{6}-2}{2}, x = \frac{\sqrt{6}-2}{2}\right\}$

Expliquer et vérifier les différents calculs effectués par Elena à l'aide de ce logiciel.

Aide $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

c. L'aire du trapèze AMCD peut-elle être maximale ? Si oui, dans quel cas ? Le démontrer.

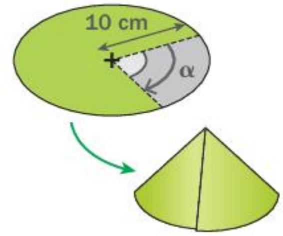
70

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;6]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{10}{x}\right)$.

• **Raisonner** | Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;6]$, $f(x) \geqslant \sqrt{10}$.

71 Chapeau chinois TICE

À partir d'un disque en carton souple de rayon 10 cm que l'on découpe sur un rayon et en faisant chevaucher le carton sur un angle α donné, on fabrique un chapeau de forme conique comme sur la figure ci-contre.

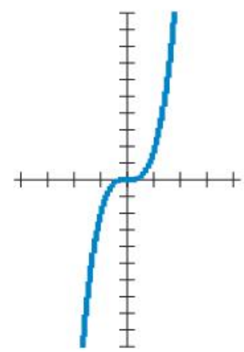


• **Calculer** | Parmi tous les chapeaux possibles construits selon cette méthode, quel est celui de volume maximal ? Quelle est sa hauteur ?

Aide On pourra utiliser un logiciel de calcul formel.

72

Adel a représenté à l'aide d'un outil numérique la fonction f définie par :
$$f(x) = 2x^3 - 0{,}2x^2$$
sur l'intervalle $[-3\,;3]$. Il a obtenu l'affichage ci-contre.



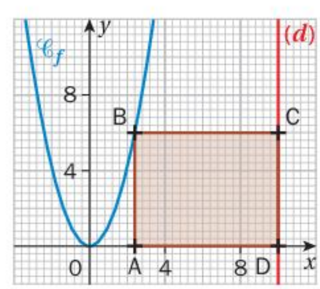
Il affirme que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

• **Communiquer** | A-t-il raison ?

Maths à l'oral
Confrontez vos arguments à ceux des autres élèves de la classe. Vous pourrez vous appuyer sur les fonctionnalités de votre calculatrice et sur des calculs.

73 1. TICE

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire dans un repère orthonormé :
· la droite (d) d'équation $x = 10$;
· la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carré ;
· le point A de coordonnées $(x\,;0)$, avec x réel compris entre 0 et 10 ;
· le rectangle ABCD comme sur la figure ci-contre.



b. Conjecturer une position du point A telle que l'aire du rectangle ABCD soit maximale.

2. Confirmer ou infirmer la conjecture de la question **1b.**

Fichiers Python et logiciel
Ex. 74 et 76
Manuel numérique enseignant

74 Position relative de deux courbes TICE

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire dans un repère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Quelles conjectures peut-on faire au sujet de la position relative de ces deux courbes ?

c. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

En déduire les coordonnées des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

d. Résoudre les inéquations $h(x) \leqslant 0$ et $h(x) \geqslant 0$.

En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Aide On pourra construire un tableau de signes pour $h(x)$.

2. x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;1]$. On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$ et N le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_g$.

a. À l'aide du logiciel, placer les points M et N, puis conjecturer les variations de la distance MN en fonction de x.

b. Justifier que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;1]$, $\text{MN} = h(x)$.

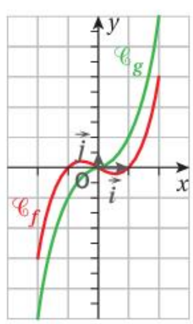
c. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;1]$,

d. Montrer que la fonction h admet un maximum, que l'on déterminera, sur l'intervalle $[0\ ;1]$. La conjecture établie à la question **2a** est-elle confirmée ?

75 Vers le BAC

1. On a représenté ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-2\ ;2]$ par :

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + x.$$



a. Conjecturer les variations de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $[-2\ ;2]$.

b. Calculer les dérivées f' et g' des fonctions f et g sur l'intervalle $[-2\ ;2]$.

c. En déduire les variations de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $[-2\ ;2]$. Confirmer ou infirmer les conjectures émises à la question **a**.

2. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 - ax \quad \text{et} \quad k(x) = x^3 + ax$$

où a est un nombre réel strictement positif.

a. Étudier les variations des fonctions h et k sur $\mathbb{R}$.

b. Peut-on faire un lien avec les variations des fonctions f et g étudiées à la question **1** ? Expliquer.

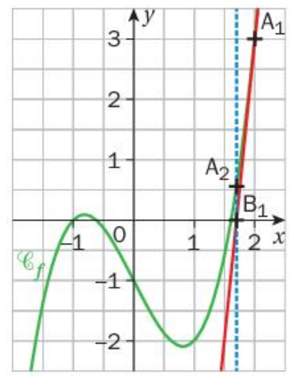
76 Histoire des mathématiques

1. TICE On cherche une valeur approchée d'une solution réelle de l'équation $x^3 - 2x - 1 = 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 1$.

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$.

b. Encadrer chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$ entre deux nombres entiers consécutifs.

On va s'intéresser à une valeur approchée de la racine positive de cette équation.



c. Comme sur la figure ci-contre, placer le point A_1 de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2, puis tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par A_1. Nommer B_1 le point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses. Placer le point A_2 de $\mathscr{C}_f$ de même abscisse que B_1, puis répéter le procédé pour construire les points B_2 et B_3 sur l'axe des abscisses, et A_3 sur $\mathscr{C}_f$.

d. Que constate-t-on au sujet des points A_1, A_2, A_3, etc. ? Donner une valeur approchée de la solution positive de l'équation $f(x) = 0$.

2. a est un nombre réel, f une fonction telle que $f'(a) \neq 0$. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(a\ ;f(a))$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}\ ;0\right)$.

3. PROGRAMMATION python

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'à la fin de son exécution, la variable x contienne l'abscisse du point A_{10}.

```
x ← 2
f ← x³ − 2x − 1
f′ ← ...
Pour I allant de 1 à ...
    x ← ...
    f ← ...
    f′ ← ...
Fin Pour
```

b. Adapter cet algorithme pour qu'il donne une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution réelle positive de l'équation de la question **1**.

c. Programmer cet algorithme en Python et conclure.

Info

Cette **méthode**, dite **de Newton-Raphson**, fut décrite en 1669 par Isaac Newton (1643-1727) dans son ouvrage *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. En 1690, le mathématicien anglais Joseph Raphson (1648-1715) en publia une version simplifiée en introduisant l'approximation $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ à partir d'une valeur approchée a de la racine de l'équation et le procédé algorithmique.

Physique-Chimie

77 Feux d'artifices

Afin d'éviter tout accident vis-à-vis du public lors d'un feu d'artifice, les pyrotechniciens effectuent des calculs pour déterminer précisément la trajectoire que décrira une fusée. On suppose que l'explosion de la fusée a lieu au sommet de sa trajectoire et que les forces de frottements exercées par l'air sont négligeables.
L'équation de la trajectoire d'une fusée est donnée par :

$$y = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x^2}{v^2 \times \cos^2(a)} \right) + \tan(a) \times x$$

où : • y désigne l'altitude (en m) de la fusée et x son abscisse (en m) ;
• g est l'accélération de la pesanteur, égale à 9,81 m·s^{-2} ;
• v est la vitesse de la fusée (en m·s^{-1}) et a l'angle de tir en radians ($0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$).

1. a. Quel est le type de trajectoire de cette fusée de feu d'artifice ? Justifier.
b. Calculer l'altitude maximale de la fusée si l'angle de tir est $\frac{\pi}{3}$ radian et sa vitesse 95 m·s^{-1}.

2. a. L'angle a et la vitesse v sont considérés constants. En notant $y = f(x)$, montrer que :

$$f'(x) = -\frac{gx}{v^2 \times \cos^2(a)} + \tan(a).$$

b. Déterminer la position de la fusée au moment de son explosion si sa vitesse initiale est 80 m·s^{-1} et l'angle de tir $\frac{4\pi}{9}$ radians.

Fiche métier
Pyrotechnicien·ne
hatier-clic.fr/ma1157a

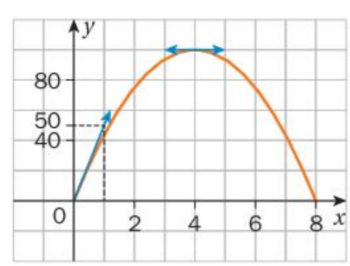
SES

78 Fonction de satisfaction Vers le BAC

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction toute fonction f définie et dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle [0 ; 100].
On dit qu'il y a « saturation » lorsque la satisfaction est maximale, c'est-à-dire lorsque f prend la valeur 100.

La dérivée de la fonction f, notée v, est appelée fonction « envie ». On a donc $v = f'$.
On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive ; sinon on dit qu'il y a « rejet ».

Enza doit réviser un examen. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour pendant cette période. En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus. Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées à travailler chaque jour. La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.



1. Par lecture graphique répondre aux questions suivantes.
a. Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il « saturation » ?
b. Sur quel intervalle y a-t-il « envie » ?
c. Sur quel intervalle y a-t-il « rejet » ?
d. Quelle est la valeur de $v(4)$?

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 8] par $f(x) = a\frac{x^2}{2} + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, et que $f(0) = 0$.
Déterminer dans ce cas la fonction de satisfaction et la fonction « envie ».

D'après Bac ES Amérique du Sud, novembre 2011.

Fiche métier
Chargé·e d'études marketing
hatier-clic.fr/ma1157b

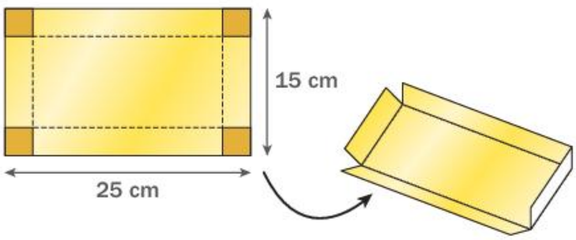
Recherches mathématiques

Questions ouvertes

79 La boîte du pâtissier

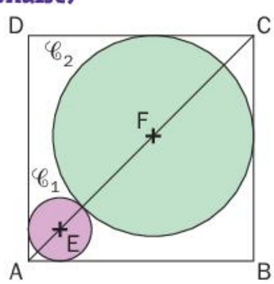
Pour ranger ses petits fours, un pâtissier veut faire fabriquer une boîte dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 25 cm sur 15 cm en découpant un carré dans chaque coin.

- Quel est le volume maximal de cette boîte ?



80 Sangaku (énigme japonaise)

ABCD est un carré de côté 1. E et F sont deux points de la diagonale [AC]. Les cercles $\mathscr{C}_1$ de centre E et $\mathscr{C}_2$ de centre F sont tangents entre eux et tangents chacun à deux côtés du carré.



- Quels sont les positions des points E et F et les rayons respectifs de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ pour que la somme des aires des deux cercles soit maximale ?

Défis

81 Déterminer la valeur maximale obtenue en retranchant à un nombre strictement positif son carré.

82 Déterminer la valeur minimale obtenue en additionnant un nombre strictement positif à son inverse.

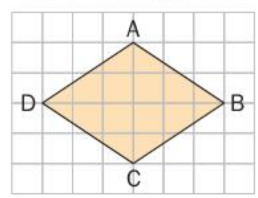
83 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x + 2.$$

- Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}$.

Aide ▶ Exercice 119 p. 95 du chapitre 3 pour la factorisation de $(x^3 - 1)$.

84 ABCD est un losange de périmètre p.



On note x la longueur d'une diagonale de ce losange.

- Déterminer les dimensions du losange pour que son aire soit maximale.

En groupe

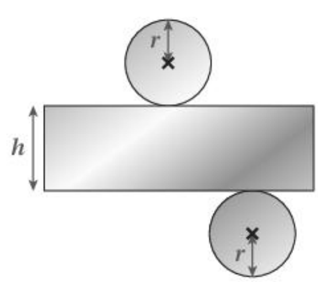
85 La boîte en métal

Afin de conserver des friandises pour les commercialiser, on souhaite construire des boîtes en métal de forme cylindrique de contenance 1 L.

Pour cela, on étudie le patron de cette boîte, composé d'un rectangle et de deux disques (l'un pour le fond, l'autre pour le couvercle). On note r le rayon de la boîte et h sa hauteur.

- Quels sont le rayon r et la hauteur h de cette boîte permettant d'utiliser une quantité de métal minimale ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-2} près.

Expliquer le raisonnement.



Identifions ensemble les étapes de la démarche à mettre en œuvre.

CHAPITRE 6

Fonction exponentielle

Gustave Eiffel (1832-1923), ingénieur français constructeur de la tour Eiffel, a voulu supprimer les traverses de sa tour tout en conservant sa résistance au vent. Avec ces deux contraintes, il a construit une tour dont les contours ont la forme de courbes de fonctions exponentielles.

Itinéraire

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases à partir des mots suivants.

suite géométrique — relation de récurrence — somme — PUISSANCE — dérivée — terme général — formule — quotient

Rappels

Puissances

- Pour tout nombre réel a et pour tout nombre entier naturel non nul n, on appelle « **a puissance n** » (ou « a exposant n ») le nombre noté $\boldsymbol{a^n}$ qui est égal à $a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs égaux à a).
- Par convention, $\boldsymbol{a^0 = 1}$ pour $a \neq 0$ (0^0 n'existe pas).
- Pour tout nombre réel $a \neq 0$ et pour tout nombre entier naturel n, a^{-n} est l'inverse de a^n : $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.
- Pour tous nombres entiers naturels m et n, on a :

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$ • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (avec $a \neq 0$) • $(a^n)^m = a^{n \times m}$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (avec $b \neq 0$)

Exemples

- $(-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^{4+5} = (-3)^9$
- $\dfrac{5^3}{5^4} = 5^{3-4} = 5^{-1}$
- $(7^3)^4 = 7^{3\times 4} = 7^{12}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

Suites géométriques ▸ Chapitre 2

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel q tel que, pour tout nombre entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ (relation de récurrence).

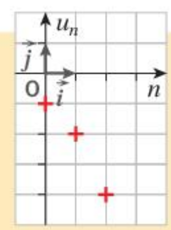
Le nombre réel q s'appelle **la raison** de la suite (u_n).

- Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ (formule explicite).

Une suite est représentée graphiquement par le nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Exemple

On a représenté ci-contre les trois premiers termes de la suite géométrique u de premier terme (-1) et de raison 2.



Pour tout nombre entier naturel n, on a :

- $u_{n+1} = 2 \times u_n$;
- $u_n = (-1) \times 2^n$.

Dérivée d'une fonction ▸ Chapitre 4

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :

• $\boldsymbol{(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)}$

• $\boldsymbol{(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)}$

• $\boldsymbol{\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}}$

avec v qui ne s'annule pas sur I.

- Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'une fonction f dérivable en a est :

$$\boldsymbol{y = f(a) + f'(a) \times (x - a)}.$$

Exemple

- Une expression de la dérivée de la fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f : x \mapsto \dfrac{5x-3}{2x-6}$ est :

$$f'(x) = \frac{5\times(2x-6) - 2\times(5x-3)}{(2x-6)^2} = \frac{-24}{(2x-6)^2}.$$

- Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ est :

$y = f(1) + f'(1) \times (x-1) = -\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{3}{2}\right) \times (x-1)$

soit $y = -1{,}5x - 1$.

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Puissances

1 Écrire chaque nombre sous la forme a^n (avec a nombre réel et n nombre entier).

a. $3^5 \times 3^7$ b. $\frac{5^9}{5^3}$ c. $\frac{4}{4^3}$ d. $\frac{2^3}{2^{-5}}$ e. $\frac{6^{-1} \times 6^3}{6^4}$ f. $\frac{3^7 \times (3^5)^2}{3^{-3}}$

2 Écrire chaque nombre sous la forme $a^n \times b^m$ où a et b sont des nombres réels, et m et n des nombres entiers.

a. $\frac{5^6 \times 3^{-2}}{3 \times 5^{-2}}$ b. $\frac{10^{-3} \times (7^3)^4 \times 10}{7^4 \times 10^5}$ c. $3 \times (10^5)^3 \times 9 \times 10^{-2} \times 3^5$ d. $\frac{4 \times 10^{-6} \times 2^4}{8 \times (10^3)^2}$

3 En 2017, un Airbus A380 coûtait environ $4{,}4 \times 10^8$ dollars.
Un *dime* de dollar est le nom donné à une pièce de monnaie d'une valeur d'un dixième de dollar. L'épaisseur d'un *dime* est $1{,}35 \times 10^{-6}$ km.

- Quelle hauteur (en km) atteindrait une pile de *dimes* représentant la valeur d'un Airbus A380 ?

Suites géométriques

4 Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, dire si elle est géométrique ou non et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. La suite de terme général $u_n = 2 \times 3^n$.
b. La suite de terme général $v_n = 4 + 3n$.
c. La suite de terme général $w_n = (-5) \times 0{,}2^n$.
d. La suite de terme général $t_n = 3 - 5^n$.

5 Représenter graphiquement les 4 premiers termes :

a. de la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 3 ;
b. de la suite géométrique de raison (–2) et de premier terme 0,4.

6 Pour chacune des suites ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, dire si elle est géométrique ou non et, dans l'affirmative, préciser sa raison et son premier terme.

a. La suite de terme général $u_n = 8 \times 2^{n-3}$.
b. La suite de terme général $v_n = 3 \times 25 \times 5^{n-2}$.
c. La suite de terme général $w_n = \frac{2}{3^n}$.
d. La suite de terme général $t_n = \frac{4^{n+1}}{3^n}$.

Dérivée d'une fonction

7 Déterminer une expression de la dérivée de chaque fonction.

a. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$.
b. La fonction $g : x \mapsto (5x-2)^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. La fonction $h : x \mapsto \sqrt{3x+5}$ définie et dérivable sur $\left]\frac{-5}{3};+\infty\right[$.

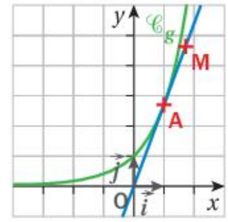
8 a. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $k : x \mapsto (-2x+1)^2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de k au point d'abscisse 1.

Corrigés p. 368

Animation et fichier logiciel
Activité 1 : méthode d'Euler
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

1 En prendant la tangente TICE



L'approximation par la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe d'une fonction g par ses tangentes. Pour de très petites valeurs de h, au point d'abscisse $a + h$, la courbe de la fonction g est très proche de sa tangente au point d'abscisse a : la courbe et sa tangente semblent presque se confondre. D'après Euler, on a alors :

$$\boldsymbol{g(a + h) \approx g'(a) \times h + g(a)}.$$

On cherche à représenter graphiquement une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

$f(0) = 1$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)$.

1. Justifier que, dans le cas de la fonction f que l'on souhaite représenter, l'approximation d'Euler consiste à écrire $f(a + h) \approx f(a)(1 + h)$.

2. a. Déterminer $f(0,1)$ à l'aide de cette relation avec $h = 0,1$.

b. Déterminer $f(-0,1)$ à l'aide de cette relation avec $h = -0,1$.

3. Dans la feuille de calcul ci-contre, quelles formules a-t-on saisies dans les cellules B3 et E3 pour appliquer l'approximation d'Euler à la fonction f ?

4. À l'aide d'un logiciel, reproduire la feuille de calcul ci-contre après avoir déterminé la valeur prise pour h.

5. Représenter le nuage de points associé à ce tableau et prendre des valeurs de h de plus en plus petites afin d'affiner la représentation graphique.

	A	B	C	D	E
1	x	Approximation de $f(x)$		x	Approximation de $f(x)$
2	0	1		0	1
3	0,1	1,1		-0,1	0,9
4	0,2	1,21		-0,2	0,81
5	0,3	1,331		-0,3	0,729
6	0,4	1,4641		-0,4	0,6561
7	0,5	1,61051		-0,5	0,59049
8	0,6	1,771561		-0,6	0,531441
9	0,7	1,9487171		-0,7	0,4782969
10	0,8	2,14358881		-0,8	0,43046721
11	0,9	2,357947691		-0,9	0,387420489
12	1	2,59374246		-1	0,34867844
13	1,1	2,853116706		-1,1	0,313810596
14	1,2	3,138428377		-1,2	0,282429536
15	1,3	3,452271214		-1,3	0,254186583
16	1,4	3,797498336		-1,4	0,228767925
17	1,5	4,177248169		-1,5	0,205891132
18	1,6	4,594972986		-1,6	0,185302019
19	1,7	5,054470285		-1,7	0,166771817
20	1,8	5,559917313		-1,8	0,150094635
21	1,9	6,115909045		-1,9	0,135085172
22	2	6,727499949		-2	0,121576655

On construit ainsi « point par point » la représentation graphique de la fonction f. Cette fonction est appelée « **fonction exponentielle** ».

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

2 À la découverte d'une relation fonctionnelle

On considère une fonction f qui vérifie, pour tous nombres réels a et b, la relation fonctionnelle :

$$f(a + b) = f(a) \times f(b).$$

1. Montrer que si $f(0) = 0$ alors, pour tout nombre réel x, $f(x) = 0$.

On dit alors que la fonction f est **identiquement nulle**.

2. On suppose que $f(0) \neq 0$.

a. Montrer que $f(0) = 1$.

b. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) > 0$.

3. On rappelle que lorsqu'une fonction g est dérivable en a, le nombre dérivé de g en a est $g'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$.

a. Montrer que si la fonction f étudiée est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout nombre réel a :

$$f'(a) = f(a) \times f'(0).$$

b. En déduire que si f vérifie également $f'(0) = 1$ alors, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = f(x).$$

Fichier logiciel
Activités 3 et 4
Manuel numérique enseignant

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

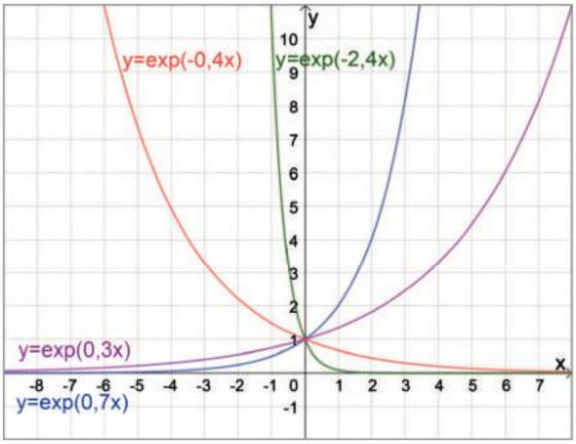
3 Découvrir les fonctions composées En groupe

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère les fonctions :

$$f_k : t \mapsto e^{kt} \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto e^{-kt}.$$

1. TICE Dans un logiciel de géométrie dynamique, tracer plusieurs courbes représentatives de fonctions f_k et g_k.
On pourra utiliser un curseur.

2. Quelles conjectures peut-on faire ?



Maths à l'oral

Chaque groupe présentera une conjecture en l'illustrant avec les courbes représentatives de plusieurs fonctions.

OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

4 Un problème de santé publique TICE

Voici un extrait d'un article du journal Ouest-France du 18 septembre 2006 à propos du radon 222 :

> « Ce gaz radioactif, inodore et incolore, issu des entrailles de la Terre, est la deuxième cause d'apparition du cancer du poumon, après le tabac. […] Qu'est-ce que le radon ? C'est un gaz radioactif, sans odeur ni couleur, présent à l'état naturel. Il est issu de la désintégration de l'uranium 238. On peut le trouver partout à la surface de la Terre, principalement dans les régions granitiques. »

Pour mesurer la concentration en radon dans une pièce, on prélève de l'air dans une fiole que l'on place dans un détecteur permettant de compter le nombre total N_d de désintégrations du radon 222. On répète cette mesure pendant plusieurs jours. Les résultats sont les suivants :

Jour	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N_d	73	59	51	41	36	30	23	20	16	14

La pièce est considérée en dessous du « seuil d'alerte » lorsque N_d est inférieur à 60 et en dessous du « seuil de précaution » lorsque N_d est inférieur à 24.

1. Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant à ces relevés.

2. a. Faire afficher par le logiciel une courbe exponentielle passant au plus près de ce nuage de points afin de modéliser par une fonction exponentielle le nombre de désintégrations N_d mesuré en fonction du temps écoulé en jours.

Aide

- Avec le tableur *GeoGebra*, sélectionner le tableau, cliquer sur Statistiques à deux variables pour obtenir le nuage de points, puis choisir le modèle d'ajustement exponentiel dans la zone sous la courbe : Modèle d'ajustement exponentiel
- Dans *Excel*, après avoir tracé le nuage de points avec , le sélectionner et choisir Ajouter une courbe de tendance… , puis Exponentielle (dans les options).

b. La fonction proposée par le logiciel est de la forme $N_0 \times e^{-\lambda t}$.
Quelle est la valeur pour N_0 proposée par cet ajustement ? Quelle est celle de λ ?

3. On appelle « demi-vie » le temps au bout duquel une grandeur atteint la moitié de sa valeur initiale. Déterminer par lecture graphique la demi-vie du radon 222.

4. Déterminer le nombre de jours au bout duquel la pièce est :

a. en dessous du seuil d'alerte ; **b.** en dessous du seuil de précaution.

D'après Bac S (Physique-Chimie), Polynésie, septembre 2007.

Cours

OBJECTIF 1 Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Savoir-faire 1 à 3 p. 167-168

Définition, propriété et notation

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** ; elle est notée $x \mapsto \exp(x)$.

Démonstration rédigée p. 180

Pour tout nombre réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$.

$\exp(0) = 1$

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive sur** $\mathbb{R}$.

Démonstration à compléter : exercice 99 p. 181

Pour tout nombre réel x : $\exp(x) > 0$.

Notation

On note $\exp(1) = \mathrm{e}$.
Le nombre e est appelé **nombre d'Euler** ou **constante de Néper**.

$\mathrm{e} \approx 2{,}718\,28$
e est un nombre irrationnel.

Propriété (relations fonctionnelles)

Pour tous nombres réels x et y :

- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$;
- $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$; autrement dit : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Démonstration : exercice 100 p. 181

On dit que « l'exponentielle transforme les sommes en produits ».

Théorème (admis)

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

Conséquences Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent, pour tous nombres réels x et y :

- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

On retrouve les propriétés des puissances.

Exemples

- $\exp(3 + 5) = \exp(8)$ s'écrit $\mathrm{e}^{3+5} = \mathrm{e}^8$.
- $\exp(-2) = \dfrac{1}{\exp(2)}$ s'écrit $\mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.
- $(\exp(x))^3 = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(x + x + x) = \exp(3x)$ s'écrit $(\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{3x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

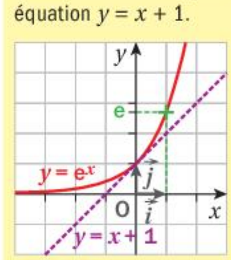
Propriété

La fonction exponentielle est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

Démonstration à compléter : exercice 99 p. 181

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = x + 1$.



Conséquence de la stricte croissance de la fonction exponentielle

Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a > b.$$

Exemple

$\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in\,]0\,;+\infty[$.

OBJECTIF 2 Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Savoir-faire 4 p. 168

k est un nombre réel strictement positif.

Propriété (admise) ▶ Chapitre 4

Pour toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tous nombres réels a et b, la fonction $x \mapsto g(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto a \times g'(ax + b)$.

La fonction $x \mapsto g(ax + b)$ est une composée affine de la fonction g.

Propriété

La fonction $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, on a $f_k'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.

Démonstration : exercice 101 p. 181

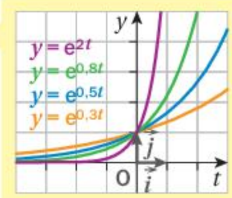
Exemple

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{0,5t}$ a pour dérivée $t \mapsto 0,5\mathrm{e}^{0,5t}$.

Propriété La fonction f_k est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

Son tableau de variations est le suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f_k	↗	1	↗



Démonstration : exercice 101 p. 181

Exemple **Étude de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x-2}$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = 3 \times \mathrm{e}^{3x-2} = 3\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{3x} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de f est :

$$y = f(0) + f'(0) \times (x - 0) = \mathrm{e}^{-2} + 3\mathrm{e}^{-2}x.$$

e^{-2} est un nombre réel strictement positif.

Définition

La fonction $g_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t, on a $g_k'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.

Démonstration : exercice 102 p. 181

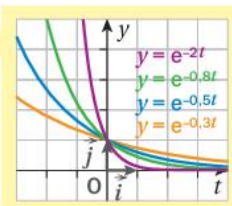
Exemple

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}$ a pour dérivée $t \mapsto -3\mathrm{e}^{-3t}$.

Propriété La fonction g_k est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$.

Son tableau de variations est le suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g_k	↘	1	↘



Démonstration : exercice 102 p. 181

Exemple **Étude de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+3}$**

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-2x+3} = (-2) \times \mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{-2x} < 0.$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de g est :

$$y = g(0) + g'(0) \times (x - 0) = \mathrm{e}^{3} - 2\mathrm{e}^{3}x.$$

e^{3} est un nombre réel strictement positif.

OBJECTIF 3 Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

Savoir-faire 5 p. 169

a est un nombre réel, k un nombre réel strictement positif et n un nombre entier naturel.

Définition Un phénomène (physique, économique, etc.) **se modélise de façon discrète** par une croissance (resp. une décroissance) **exponentielle** s'il peut être modélisé par une **suite** dont la représentation graphique est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative d'une fonction de la forme $f(t) = ae^{kt}$ (resp. $f(t) = ae^{-kt}$).

Propriétés

- Pour tout nombre réel b fixé, la suite (e^{nb}) **est une suite géométrique** de premier terme 1 et de raison e^b.
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.

Démonstration : exercice 103 p. 181

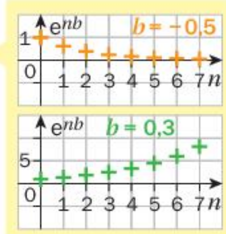
On a donc $e^{nb} = (e^b)^n$.

En notant $e^b = q$, on a en effet :
- $b > 0 \Leftrightarrow q > 1$;
- $b < 0 \Leftrightarrow 0 < q < 1$;
- $b = 0 \Leftrightarrow q = 1$.

Chapitre 2

Exemples

- La suite $(e^{-0,5n})$ est géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-0,5}$.
Elle est strictement décroissante car $b = -0,5 < 0$.
- La suite $(e^{0,3n})$ est géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{0,3}$.
Elle est strictement croissante car $b = 0,3 > 0$.



Propriété (admise) Pour tout nombre réel q strictement positif, **il existe un unique nombre réel b tel que $q^n = e^{nb}$.**
Ce nombre est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^b = q$.

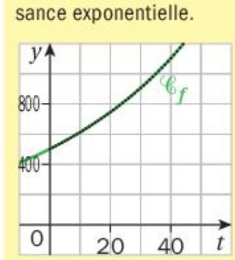
On peut lire graphiquement une valeur approchée de la solution de l'équation $e^b = q$ à partir de la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Conséquence
La représentation graphique de la suite géométrique $(u_0 q^n)$ (avec $q > 0$) est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction $t \mapsto u_0 e^{bt}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $e^b = q$.

Exemple
On place 500 € au taux d'intérêt composé de 2 % annuel (l'intérêt acquis chaque année est ajouté au capital). On note C_n le capital (en euros) après n années.

On modélise cette situation par la suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,02. Le terme général de cette suite est $C_n = 500 \times (1,02)^n$ et sa représentation graphique est un nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction $f : t \mapsto 500e^{bt}$ où b est l'unique nombre réel qui vérifie $e^b = 1,02$, soit $b \approx 0,0198$.

La suite (C_n) est un modèle discret de croissance exponentielle.



Définition Un phénomène (physique, économique, etc.) **se modélise de façon continue** par une croissance (resp. une décroissance) **exponentielle** s'il peut être modélisé par une **fonction** admettant comme expression $f(t) = ae^{kt}$ (resp. $f(t) = ae^{-kt}$).

Exemple
Dans un corps radioactif, une population de noyaux radioactifs décroît en suivant la loi de décroissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante strictement positive, caractéristique du noyau étudié, et N_0 est le nombre de noyaux présents dans le corps radioactif à l'instant $t = 0$.

Pour le radon 222, la valeur de λ est environ égale à 0,19 ; ainsi, si $N_0 = 73$, alors le nombre de noyaux présents à l'instant t peut être modélisé par la fonction $N : t \mapsto 73e^{-0,19t}$.

1 Dériver un produit, un quotient

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

a. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (-2x+1)\mathrm{e}^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$, définie et dérivable sur $]-\infty\,;-2[\, \cup\,]-2\,;+\infty[$, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

Solution

a. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = -2 \times \mathrm{e}^x + (-2x+1) \times \mathrm{e}^x = \boxed{(-2x-1) \times \mathrm{e}^x}$.
$f'(x)$ est du signe de $(-2x-1)$ car $\mathrm{e}^x > 0$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗	$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	

b. Pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (x+2) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}}$.

Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 est :

$$y = g(-1) + g'(-1) \times (x-(-1)) \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{-1} + 0 \times (x+1) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, et donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
▶ Chapitre 4

Le coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine $x \mapsto -2x-1$ est strictement négatif.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x+2$, et donc $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$.
▶ Chapitre 4

Application

9 **a.** Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (5x-15)\mathrm{e}^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variations de f.
b. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

10 Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x-3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1{,}5\}$, et le tableau de signes de cette dérivée.
En déduire le tableau de variations de g.

Les incontournables 37 p. 173

2 Utiliser les relations fonctionnelles

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = 1$.

Solution

Pour tout nombre réel x :

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-6x} \times \mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-6x+5x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x-(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$;
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$;
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Application

11 Montrer que, pour tout nombre réel x, on a $\mathrm{e}^{-5x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} - \mathrm{e}^{3x}\right) = 0$.

12 Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{1{,}5}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-0{,}5}} = \mathrm{e}$.

Les incontournables 38 et 39 p. 173

3 Résoudre des équations ou des inéquations

OBJECTIF 1
Étudier et utiliser la fonction exponentielle

1. Résoudre dans ℝ : **a.** l'inéquation $e^x - 1 \geqslant 0$; **b.** l'équation $e^x = e^{x^2-x+1}$.

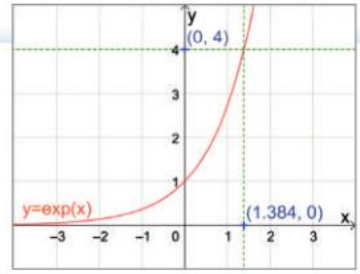
2. Donner une valeur approchée au millième de la solution dans ℝ de l'équation $e^x = 4$.

Solution

1. a. $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [0\ ;+\infty[.}$

b. $e^x = e^{x^2-x+1} \Leftrightarrow x = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1.}$

2. On trace la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide d'un outil numérique.
En affichant les valeurs au millième près, on obtient la valeur $\boxed{x \approx 1{,}384.}$



Application

13 **a.** Résoudre dans ℝ l'inéquation $e^x > e$. **b.** Résoudre dans ℝ l'équation $e^{x^2-x} = e^{x+3}$.

Les incontournables 40 et 41 p. 173

4 Étudier les variations d'une fonction

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x-1}}{x-3}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Solution

- f est définie pour tout nombre réel x tel que $x - 3 \neq 0$.
Donc f est définie (et dérivable) sur $\boxed{]-\infty\ ; 3[\ \cup\ ]3\ ; +\infty[.}$

Le dénominateur ne doit pas s'annuler.

- Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ; 3[\ \cup\ ]3\ ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-1}(x-3) - e^{2x-1}\times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6) - e^{2x-1}\times 1}{(x-3)^2} = \frac{e^{2x-1}(2x-6-1)}{(x-3)^2}$$

d'où $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{2x-1}(2x-7)}{(x-3)^2}.}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = e^{2x-1}$ et $v(x) = x - 3$, et donc $u'(x) = 2e^{2x-1}$ et $v'(x) = 1$.
▶ Chapitre 4

- Pour tout nombre réel $x \in\ ]-\infty\ ; 3[\ \cup\ ]3\ ; +\infty[$, $e^{2x-1} > 0$ et $(x-3)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x - 7)$; on en déduit le tableau de variations de f :

On étudie le signe de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f.
▶ Chapitre 5

x	$-\infty$		3		3,5		$+\infty$
Signe de $(2x-7)$		−		−	0	+	
Signe de $f'(x)$		−	‖	−	0	+	
Variations de f		↘	‖	↘	$2e^6$	↗	

Penser à indiquer les valeurs interdites dans le tableau.

Application

14 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 3)e^{-2x+5}$ dérivable sur ℝ.

15 Donner le domaine de définition, une expression de la dérivée et le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{-x+1}}{5x-2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0{,}4\}$.

Les incontournables 42 à 44 p. 173

Vidéo
Modéliser par une croissance exponentielle
hatier-clic.fr/ma1169

5 Modéliser par une croissance exponentielle

OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

Selon le mathématicien et économiste gallois Richard Price (1723-1791), emprunter un penny (monnaie britannique) au taux d'intérêt annuel de 5 % conduit à s'endetter de façon exponentielle.
Supposons qu'au 1er janvier 2019, un État emprunte 1 000 € à ce taux.

1. On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, la dette en janvier de l'année 2019 + n.
a. Préciser u_0, montrer que $u_1 = 1\,050$, puis calculer u_2.
b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner son terme général en fonction de n.
c. Représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.

2. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times e^{kt}$. On cherche à déterminer une expression de f.
a. Que vaut $f(0)$? En déduire la valeur de a.
b. À l'aide de la représentation graphique de la fonction exponentielle, donner une valeur approchée à 10^{-5} de k.
c. Quelle sera la dette de l'État en juin 2023 ?

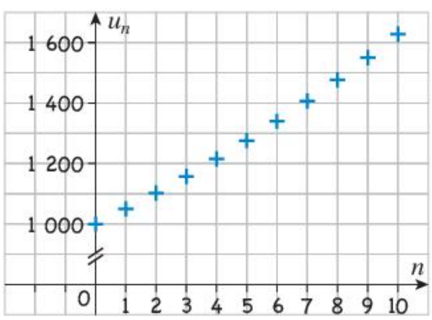
Solution

1. a. $u_0 = 1\,000$; $u_1 = u_0 \times \left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = 1\,050$; $u_2 = u_1 \times 1{,}05 = 1\,102{,}5$.

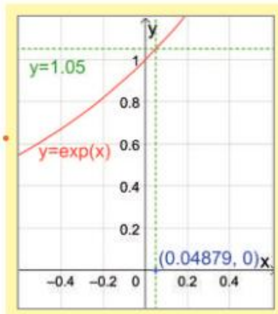
Augmenter une valeur de 5 % revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $\left(1+\dfrac{5}{100}\right) = 1{,}05$.

b. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1{,}05$.
Son terme général est $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 1{,}05^n}$.

c.



2. a. D'une part, $u_0 = 1\,000$ et d'autre part, $f(0) = a \times e^0 = a$ donc $a = 1\,000$.
b. On cherche une valeur approchée de la solution réelle de l'équation $e^k = 1{,}05$.
À l'aide d'un outil logiciel (affichage des valeurs au cent millième près), on trouve $k \approx 0{,}04879$.



c. En juin 2023, 4,5 années se seront écoulées depuis l'emprunt.
On calcule alors une valeur approchée de l'image de 4,5 par la fonction f.
$f(4{,}5) = a \times e^{k \times 4{,}5} \approx 1\,000 \times e^{0{,}04879 \times 4{,}5} \approx 1\,245$.
En juin 2023, la dette sera d'environ 1 245 €.

Application

16 Une ville comptait 30 000 habitants en 2 015. Chaque année le nombre d'habitants baisse de 8 %.
a. Modéliser la situation par une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, où u_n représente le nombre d'habitants, en milliers, en (2 015 + n), puis représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.
b. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times e^{kt}$.
Déterminer une expression de la fonction f.
c. Déterminer le mois et l'année où le nombre d'habitants sera divisé par deux si cette évolution à décroissance exponentielle se poursuit.

Les incontournables 45 et 46 p. 173

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Fonction exponentielle

$$f : x \mapsto \exp(x)$$

C'est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Ainsi : $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

$\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718\ 28$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Relations fonctionnelles

Pour tous nombres réels x et y :

$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y}$ $\boxed{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 1}$ $\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$

Variations et signe de la fonction exponentielle

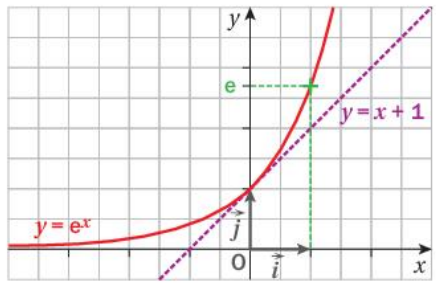
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	↗	1	e	↗

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

Résolution d'équations et d'inéquations

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$ $\quad \mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a > b$.



Cours 1 p. 164

Modélisation par une croissance ou une décroissance exponentielle

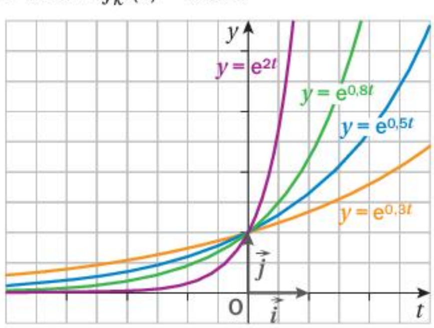
k est un nombre réel strictement positif.

Modélisation par une croissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$$

f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $f_k'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.

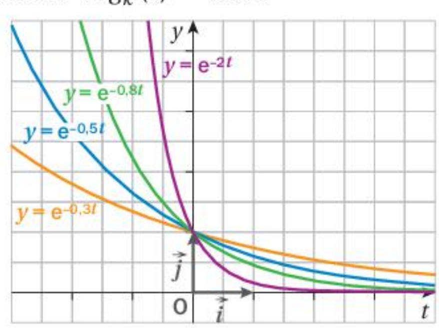


Modélisation par une décroissance exponentielle

Phénomène pouvant être modélisé par :

$$g_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$$

g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel t : $g_k'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.



Phénomènes discrets

La représentation graphique de la suite géométrique $(u_0 q^n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$) est un **nuage de points qui appartiennent à la courbe représentative de la fonction** $t \mapsto u_0 \mathrm{e}^{bt}$, où b est l'unique nombre réel qui vérifie $\mathrm{e}^b = q$.

- $\forall\, b \in \mathbb{R}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{nb} = \left(\mathrm{e}^n\right)^b$
- Si $b > 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement croissante.
  Si $b = 0$, alors la suite (e^{nb}) est constante : tous ses termes valent 1.
  Si $b < 0$, alors la suite (e^{nb}) est strictement décroissante.

Cours 2 et 3 p. 165-166

... ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
17 Une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, est :	$e^x + xe^x$	$e^x(x+1)$	$1 \times e^x$	e^{x^2}
18 Pour tout nombre réel x, $\dfrac{e^{3x} \times e^2}{e^{-2x}}$ est égal à :	e^{x+2}	e^{2x}	e^{5x+2}	e^{3x}
19 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^x = 1{,}68$ admet :	aucune solution.	exactement une solution.	pour solution $x = 1$.	pour solution $x = 0$.
20 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{-x} = (-1)$ admet :	aucune solution.	au moins une solution.	pour solution $x = 1$.	pour solution $x = \dfrac{1}{e}$.
21 Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{-x} > 1$ a pour solution l'intervalle :	$]-\infty ; 0[$	$]0 ; +\infty[$	$[0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0]$
22 Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{2x} > e^3$ a pour solution l'intervalle :	$\left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right[$	$\left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$	$]-\infty ; 1{,}5[$	$]1{,}5 ; +\infty[$
23 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^x = 0$ admet :	aucune solution.	exactement une solution.	pour solution $x = -1\,000\,000\,000$.	pour solution $x \approx -1\,000\,000\,000$.
24 L'équation $e^{3x+5} = e^{5x-9}$ est équivalente à :	$\dfrac{3x+5}{5x-9} = 0$	$3x + 5 = 5x - 9$	$-2x + 14 = 0$	$x = 7$
25 La fonction $f : x \mapsto e^{-2x+3}$ est :	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	positive sur $\mathbb{R}$.	négative sur $\mathbb{R}$.
26 La fonction $f : x \mapsto e^{3x-100}$ est :	strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	positive sur $\mathbb{R}$.	négative sur $\mathbb{R}$.
27 Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de $f : x \mapsto e^{-5x}$ est :	$y = -5x + 1$	$y = -5x - 1$	$y = -x + 5$	$y = -x - 5$
28 La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^{2x+1}$ passe par le point :	$(0 ; e)$	$(0 ; 1)$	$\left(-1 ; \dfrac{1}{e}\right)$	$(-1 ; e)$
29 La suite, définie sur $\mathbb{N}$, de terme général $e^{0{,}3n}$ est :	croissante.	décroissante.	de premier terme positif.	de premier terme négatif.
30 La suite, définie sur $\mathbb{N}$, de terme général e^{-5n} est :	croissante.	décroissante.	de premier terme positif.	de premier terme négatif.

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

31 Parlons stratégies ! À l'oral

Dans chaque cas, résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ et expliquer la **stratégie** choisie.

a. $\left(e^x\right)^2 - e^x = 0$ **b.** $e^{4x^2-4x+1} = 1$ **c.** $\left(e^{3x}\right)^2 = e$ **d.** $e^{3x-2} - e^{x-5} = 0$

Différentes stratégies pour résoudre une équation

Stratégie 1 Je pense aux relations fonctionnelles.

Stratégie 2 Je pense à factoriser pour me ramener à une équation produit nul.

Stratégie 3 Je pense aux identités remarquables.

J'ai une **autre stratégie** !

32 Parlons stratégies ! À l'oral

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions ci-dessous.
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $f_1(x) = x^2e^x - e^x$ **b.** $f_2(x) = 1 - e^x$ **c.** $f_3(x) = \dfrac{3x\,e^{3x} + 2e^{3x}}{(x+1)^2}$ **d.** $f_4(x) = (9x^2 - 6x + 1)e^{-x}$ **e.** $f_5(x) = e^x - e$

Différentes stratégies pour dresser un tableau de signes

Stratégie 1 Je pense au tableau de variations de la fonction exponentielle.

Stratégie 2 Je pense à factoriser et aux propriétés des fonctions affines.

Stratégie 3 Je pense aux identités remarquables.

J'ai une **autre stratégie** !

33 À chacun sa formule !

Pour chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer une expression de sa fonction dérivée en utilisant l'une des formules ci-dessous.
Contrainte : chaque formule ne peut être utilisée qu'une seule fois.

a. $f_1(x) = (3x^2 - x)e^x$ **b.** $f_2(x) = e^{-5x+1}$ **c.** $f_3(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ **d.** $f_4(x) = \dfrac{e^x}{4}$ **e.** $f_5(x) = e^x - x + 1$

Différentes formules de dérivation

$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$ $(ku)'(x) = ku'(x)$ $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$g(ax + b)'(x) = a \times g'(ax + b)$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

34 En moins d'une minute !

Dresser le tableau de variations de chaque fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. $f_1 : x \mapsto e^x + 1$ **b.** $f_2 : x \mapsto e^{-3x+2}$
c. $f_3 : x \mapsto e^x - 1$ **d.** $f_4 : x \mapsto -5e^{-2x}$

35 En moins d'une minute !

Dresser le tableau de signes de chaque fonction.

a. $f_1 : x \mapsto x^2e^x$ sur $\mathbb{R}$. **b.** $f_2 : x \mapsto x^3e^x$ sur $\mathbb{R}$.
c. $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}\,e^x$ sur $\mathbb{R}_+$. **d.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

36 Chacun sa méthode En groupe

Pour chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$:
1. représenter ses quatre premiers termes dans le plan muni d'un repère ;
2. les points du nuage obtenu se situent sur la courbe représentative d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times e^{kt}$ ou $g : t \mapsto a \times e^{-kt}$; préciser la forme de la fonction correspondante, puis déterminer la valeur du réel a et une valeur approchée du réel positif k à 10^{-1} près.

a. $u_n = 2 \times 0{,}5^n$ **b.** $v_n = (-3) \times 0{,}5^n$
c. $w_n = 3 \times 2{,}5^n$ **d.** $t_n = (-2) \times 0{,}9^n$

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Dériver un produit, un quotient

37 Donner une expression de la dérivée de chaque fonction.

a. $f : x \mapsto 3xe^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{2x+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5\}$.

c. $h : x \mapsto e^x \times \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. $k : x \mapsto (3x^2 - 5x + 8) \times e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Utiliser les relations fonctionnelles

38 Associer chaque expression à sa forme simplifiée.

Expressions
1. $e^{-3x} \times e^x$
2. $\dfrac{e^{-3x}}{e^x}$
3. $\dfrac{e^{2x} \times e^{-5x}}{e^{-2x}}$
4. $\dfrac{e^x}{(e^{3x})^2}$

Formes simplifiées
a. e^{-5x}
b. e^{-4x}
c. e^{-2x}
d. e^{-x}

39 Montrer que :

a. $e^{6x} \times e^{3x} = \dfrac{(e^x)^3}{e^{-6x}}$

b. $e^x(e^2 + e^{-x}) = e^{-x}(e^{2x+2} + e^x)$

c. $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1)$

d. $\dfrac{e^{3x}\left(e^{-x} - \left(e^5\right)^2\right)}{e^{2x}} = 1 - e^{x+10}$

Résoudre des équations ou des inéquations

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^{2x+1} = e^{5x-1}$

b. $e^{x^2} = e^{-5}$

c. $e^{2x^2} = e^{18}$

d. $e^{2x} \times e^{-3x+2} = e^{3x-5}$

e. $e^{x^2-2x-3} = 1$

f. $\dfrac{e^{4x+1}}{e^{2x+3}} = e$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $e^{2x} > 1$

b. $e^{-x+3} \geqslant 1$

c. $e^{3+x} < e$

d. $e^{-2x+5} \leqslant e$

e. $e^{x^2+x-6} < 1$

f. $e^{4x-2} \geqslant \dfrac{1}{e}$

Étudier les variations d'une fonction

42 Pour chaque fonction, donner une expression de sa dérivée et en déduire ses variations.

a. $f : x \mapsto e^{-5x+3}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. $g : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1}}{3x-5}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. $h : x \mapsto (-2x + 5)e^{3x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

d. $k : x \mapsto \dfrac{e^{-x+2}}{x^2 - x - 2}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1 ; 2\}$.

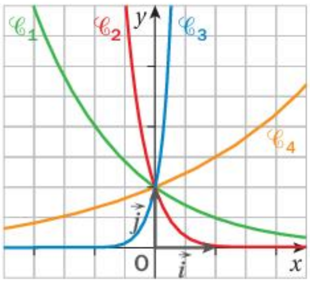
43 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto e^{0{,}4x}$

$g : x \mapsto e^{-3x}$

$h : x \mapsto e^{-0{,}7x}$

$k : x \mapsto e^{5x}$



44 Recopier et compléter notamment avec les mots « croissante » et « décroissante ».

a. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-5x}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

b. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto 3 \times e^{5x-4}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

c. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (-3) \times e^{2x-1}$ est strictement ...... et sa courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; ...) et (1 ; ...).

Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

45 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, dire si elle peut modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

a. $u_n = e^{5n}$

b. $v_n = 0{,}1 \times 7^n$

c. $w_n = 3 \times (0{,}2)^n$

d. $t_n = e^{-5n}$

46 Les représentations graphiques des suites géométriques ci-dessous, définies sur $\mathbb{N}$, appartiennent aux courbes représentatives de fonctions de la forme ae^{kt} ou ae^{-kt} ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$).

Déterminer dans chaque cas la valeur exacte de a et une valeur approchée de k.

a. $u_n = 3 \times 2^n$

b. $v_n = 0{,}2 \times 3^n$

c. $w_n = (-4) \times (1{,}3)^n$

d. $t_n = 5 \times 0{,}8^n$

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Étudier et utiliser la fonction exponentielle

Savoir-faire 1, 2 et 3 p. 167-168

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

47 Associer à chaque expression sa forme simplifiée.

Expressions
1. $(e^3)^2 \times e^9$
2. $\dfrac{e^{-5}}{e^5}$
3. $\dfrac{e^{-3}}{e^{-7}} \times e$
4. $\dfrac{(e^{-3})^2 \times e^{-1}}{e^{-3} \times e}$

Formes simplifiées
a. e^{-5}
b. e^5
c. e^{-10}
d. e^{15}

48 QCM

Dans chaque cas, choisir la valeur qui convient pour remplacer les pointillés.

1. $e^{\cdots} \times (e^{-6})^2 = e$

a. 12 **b.** 13 **c.** 37 **d.** –1

2. $\dfrac{e^{-5} \times e^{\cdots}}{e^{-0,5}} = 1$

a. 5 **b.** 5,5 **c.** $\dfrac{-0,5}{5}$ **d.** 4,5

49 QCM

1. Dans $\mathbb{R}$, la solution de l'équation $e^{-4x+3} = e$ est :

a. $\dfrac{3}{4}$ **b.** 1 **c.** 0,5 **d.** –1

2. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{5x^2} = e^{45}$ admet pour solution(s) :

a. 3 **b.** –9 **c.** 9 **d.** –3

50 Vrai ou faux ?

a. « $\dfrac{e^{1,01} \times \left(e^{0,3}\right)^2}{e^2} = \dfrac{e^{-0,8} \times e^{1,8}}{e}$ »

b. « Pour tout nombre réel x, $\dfrac{x + e^x}{e^{-x}} = xe^x + 1$. »

51 Associer à chaque inéquation son ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$.

Inéquations
1. $e^{2x-3} \leqslant 1$
2. $e^{\frac{x}{2}+7} > e$
3. $e^{-5x+4} < 1$
4. $e^{-4x+3} < \dfrac{1}{e}$

Intervalles solutions
a. $]1\,;+\infty[$
b. $]0,8\,;+\infty[$
c. $]-12\,;+\infty[$
d. $]-\infty\,;1,5]$

52 Vrai ou faux ?

« Une expression de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^x$ est $(x+2)e^x$. »

53 Recopier et compléter avec le nombre qui convient.

a. $\dfrac{\left(e^{\cdots}\right)^2 \times e^2}{e} = e^{-5}$ **b.** $\dfrac{e^{1,4} \times e^{\ 1}}{e^{\cdots} \times e^{1,2}} = 1$

c. $\dfrac{\left(e^{\cdots}\right)^2 \times e^{-7}}{e^2} = e$ **d.** $5 \times e^{1,5} \times \left(e^{-0,5}\right)^{\cdots} = 5$

54 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$ **b.** $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$

c. $\left(e^{3x}\right)^2 \times e^{x^2+5} = 1$ **d.** $e^{1-x} - e^{2x^2} = 0$

55 Simplifier chaque expression.

a. $\dfrac{e^{x^2} \times \left(e^x\right)^2}{e^{(x+1)^2}}$ **b.** $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$ **c.** $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

56 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations.

a. $e^{x^2+6x+5} \geqslant 1$ **b.** $e^{-x^2-3x+5} > e$

c. $e^{2x^2-3x-1} \leqslant \left(e^4\right)^2$ **d.** $\dfrac{e^{x^2} \times \left(e^{-5}\right)^3}{\left(e^x\right)^2} \leqslant 1$

57 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

a. $e^x(e^x - 1) = 0$ **b.** $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$

c. $xe^{2x+1} = x$ **d.** $(e^{-3x+6} - e)\left(e^{x^2} - 1\right) = 0$

58 **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 2X - 3 = 0$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

Aide On pourra poser $X = e^x$ dans l'équation, pour déterminer les valeurs de X et en déduire celles de x.

59 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + (1 - e)x - e = 0$.

60 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + e^{x-2} = 0$.

61 **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$3e^{-x} - e^x - 2 = (e^x + 3)(e^{-x} - 1).$$

b. En déduire le tableau de signes de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3e^{-x} - e^x - 2$.

62 On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

63 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.

a. Donner le tableau de signes de f.

b. Dresser le tableau de variations de f après avoir calculé sa dérivée.

Fichier Python
Ex. 67
Manuel numérique enseignant

★★

64 Copies à la loupe

Iliès, Margaux et Gabriel ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer une expression de la dérivée de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{-5x+3},$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

Iliès

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{-5} = -\frac{e^x}{5}$$

Margaux

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(-5x+3)-5e^x}{-5x+3}$$

$$= \frac{e^x(-5x-2)}{-5x+3}$$

Je simplifie par « $-5x$ ».

$$= -\frac{2}{3}e^x$$

Gabriel

Pour tout nombre réel x différent de $\frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{-5e^x - e^x(-5x+3)}{(-5x-3)^2} = \frac{(5x-2)e^x}{(-5x+3)^2}$$

• Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chacune des erreurs identifiées.

65 On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

66 On considère la fonction $g : x \mapsto x^2e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse $x = -2$.

67 PROGRAMMATION python

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Donner le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Jeanne a programmé la fonction en Python suivante.

```
import math
def depasser(a):
    m=1
    while math.exp(m)/m<a:
        m=m+1
    return m
```

a. Tester cette fonction pour A = 10, puis A = 100, puis A = 1 000.

b. Que permet de faire cette fonction ?

c. Quelle conjecture peut-on faire sur $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

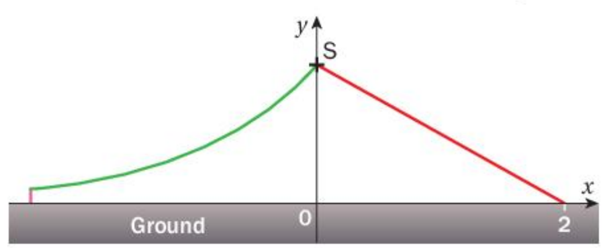
68 IN ENGLISH p. 381

A slide (in green) and its ladder (in red) to reach highest point S of the slide are modelled in the x-y plane by two functions:

– the green part $f : x \mapsto e^x$;

– the red part $g : x \mapsto ax + b$.

The ground is represented by the x-axis and the height S coincides with the y-axis. The pink section represents the end of the slide which is located 10 cm from the ground.



a. What height is highest point S?

b. Determine the real numbers a and b for the foot of the ladder to be located at 2 meters from the origin.

c. At what distance from the origin is the end of the slide located?

69 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-2e^x}{3x-5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{3}\right\}$. Avec un logiciel de calcul formel, Damien a obtenu les résultats ci-dessous.

$g(x) = \text{Dérivée}\left(-\frac{2\,e^x}{3\,x-5}\right)$

$\rightarrow \frac{-6\,x\,e^x + 16\,e^x}{9\,x^2 - 30\,x + 25}$

$f : \text{Tangente}\left(0, -\frac{2\,e^x}{3\,x-5}\right)$

$\rightarrow y = 0.64x + 0.4$

• Vérifier ces résultats.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

Savoir-faire 4 p. 168

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

70 Vrai ou faux ?

a. « La dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{-7x+3}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ ».

b. « La dérivée de la fonction $g : x \mapsto -5e^{2x-1}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. »

c. « La fonction $h : x \mapsto -\dfrac{e^{-6x+8}}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. »

d. « La fonction $k : x \mapsto 0{,}1e^{3x-10}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. »

71 Associer à chaque courbe le point qui lui appartient.

La courbe d'équation…
1. $y = e^{-0,1x+10}$
2. $y = -3e^{-\frac{x}{4}+5}$
3. $y = \dfrac{e^{4x-8}}{3}$
4. $y = -2e^{0,3x-4}$

… passe par le point de coordonnées
a. $\left(10\,;-\dfrac{2}{e}\right)$
b. $\left(2\,;\dfrac{1}{3}\right)$
c. $(100\,;1)$
d. $(20\,;-3)$

72 QCM

Une expression de la dérivée de $f : x \mapsto -5e^{-2x+3}$ est :

a. $(10x-3)e^{-2x+3}$

b. $-5+(-2)\times e^{-2x+3}$

c. $10e^{-2x+3}$

d. $-7e^{-2x+3}$

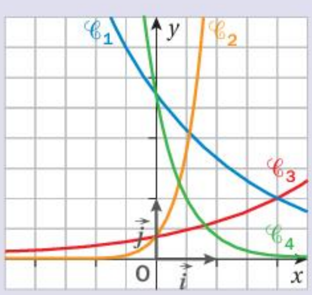
73 Associer chacune des fonctions ci-dessous à sa courbe représentative.

$f : x \mapsto e^{-2x+1}$

$g : x \mapsto e^{0,5x-1}$

$h : x \mapsto e^{-0,5x+1}$

$k : x \mapsto e^{3x-1}$



74 Vrai ou faux ?

a. « Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto xe^{-4x+1}$ au point d'abscisse 0 est $y = ex$. »

b. « Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{3x-2}}{2x-1}$ au point d'abscisse 0 est $y = ex$. »

75 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto e^{2x-5} \text{ et } g : x \mapsto e^{-2x+3},$$

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. a. Déterminer une expression de la dérivée de f et de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de chacune de ces dérivées sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de f et celui de g sur $\mathbb{R}$.

2. a. Tracer les courbes représentatives de f et de g sur un outil numérique.

b. Conjecturer la valeur de l'éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

c. Valider ou corriger la conjecture émise à la question **b** en résolvant une équation.

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

76 On considère la fonction $f : x \mapsto (-x^2+3x-1)e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de f.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

d. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2.

77 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{12x+5}}{x^3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

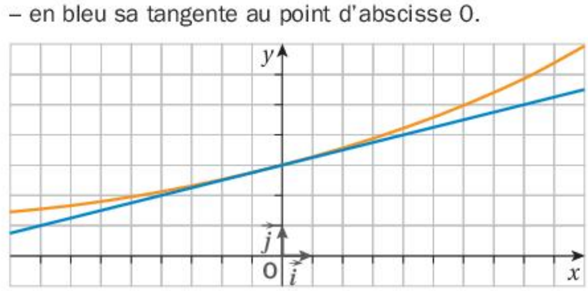
a. Montrer qu'une expression de la dérivée de g est $g'(x) = \dfrac{(12x-3)e^{12x+5}}{x^4}$.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

d. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse -1.

78 Sur le graphique ci-dessous sont représentées :
– en orange une fonction $f : x \mapsto ae^{bx+c}$;
– en bleu sa tangente au point d'abscisse 0.



- Retrouver les valeurs des nombres réels a, b et c.

Maths à l'oral

Expliquez votre démarche.

Fichier Python
Ex. 80
Manuel numérique enseignant

79 **Parties masquées**

Claire a retrouvé un exercice de mathématiques avec sa solution, mais des parties sont illisibles car tachées d'encre.

Énoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto -3e^{\ldots}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.

Solution

Pour tout nombre réel x :

$f'(x) = -6e^{\ldots}$

$f'(0) = -6e$ et $f(0) = \ldots$

Donc une équation de la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0 est $y = \ldots$

- Aider Claire à retrouver les parties masquées par les taches d'encre.

Maths à l'oral

Expliquez votre démarche pas à pas pour retrouver les parties masquées.

80 ALGORITHMIQUE

On considère la suite (u_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = e^{0,8n}$.

1. a. Écrire en langage naturel un algorithme qui, pour une valeur d'un nombre réel A donnée, indique le plus petit nombre entier M tel que $u_M > A$.

b. Justifier pourquoi cet algorithme fonctionne pour tout nombre réel A.

2. python Programmer votre algorithme en Python et le tester pour A = 100, puis pour A = 1 000.

81 IN ENGLISH p. 381

The function h is such that $h : x \mapsto \dfrac{e^{-4x-3}}{-3x+1}$ differentiable where $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

a. Determine an expression of its derivative.

b. State the subintervals in which the derivative is negative, positive or zero.

c. State the subintervals in which h is increasing, decreasing or static.

d. Determine the equation of the tangent line of h at the point $x = 1$.

82 On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto e^x \text{ et } g : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}} - 1,$$

définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Étudier la position relative des courbes représentatives de f et g.

83 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x+1} - e^{-x}}{x^2+3}$, définie et dérivable sur $[-3\,;\,2]$.

1. a. Tracer la courbe représentative de f sur un outil numérique.

b. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3\,;\,2]$ de l'équation $f(x) = 0$.

c. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3\,;\,2]$ de l'équation $f(x) = -2$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto 3x + 2$, définie et dérivable sur $[-3\,;\,2]$.

a. Tracer la courbe représentative de g sur le même écran que celle de f.

b. Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions sur $[-3\,;\,2]$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

c. Donner le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $[-3\,;\,2]$.

84 **1.** On considère la fonction :

$$g : x \mapsto (x-2)e^{-2x+6} + 3,$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction g.

a. Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?

b. Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

85 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2-9}$, définie et dérivable sur $]-3\,;\,3[$.

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-9}$

$g(x) = \text{Dérivée}(f, x)$

$\to \dfrac{-2\,x\,e^{2x} + 2\,x^2\,e^{2x} - 18\,e^{2x}}{x^4 - 18\,x^2 + 81}$

$h(x) = \text{Développer}\left(\left(x^2-9\right)^2\right)$

$\to x^4 - 18\,x^2 + 81$

a. Justifier que, pour tout nombre réel x :

$$e^{2x}(2x^2 - 2x - 18) = -2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} - 18e^{2x}.$$

b. En déduire le tableau de signes de la dérivée de la fonction f sur $]-3\,;\,3[$, puis le tableau de variations de la fonction f sur $]-3\,;\,3[$.

86 On considère les fonctions $f : x \mapsto -e^{-12x}$ et $g : x \mapsto 4e^{3x} - 5$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

a. Tracer les courbes représentatives de f et g sur un outil numérique, puis conjecturer les coordonnées du point en lequel elles ont une tangente commune.

b. Valider ou corriger cette conjecture par le calcul.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

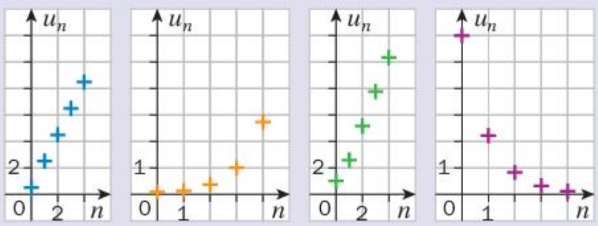
Savoir-faire 5 p. 169

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

87 QCM
Les nuages de points ci-dessous représentent chacun les premiers termes d'une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, modélisant une situation. Quelles sont les situations pour lesquelles on peut affirmer qu'elles ne sont pas à croissance exponentielle ?

a. **b.** **c.** **d.**



88 Pour chaque suite, définie sur $\mathbb{N}$, préciser si elle est à croissance ou à décroissance exponentielle.

a. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison 0,98.

b. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -0,8$ et de raison 5.

c. (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = -2$ et de raison $(-0,4)$.

d. (a_n) est la suite de terme général $a_n = e^{-0,1n+5}$.

Aide Chapitre 2 p. 49, pour la détermination du sens de variation d'une suite géométrique.

89 Vrai ou faux ?

a. « La suite u définie par $u_0 = 10\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 100$ est à croissance exponentielle. »

b. « La suite v définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,2v_n$ est à croissance exponentielle. »

c. « La suite w définie par $w_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -3w_n$ est à décroissance exponentielle. »

d. « La suite a définie par $a_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n$ est à décroissance exponentielle. »

90 QCM
En 2018, un village comptait 800 habitants et le maire a constaté chaque année une baisse de 2 % du nombre d'habitants depuis 10 ans. On considère que cette baisse reste constante chaque année.
On note u_n, avec $n \in \mathbb{N}$, le nombre de centaines d'habitants de ce village l'année $(2018 + n)$. La représentation graphique de la suite (u_n) est un nuage de points qui appartient à la représentation graphique d'une fonction $t \mapsto a \times e^{kt}$.
Quelle valeur peut-on donner au nombre réel a ?

a. 0,98 **b.** 800 **c.** 1,02 **d.** 8

★

Pour les exercices 91 et 92

a. Représenter les quatre premiers termes de la suite.

b. Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times e^{kt}$. Déterminer la valeur du nombre réel a et une valeur approchée du nombre réel k à 10^{-2} près.

91 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = 3 \times 0,8^n.$$

92 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = 0,4 \times 5,1^n.$$

93 Les parents de Gaëtane placent, depuis sa naissance, 50 € sur son compte courant chaque année ; ils affirment que leur placement est à croissance exponentielle.

• **À l'oral** Expliquer l'erreur commise par les parents de Gaëtane dans leur raisonnement, puis proposer un placement à croissance exponentielle.

94 Afin d'acheter des ouvrages numériques, la bibliothèque municipale a décidé, à partir de janvier 2019, de procéder à un « effeuillage » en vendant le 10 janvier de chaque année 5 % des ouvrages papier de son stock. Le 10 janvier 2018, la bibliothèque disposait d'un stock de 35 000 ouvrages papier.
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre (en milliers) d'ouvrages papier disponibles après effeuillage le 10 janvier de l'année $(2018 + n)$.

1. Justifier que $u_0 = 35$, puis montrer que $u_1 = 33,25$ et $u_2 \approx 31,59$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. **TICE** On utilise un tableur pour obtenir un modèle d'ajustement exponentiel de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	35
3	1	33,25
4	2	31,59
5	3	30,01
6	4	28,51
7	5	27,08
8	6	25,73

a. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B3 ?

b. Le logiciel propose la fonction $f : t \mapsto 35e^{-0,05t}$ comme modèle d'ajustement. Vérifier qu'en octobre 2031, il restera environ la moitié du stock d'ouvrages papier de 2018.

★★

95 **De la réponse à la question**

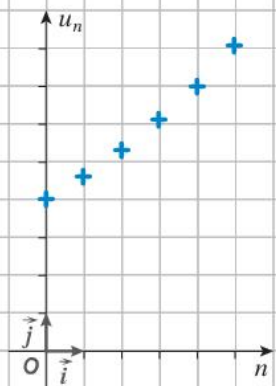
Lila a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

a. $u_0 = 4$; $u_1 = 4 \times \left(1+\frac{15}{100}\right) = 4{,}6$;
$u_2 = 4{,}6 \times 1{,}15 = 5{,}29$.

b. La suite est géométrique de raison 1,15.

c. $u_n = 4 \times 1{,}15^n$.

d.



e. $f(0) = a$ donc $a = 4$.

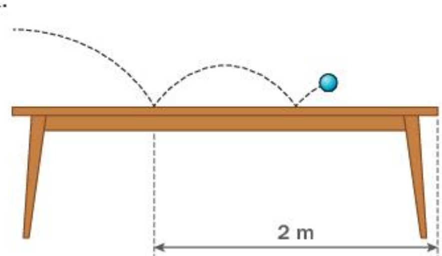
f. On cherche une valeur approchée de k telle que $e^k = 1{,}15$. On trouve $k \approx 0{,}14$.
Ainsi $f(t) = 4 \times e^{0{,}14t}$.

g. Au bout de 6 heures et 15 minutes le nombre de bactéries sera de 960.

• Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Lila.

Maths à l'oral
Discutez de la réponse que vous apporteriez à cet exercice.

96 LOGIQUE Une balle rebondit sur une table à 2 m de son bord droit. Le premier rebond a pour longueur 1 m, puis chaque rebond est deux fois moins long que le précédent.



a. Modéliser la situation par une suite (ℓ_n) où ℓ_n représente la longueur (en m) du n-ième rebond.

b. Représenter par un nuage de points les premiers termes de cette suite.

c. Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f : t \mapsto a \times e^{kt}$. Déterminer une expression de la fonction f.

d. Expliquer pourquoi $f(t) > 0$ pour tout nombre réel t.

e. Expliquer pourquoi la balle ne peut pas tomber de la table.

97 IN ENGLISH ▶ p. 381

In physics, the rate of decay of a radioactive substance, that is to say the number of particles that decay in one second, is proportional to the number of particles $N(t)$ present at the moment t. The rate of decay corresponds to the derivative of the function N.

The function N satisfies two conditions:

• $N'(t) = -\lambda \times N(t)$ where $\lambda > 0$;

• $N(0) = N_0$, where N_0 is the number of particles present in the radioactive substance for $t = 0$.

a. Show that the function $f : t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$ satisfies these two conditions and that consequently the number of particles present at time t can be modelled by this function.

b. State whether the rate of decay of a radioactive substance is increasing or decreasing exponentially.

98 Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie pour tout nombre réel t positif par :

$$f : t \mapsto a e^{-\frac{t}{5}} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante :

$$f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4.$$

a. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four est de 1 000 °C.

b. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

D'après Bac S Pondichéry, mai 2018.

Vidéo
Démonstration : unicité de la fonction exponentielle
hatier-clic.fr/ma1180

La démonstration rédigée Approfondissement

Propriété

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' égale à f telle que $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle ; elle est notée $x \mapsto \exp(x)$.

OBJECTIF : on souhaite démontrer l'unicité de la fonction exponentielle (on admet qu'elle existe).

Démonstration

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

L'objectif est de démontrer que f est unique.

Supposons qu'il existe une autre fonction, notée g, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) \neq 0$.

Pour tout nombre réel x, on a :

$$h'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Or, par définition, pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$.

D'où :

$$h'(x) = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2}.$$

Ainsi, pour tout nombre réel x, $h'(x) = 0$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)}$ avec $f(0) = g(0) = 1$, alors $h(0) = 1$.

Ainsi, pour tout nombre réel x, $h(x) = 1$.

Or, pour tout nombre réel x :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x).$$

On a donc démontré que, pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x)$ et, par conséquent, l'unicité de la fonction exponentielle. ■

Le principe

1 **On suppose qu'il existe une autre fonction** que f vérifiant ces deux propriétés.

2 Pour montrer que les fonctions f et g sont identiques, **on considère la fonction h, quotient des deux fonctions** f et g, puis :
a. on dérive h à l'aide de la formule du cours (▶ Chapitre 4) ;
b. on en déduit que h ne peut être qu'une fonction constante ;
c. on montre que cette constante vaut 1.

3 On conclut.

La démonstration à compléter

99 Approfondissement En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de montrer que **la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Démonstration

- On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = \exp(x) \times \exp(-x).$$

On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = \text{.......................} = 0.$$

On en déduit que g est une fonction ....

Donc, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(\ldots) = \ldots$.

Ainsi, pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = \ldots$.

Or un produit est nul si et seulement si ....

Donc, pour tout nombre réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

- Pour tout nombre réel x, $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \ldots\ldots$.

Or un carré est toujours ......, donc ....

- Pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \text{............}$.

La dérivée de exp est donc de signe .... sur ... .

Et la fonction exponentielle est donc .... sur ... . ■

1 On commence par montrer que exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour cela :
a. **on dérive un produit de deux fonctions** (▶ Chapitre 4) ;
b. **on en déduit le sens de variation** de la fonction produit ;
c. on conclut.

2 Pour montrer que exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on utilise la relation fonctionnelle $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ pour écrire $\exp(x)$ différemment.

3 Pour montrer que exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on dérive exp, puis on utilise le **lien entre signe de la dérivée et sens de variation** d'une fonction (▶ Chapitre 5).

Démonstrations Vers le BAC

100 Approfondissement **a.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante et déterminer cette constante.

b. En déduire que, pour tous nombres réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

c. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Pour les exercices 101 et 102

k est un nombre réel strictement positif.

101 **a.** Justifier que la fonction $f_k : t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$f_k'(t) = k \times e^{kt}.$$

c. En déduire que la fonction f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

102 **a.** Justifier que la fonction $g_k : t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel t :

$$g_k'(t) = -k \times e^{-kt}.$$

c. En déduire que la fonction g_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

103 On considère la suite (e^{nb}) où n est un nombre entier naturel et b un nombre réel fixé.

1. L'objectif de cette question est de **démontrer par récurrence** que, pour tout nombre entier naturel n, $e^{nb} = \left(e^b\right)^n$.

a. Montrer que l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

On dit que la propriété est **initialisée**.

b. Supposons que pour un nombre entier N l'égalité est vérifiée, c'est-à-dire $e^{Nb} = \left(e^b\right)^N$.

Montrer que l'on a alors :

$$e^{(N-1)b} = \left(e^b\right)^{N+1}.$$

On dit que la propriété est **héréditaire**.

Conclusion : L'égalité est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que la suite (e^{nb}) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. **a.** Si $b > 0$, que peut-on dire du nombre e^b ?
En déduire les variations de la suite (e^{nb}).

b. Si $b < 0$, que peut-on dire du nombre e^b ?
En déduire les variations de la suite (e^{nb}).

104 **Position relative**

a. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto 5e^{\frac{x}{5}} - 4.$$

Donner une expression de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

b. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto 5e^{\frac{x}{5}} - x - 5.$$

Après avoir donné une expression de la dérivée de g, dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

105 IN ENGLISH ▶ p. 381

A laboratory has tested a medicine for migraine headaches. The quantity of the medicine absorbed by the body ends up in the blood stream and is then excreted by the kidneys.

The laboratory claims that the quantity of the medicine found in the blood stream, following ingestion of a dose of the medication, at the end of a period of time t (in hours), is approximately given by the function $f : t \mapsto 2t^2e^{-t+0.5}$ (in g/L of blood) where $t \in [0\,;+\infty[$.

If the quantity of the medicine contained in the blood stream exceeds 2g/L, the medicine is then deemed dangerous. The medicine is considered effective when the quantity exceeds 0.5g/L of blood.

a. State the subintervals in which f is increasing, decreasing or static where $t \in [0\,;+\infty[$.

b. Is this medicine dangerous?

c. Represent this function using a scientific calculator with graphic function. For how long is this medicine effective?

Oral activity

Present the results of the laboratory study with a slideshow.

106 Chercher - Raisonner | **De la dérivée à la fonction**

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+x}{e^x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{e^x}$.

- Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

107 **Fonctions hyperboliques**

On appelle :

– fonction **cosinus hyperbolique** la fonction notée ch définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

– fonction **sinus hyperbolique** la fonction notée sh définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique est paire et que la fonction sinus hyperbolique est impaire.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

b. Montrer que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer sh(0).

c. En déduire le tableau de signes de $\mathrm{sh}(x)$.

4. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction ch.

c. Quel est le minimum atteint par la fonction ch sur $\mathbb{R}$?

5. a. Représenter | Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) les représentations graphiques de ces deux fonctions.

b. La représentation graphique de sh semble avoir un centre de symétrie, lequel ?

Raisonner | Valider ou corriger cette conjecture.

Aide Pour tout nombre réel a, si l'on considère le point A d'abscisse a appartenant à la courbe représentative de sh et le point B d'abscisse $-a$ sur la même courbe, on pourra montrer que O est le milieu de [AB].

c. La représentation graphique de ch semble avoir un axe de symétrie, lequel ?

Valider ou corriger cette conjecture.

108 **Dérivée de la dérivée**

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

a. Déterminer une expression de $f'(x)$.

b. Déterminer une expression de la dérivée seconde de f, notée f''.

c. Donner le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire le tableau de variations de f' sur $\mathbb{R}$, puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \geqslant 1$.

e. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

109 Faire l'étude complète (variations, convexité) de la fonction $f : x \mapsto 2(x+1)e^{1-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Info

Une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I est **convexe** (respectivement **concave**) sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus (respectivement en dessous) de chacune de ses tangentes.

f est convexe (respectivement concave) sur I si et seulement si sa **dérivée f' est croissante** (respectivement **décroissante**) sur I.

Fichier logiciel
Ex. 110 et 113
Manuel numérique enseignant

110 IN ENGLISH p. 381

On the first day ($n = 1$), the size of a water lily is estimated as being 3 mm^2. The surface of the water lily doubles every day (every 24 hours).

1. **Modéliser** | Model the situation with a sequence $U(n)$ which represents the surface area in mm^2 at the n^{th} day.

2. TICE **a.** In a graph, represent the first four terms of the sequence $U(n)$.

b. Using an exponential model, determine the expression of the function $f : t \mapsto a \times e^{kt+b}$ which allows one to determine how long it will take (expressed in hours) the water lily to exceed 1m^2 (to the nearest hour).

111 Étude d'une fonction auxiliaire Vers le BAC

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2e^x - 1$.

a. Déterminer une expression de la dérivée de g.

b. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

d. Représenter g sur un outil numérique, puis donner par lecture graphique une valeur approchée à 0,1 près de la solution de l'équation $g(x) = 0$.

e. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a. Expliquer pourquoi la fonction f n'est pas définie en 0.

b. Déterminer une expression de la dérivée de f.

c. Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

d. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

112 Une autre relation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous nombres réels x et y, la relation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ (*)$$

1. Montrer que toute fonction linéaire vérifie la relation fonctionnelle (*).

2. a. Montrer que si f est une fonction qui vérifie la relation fonctionnelle (*), alors $f(0) = 0$.

b. Montrer que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation fonctionnelle (*), alors pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel h non nul :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

c. En déduire que, pour tout nombre réel a, $f'(a) = f'(0)$, puis que f est une fonction linéaire.

113 Décharge d'un condensateur

Info

Un condensateur est un composant électrique qui permet d'accumuler des charges électriques opposées. Il est notamment utilisé pour stabiliser une alimentation électrique : il se charge lors des pics de tension et se décharge lors de chutes de tension.

Lors d'un TP de physique, Alan a relevé la tension U (en volts) aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans une résistance en fonction du temps (en secondes) :

U (en V)	3,27	2,68	2,19	1,80	1,47	1,20	0,98
t (en s)	2	4	6	8	10	12	14

1. Exploitation des résultats TICE

a. Représenter à l'aide d'un tableur le nuage de points correspondant à ce relevé.

b. Faire afficher par le logiciel une courbe exponentielle passant au plus près de ce nuage de points afin de modéliser par une fonction la tension (en V) en fonction du temps (en s).

c. Quelle était la tension initiale aux bornes du condensateur ?

d. La fonction proposée par le logiciel est de la forme $U : t \mapsto a \times e^{-\lambda t}$.
Quelle est la valeur de a proposée par cet ajustement ? Quelle est celle de λ ?

2. Étude théorique

Si C est la capacité du condensateur (en farads : F), R la résistance (en ohms : Ω) et E la charge initiale (en V) du condensateur ($U(0) = E$), alors la fonction de décharge du condensateur est définie par :

$$U : t \mapsto E \times e^{-\frac{t}{RC}}.$$

a. À l'aide de la question **1**, déterminer la valeur de E et celle de $\tau = RC$.

b. La professeure de physique d'Alan annonce la propriété suivante :

« La tangente à l'exponentielle au point d'abscisse $t = 0$ coupe l'axe des abscisses en $\tau = RC$. »

Démontrer par le calcul que la fonction trouvée par un ajustement exponentiel dans la question **1** vérifie cette propriété.

c. Sachant que la capacité C du condensateur est 0,2 F, calculer la résistance R et en déduire l'intensité du courant à l'instant τ.

Aide La loi d'Ohm stipule que $U = R \times I$. Cette loi s'applique ici.

Fichier Python
Ex. 116
Manuel numérique enseignant

114 **Recherche tangente particulière** Vers le BAC

On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. a. Justifier que la fonction f n'est pas définie en 0.

b. Déterminer une expression de la dérivée de f.

c. Donner le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

d. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Calculer | On cherche une valeur approchée du ou des abscisses des points de la courbe représentative de f dont la tangente est parallèle à la droite $y = -x + 5$.

a. Montrer que cela revient à résoudre l'équation :
$$e^{2x} - 3e^x + 1 = 0.$$

b. En effectuant le changement de variable $X = e^x$, résoudre l'équation $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$.

c. Conclure.

115 L'approximation par la **méthode d'Euler** consiste à approcher la courbe d'une fonction f par ses tangentes.

a. Montrer que l'ordonnée du point d'abscisse $a + h$ de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en a est $y = f'(a) \times h + f(a)$.

b. Quand h devient très petit, la courbe de la fonction f est très proche de sa tangente : elles semblent presque se confondre ; Euler dit alors que $\boldsymbol{f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a)}$.
En appliquant cette approximation à la fonction exponentielle, expliquer pourquoi on obtient $f(a + h) \approx f(a) \times (1 + h)$.

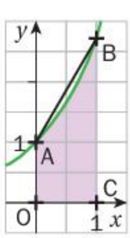
c. Par raisonnement par récurrence, Euler a démontré que $f(a + nh) \approx f(a) \times (1 + h)^n$ pour de très petites valeurs de h et pour n entier naturel non nul.
Pour $a = 0$ et $h = \dfrac{1}{n}$, en déduire que $e \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

d. ALGORITHMIQUE Écrire une fonction en langage naturel de paramètre n (entier naturel non nul) qui renvoie une valeur approchée de la valeur de e.

116 **Un(e) air(e) d'exponentielle**

Mona et Erwan veulent déterminer l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ et la courbe d'équation $y = e^x$.

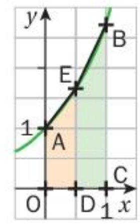
1. Mona estime que l'aire $\mathscr{A}$ cherchée est proche de celle du trapèze ABCO avec O(0 ; 0), C(1 ; 0) ; A(0 ; 1) et B(1 ; e).



a. Quelle est la hauteur du trapèze ?
Quelle est la longueur de sa grande base ? de sa petite base ?

b. En déduire l'aire du trapèze ABCO.

2. Erwan pense que l'idée de Mona est bonne mais qu'ils peuvent être plus précis dans leurs calculs. Pour cela, il considère le point E d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe de la fonction exponentielle et il calcule l'aire des deux trapèzes obtenus.



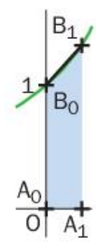
Il trouve $\mathscr{A} = \left(\dfrac{1 + \sqrt{e}}{2}\right)^2$.

a. Déterminer l'aire du trapèze AEDO et l'aire du trapèze EBCD.

b. Retrouver le résultat d'Erwan.

3. Calculer | Mona surenchérit en expliquant qu'ils peuvent découper l'intervalle [0 ; 1] en n parties égales (n étant un nombre entier naturel non nul) et obtenir ainsi n trapèzes de hauteur $\dfrac{1}{n}$.

a. On considère les points :
$$A_0(0 ; 0),\ A_1\left(\frac{1}{n} ; 0\right),\ B_0(0 ; e^0) \text{ et } B_1\left(\frac{1}{n} ; e^{\frac{1}{n}}\right).$$



Déterminer l'aire du trapèze $A_0A_1B_1B_0$.

b. Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et $n - 1$, on considère les points $A_k\left(\dfrac{k}{n} ; 0\right)$, $A_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n} ; 0\right)$, $B_k\left(\dfrac{k}{n} ; e^{\frac{k}{n}}\right)$ et $B_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n} ; e^{\frac{k+1}{n}}\right)$.

Déterminer l'aire du trapèze $A_kA_{k+1}B_{k+1}B_k$.

c. ALGORITHMIQUE Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous écrit par Mona pour calculer la somme des aires des n trapèzes.

$A \leftarrow$ ......
Pour k allant de ... à ...
$\quad A \leftarrow A + \dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n} \times \dfrac{1 + e^{\frac{1}{n}}}{2}$
Fin Pour
Afficher A

d. PROGRAMMATION python Coder cet algorithme en Python, puis le tester pour $n = 10$.

Aide Penser à écrire p=float(k) pour calculer exp(p/n).

SES

117 Coûts de production minimum

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x tonnes du produit est modélisé par la fonction C définie sur [0 ; 10] par $C(x) = (2x - 9)e^{1 - 0,5x}$.

1. Le coût marginal, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une tonne supplémentaire, est égal à la dérivée du coût total.

a. Montrer que le coût marginal peut s'écrire $C_m(x) = (6,5 - x)e^{1 - 0,5x}$.

b. Donner le tableau de signes de $C_m(x)$ sur [0 ; 10] et en déduire le tableau de variations de C sur [0 ; 10].

c. Pour combien de tonnes produites quotidiennement le coût total mensuel est-il maximum ?
Quel est ce coût maximum, arrondi au millier d'euros ?

2. Le coût moyen de production est donné par la formule $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu la dérivée de ce coût moyen.

$f(x) = (2x - 9) \cdot \dfrac{e^{1-0.5x}}{x}$

$g(x) = \text{Dérivée}(f)$

$\to -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9x\,e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2x^2\,e^{-\frac{1}{2}x+1} + 18\,e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x^2}$

a. Après avoir cherché les racines de $-2x^2 + 9x + 18 = 0$, donner le tableau de signes de la fonction g, puis le tableau de variations de f sur [0 ; 10].

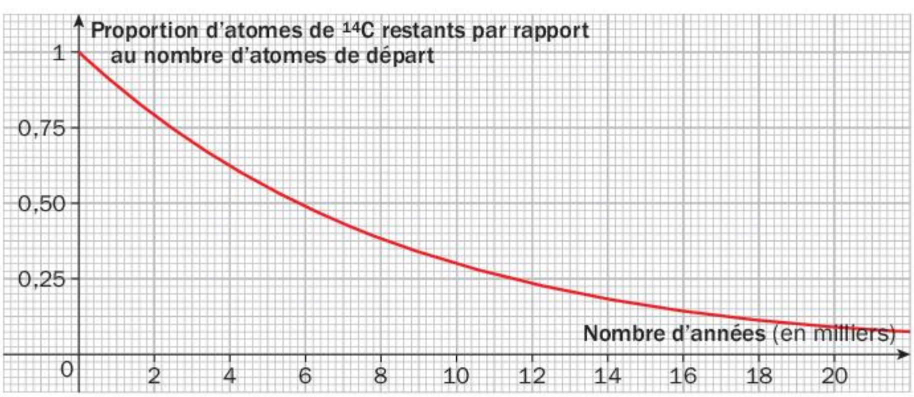
b. En déduire le coût moyen maximum de production.

Fiche métier
Responsable de production
hatier-clic.fr/ma1185a

Enseignement scientifique

118 Décroissance radioactive du ^{14}C

La datation au carbone 14 (noté ^{14}C) est basée sur la mesure de l'activité radiologique du ^{14}C contenu dans toute matière organique. Elle permet de déterminer l'intervalle de temps écoulé depuis la mort de l'organisme à dater. Dater un échantillon de matière organique consiste à mesurer (par spectrométrie de masse) la proportion du nombre d'atomes de ^{14}C restants par rapport au nombre d'atomes de ^{14}C de départ.
La courbe ci-dessous, dite à décroissance exponentielle, permet de déterminer le nombre de milliers d'années écoulées en fonction du ratio obtenu.



a. En 1950 a été effectuée une des premières datations sur des objets trouvés sur le sol de la grotte de Lascaux, en Dordogne. L'âge de la grotte de Lascaux a été estimé à 18 000 ans. Par lecture graphique, déterminer quelle était la proportion d'atomes de carbone 14 dans les prélèvements effectués dans la grotte.

b. On appelle « demi-vie » le temps au bout duquel une grandeur atteint la moitié de sa valeur initiale. Déterminer par lecture graphique la « demi-vie » du ^{14}C.

c. TICE La fonction modélisant la décroissance du ^{14}C en fonction de l'âge d'un échantillon admet une expression de la forme $f(t) = e^{-kt}$.
Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de k en utilisant un logiciel.

d. Expliquer pourquoi dans cette modélisation l'image de 0 doit être égale à 1.

Fiche métier
Archéologue
hatier-clic.fr/ma1185b

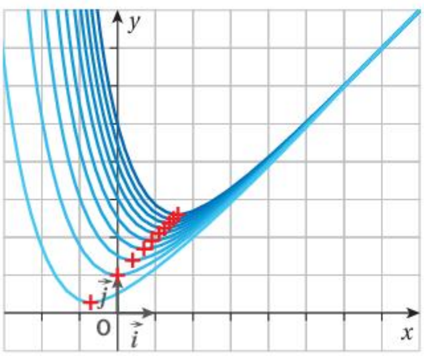
Recherches mathématiques

Questions ouvertes

119 Soit k un nombre réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout nombre réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$.

- Les points A_k sont-ils tous alignés ?

D'après Bac S Liban, juin 2017.

Défis

120 En cas d'épisode de pollution, deux seuils sont déterminés selon la concentration de masse de polluants dans l'atmosphère :

– quand le **seuil d'information** est atteint, le préfet communique des recommandations sanitaires pour les personnes les plus sensibles ;

– quand le **seuil d'alerte** est atteint, le préfet complète les recommandations par des mesures d'urgence réglementaires (limitation de la vitesse, etc.).

Pour les particules (PM10), le seuil de déclenchement du niveau d'information est de 50 μg·m^{-3} d'air et le seuil de déclenchement du niveau d'alerte est de 80 μg·m^{-3} d'air.

À la demande de la préfète qui souhaite vérifier si l'on peut implanter une usine chimique dans sa région, un scientifique a mesuré la concentration en particules dans l'air en fonction du temps (en h) et de la concentration c de produit chimique dégagée par l'usine à un instant $t = 0$.

Le résultat de ces mesures peut être modélisé par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto (-10t + c)\mathrm{e}^{t}$.

- Déterminer la valeur exacte de la concentration maximale c_1 avant de dépasser le seuil d'information, puis de la concentration maximale c_2 avant de dépasser le seuil d'alerte.

En groupe

121 **e, r, k, a... eurêka !**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto a\mathrm{e}^{kx+r}$$

avec a, r et k trois nombres réels.

- **Chercher - Raisonner** | Sachant que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 est la droite d'équation $y = \mathrm{e} \times (-8x - 4)$, déterminer les valeurs des nombres réels a, r et k.

Essayons de retrouver ensemble les formules utiles !

CHAPITRE 7

Fonctions trigonométriques

Le **théodolite** est un instrument utilisé par le **géomètre topographe** dans les opérations préalables à tout programme de construction ainsi que pour l'auscultation d'ouvrages d'art et la surveillance des volcans, des glaciers, etc.
Cet instrument permet de mesurer des **angles** dans les plans horizontaux et verticaux, entre deux repères visuels. Avec les mesures obtenues, on peut ensuite calculer des distances à l'aide de la **trigonométrie**.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Exploiter le cercle trigonométrique

- Activités 1, 2 et 3
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 17 à 20
- Les incontournables 35 à 40
- Entraînement 45 à 58

OBJECTIF 2

Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel

- Cours 2
- Savoir-faire 2
- Quiz 21 à 24
- Les incontournables 41 et 42
- Entraînement 59 à 76

OBJECTIF 3

Étudier les fonctions trigonométriques

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 3
- Quiz 25 à 29
- Les incontournables 43 et 44
- Entraînement 77 à 90

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Expliquer chaque mot ou groupe de mots, si besoin à l'aide d'un schéma.

sinus — cosinus — TANGENTE — angle — TRIANGLE RECTANGLE — trigonométrie — côté adjacent — hypoténuse — côté opposé

Rappels

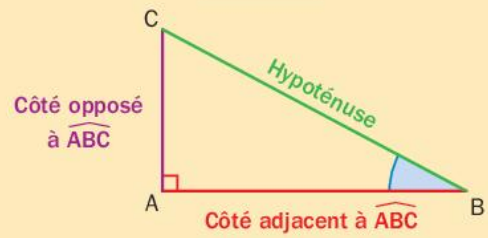
Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle :

- le **cosinus** d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté adjacent à cet angle sur la longueur de l'hypoténuse ;
- le **sinus** d'un angle aigu est égal au rapport de la longueur du côté opposé à cet angle sur la longueur de l'hypoténuse ;
- la **tangente** d'un angle aigu est égale au rapport de la longueur du côté opposé à cet angle sur la longueur du côté adjacent à cet angle.

Le **cosinus** et le **sinus** d'un angle aigu sont des **nombres réels compris entre 0 et 1**.

Exemple



$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

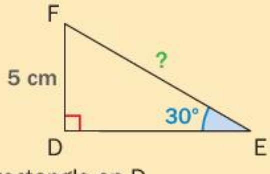
Calculs de longueurs et de mesures d'angles dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, à l'aide de la trigonométrie, on peut :

- **calculer une longueur** ;

Exemple

On considère le triangle DEF ci-contre. Calculons la longueur FE.



Dans le triangle DEF rectangle en D,

$\sin \widehat{DEF} = \dfrac{DF}{FE}$, donc $\sin 30° = \dfrac{5}{FE}$.

Ainsi $FE = \dfrac{5}{\sin 30°}$.

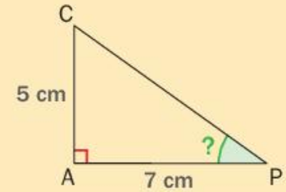
La **valeur exacte** de sin 30° est 0,5.

Donc $FE = \dfrac{5}{0{,}5} = 10$ cm.

- **calculer une mesure d'angle**.

Exemple

On considère le triangle CAP ci-contre. Calculons la mesure de l'angle $\widehat{APC}$.



Dans le triangle CAP rectangle en A,

$\tan \widehat{APC} = \dfrac{AC}{AP}$, donc $\tan \widehat{APC} = \dfrac{5}{7}$.

Avec la **calculatrice**, on obtient une **valeur approchée** au dixième de la mesure de l'angle :

$\widehat{APC} \approx 35{,}5°$.

Réactivation

Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu

1 VIF est un triangle rectangle en I.

En fonction des longueurs VI, IF et FV, exprimer :

a. $\cos\widehat{IVF}$ et $\cos\widehat{VFI}$;

b. $\sin\widehat{IVF}$ et $\sin\widehat{VFI}$;

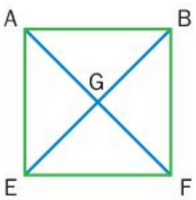
c. $\tan\widehat{IVF}$ et $\tan\widehat{VFI}$.

2 ABFE est un carré de centre G.
Recopier et compléter par un angle.

a. $\frac{AB}{EB} = \sin \ldots = \cos \ldots$.

b. $\frac{AG}{AE} = \sin \ldots = \cos \ldots$.

c. $\frac{BF}{EB} = \sin \ldots = \cos \ldots$.

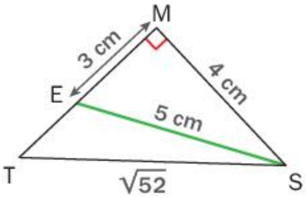


3 TSM est un triangle rectangle en M et E est un point du segment [TM].
Déterminer :

a. $\cos\widehat{MES}$

b. $\cos\widehat{ESM}$

c. $\cos\widehat{TSM}$



4 PIL est un triangle rectangle en I tel que PI = 4 cm et PL = 6 cm.
E est un point de [IL] et S un point de [PL] tels que ESL est un triangle rectangle en S et ES = 2 cm.

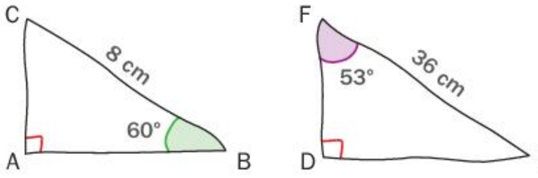
a. Faire une figure à main levée, puis écrire de deux manières différentes l'expression de $\sin\widehat{PLI}$.

b. En déduire la valeur exacte de la longueur EL.

c. Sachant que IL = $2\sqrt{5}$ cm, déterminer la valeur exacte de la longueur SL (sans utiliser le théorème de Pythagore).

Calculs de longueurs et de mesures d'angles dans un triangle rectangle

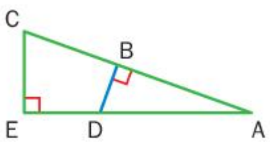
5 **Vrai ou faux ?**
On considère les triangles ABC et DEF suivants.



a. « AB = 4 cm. »

b. « DE ≈ 28,8 cm. »

6 AEC et BDA sont des triangles rectangles tels que AB = 4 cm, AD = 6 cm et AE = 9 cm.

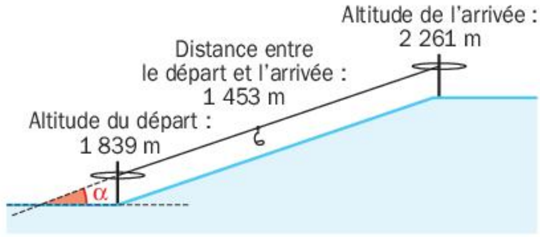


a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$, arrondie au dixième de degré.

b. Calculer la longueur AC, puis la longueur CE (sans utiliser le théorème de Pythagore), arrondies au dixième de centimètre.

7 **Vrai ou faux ?**
« Un triangle TIZ tel que TI = 23,5 cm, TZ = 10,9 cm et $\widehat{TIZ}$ = 25° est rectangle en T. »

8 À l'entrée d'un télésiège d'une station de ski, on peut voir les informations suivantes :



• Calculer la mesure de l'angle α formé avec l'horizontale par le câble de ce télésiège. On arrondira le résultat au degré.

D'après Brevet Amérique du Nord, juin 2016.

Corrigés p. 368

Fichier logiciel
Actvité 2
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Exploiter le cercle trigono-métrique

1 La grande roue de Lyon

La grande roue de la place Bellecour a un diamètre de 60 m et contient 42 nacelles réparties à équidistance les unes des autres. Elle tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Pour chaque calcul de longueur, on donnera la valeur exacte et une valeur approchée au cm.

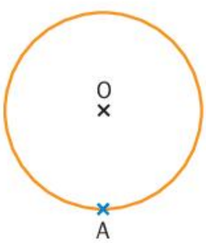
1. Une guirlande lumineuse est installée autour de cette roue.
Calculer la longueur (en m) de cette guirlande.

2. Mila s'installe dans une nacelle.
Quelle distance (en m) aura-t-elle parcourue lorsqu'elle aura effectué :

a. trois quarts de tour ? **b.** un huitième de tour ? **c.** cinq huitièmes de tour ?

3. a. Calculer la distance (en m) sur la roue entre deux nacelles consécutives.
b. Quelle est la mesure de l'angle qui a pour sommet le centre de la roue et associé à l'arc de cercle entre deux nacelles consécutives ? On arrondira au centième de degré.

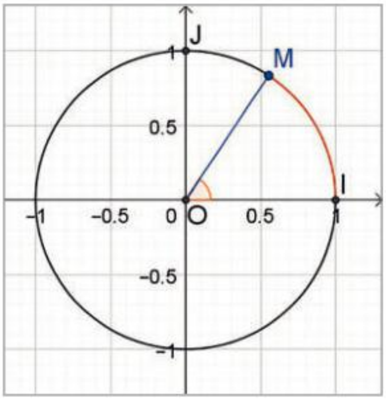
4. a. Représenter la roue par un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Sur ce cercle, placer le point A représentant la position de la nacelle au point d'embarquement des visiteurs.
b. Mila, assise dans une nacelle, part du point A et parcourt en tournant la distance de 20π m pour arriver au point F.
Quelle fraction d'un tour a-t-elle parcourue ?
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AOF}$? Placer ce point sur le cercle.



OBJECTIF 1
Exploiter le cercle trigono-métrique

2 Longueur d'un arc de cercle TICE

1. Dans la fenêtre d'un logiciel de géométrie dynamique, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) :
- construire le cercle de centre O et de rayon 1* ;
- placer un point M sur ce cercle, puis tracer le segment [OM].



* Muni du sens de lecture contraire au sens des aiguilles d'une montre, ce cercle est appelé **cercle trigonométrique**.

2. a. Faire afficher la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.
b. Faire afficher la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degrés, puis en radians.
c. En déplaçant le point M sur le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, que peut-on observer au sujet de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ et de la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$?

3. Où semble se placer le point M sur le cercle pour une longueur d'arc $\overset{\frown}{IM}$ égale à π ? 2π ? $\frac{\pi}{2}$? $\frac{\pi}{4}$? $\frac{\pi}{3}$?
Valider ou corriger ces conjectures par le calcul en s'appuyant sur le périmètre du cercle trigonométrique.

Aide Le **radian** est une autre unité de mesure d'angle.
Pour faire afficher la mesure d'un angle en radians dans *GeoGebra* :
– dans le menu *Options*, cliquer sur Avancé... ;
– dans la rubrique *Unité d'angle* de la fenêtre qui s'affiche, cocher « Radian ».

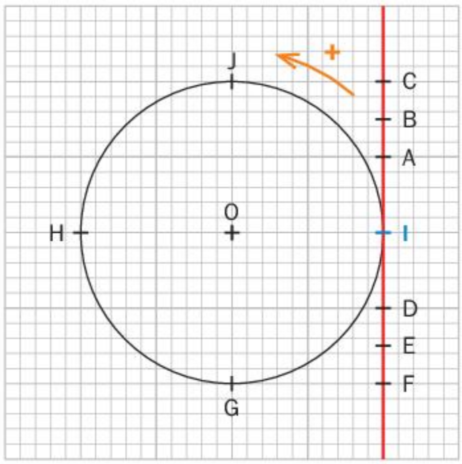
OBJECTIF 1
Exploiter le cercle trigonométrique

3 Avec une bobine et du fil

On veut enrouler un fil autour d'une bobine de rayon 1 cm.

Pour cela, on fixe le fil au point I de la bobine représentée en coupe ci-dessous à l'échelle 2:1.

1. Reproduire cette figure à la même échelle.



2. a. Si l'on enroule le fil (représenté par la droite (IA)) autour de la bobine dans le sens indiqué par la flèche, les points A, B et C du fil viennent se placer sur la bobine respectivement en A', B' et C'.
Placer approximativement ces trois points sur la bobine.

b. Si l'on enroule le fil autour de la bobine dans le sens inverse de celui indiqué par la flèche, les points D, E et F du fil viennent se placer sur la bobine respectivement en D', E' et F'.
Placer approximativement ces trois points sur la bobine.

3. En déroulant le fil enroulé autour de la bobine, les points J, H et G de la bobine correspondent respectivement aux points J_1, H_1 et G_1 sur le fil déroulé, représenté par la droite (IA). Placer approximativement ces trois points sur (IA).
Y a-t-il plusieurs possibilités ? Si oui, les préciser.

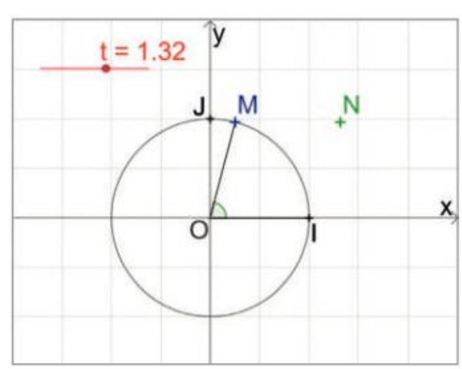
4. a. En quel point de la bobine viendrait se placer, par enroulement dans l<<e sens indiqué par la flèche, le point M du fil si la longueur IM est égale à $\dfrac{11\pi}{2}$?

Aide Comparer $\dfrac{11\pi}{2}$ avec le périmètre ou demi-périmètre de la bobine.

b. En quel point de la bobine viendrait se placer, par enroulement dans le sens inverse de celui indiqué par la flèche, le point N du fil si la longueur IN est égale à $\dfrac{7\pi}{2}$?

OBJECTIF 3
Étudier les fonctions trigonométriques

4 Courbe point par point d'une fonction trigonométrique TICE



1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire le cercle trigonométrique.

b. À tout nombre réel t de l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$, on associe le point M du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos(t)\ ;\ \sin(t))$.
À l'aide du logiciel, créer un curseur t (t compris entre -2π et 2π) avec un pas de 0,1 et placer le point M.

2. a. Créer le point N de coordonnées $(t\ ;\ \sin(t))$. Activer sa trace afin d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \sin(t)$ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
Que peut-on conjecturer sur la symétrie de cette courbe ?

b. À partir de cette courbe tracée point par point, conjecturer les variations de la fonction $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0\ ;\ \pi]$, puis dresser son tableau de variations.

3. Similairement, conjecturer les variations de la fonction $t \mapsto \cos(t)$ sur $[0\ ;\ \pi]$, puis dresser son tableau de variations.

Cours

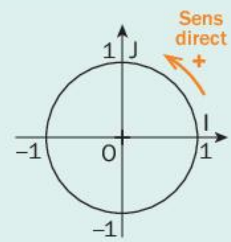
Pour les objectifs 1 et 2, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

OBJECTIF 1 Exploiter le cercle trigonométrique

Savoir-faire 1 p. 195

Définition

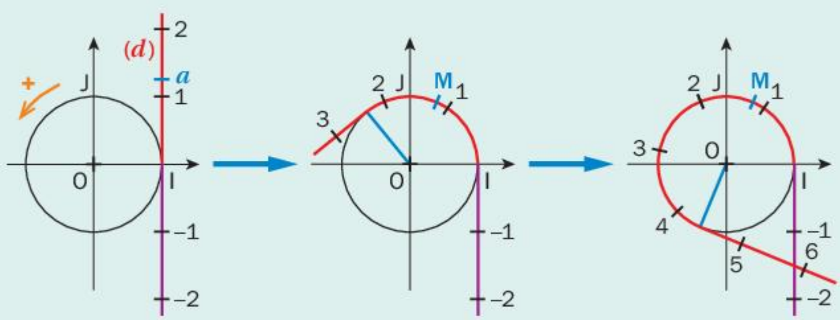
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.



Le sens direct est le **sens inverse des aiguilles d'une montre**. Il est aussi appelé sens trigonométrique ou **sens positif**.

Propriété

a est un nombre réel.
Si (d) est la tangente au cercle trigonométrique au point I, alors **au point de coordonnées (1 ; a) est associé un unique point M du cercle trigonométrique** par enroulement de la droite (d) autour de ce cercle.



La droite (d) est appelée droite numérique.

Associer à un point d'abscisse a de la droite numérique (d), un unique point du cercle trigonométrique, c'est **associer à un nombre réel a, un unique point** de ce cercle.

Propriétés

- Si a est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel a, alors le point M est associé à tous les nombres réels de la forme $a + k \times 2\pi$, avec k un nombre entier relatif.
- Si a et a' désignent des nombres réels tels que $a - a' = k \times 2\pi$ avec k un nombre entier relatif, alors a et a' sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

Lorsque le nombre réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, la mesure de **l'angle au centre $\widehat{IOM}$** est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$.
On dit aussi que l'angle $\widehat{IOM}$ mesure a radians.
Le radian est une nouvelle unité d'angle.

Exemple

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ est associé par enroulement au point J du cercle trigonométrique.

En effet, **le cercle trigonométrique a pour rayon 1, donc son périmètre vaut 2π.**

Ainsi, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ (un quart de cercle) vaut $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure 90°.

Les autres nombres réels qui sont associés au point J sont :

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2},\quad \ldots,\quad \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2},\quad \text{etc.}$$

On le note $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sur le cercle.

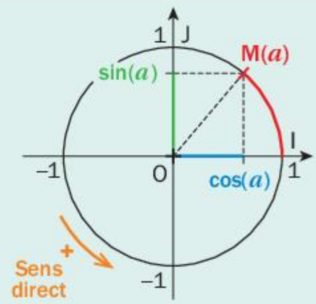
OBJECTIF 2 Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel

Savoir-faire 2 p. 196

Définitions

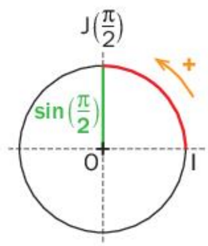
M est le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel a.

- Le **cosinus du nombre réel a**, noté **$\cos(a)$**, est l'**abscisse** du point M.
- Le **sinus du nombre réel a**, noté **$\sin(a)$**, est l'**ordonnée** du point M.

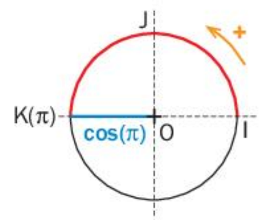


Exemples Par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique :

- le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ est associé au point J de coordonnées (0 ; 1), donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

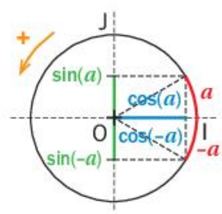


- le nombre réel π est associé au point K de coordonnées (–1 ; 0), donc $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.



Remarque : Si a est un nombre réel, alors :

$$\cos(-a) = \cos(a) \quad \text{et} \quad \sin(-a) = -\sin(a).$$



Propriétés

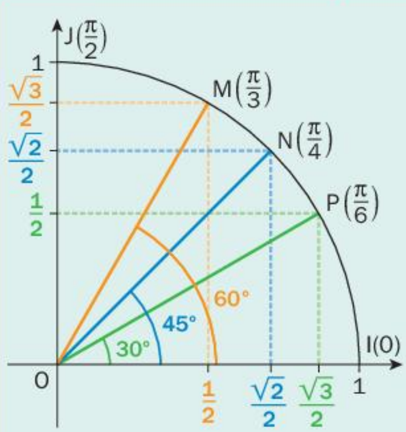
a est un nombre réel.

- $-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$.
- $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$.
- Si k est un nombre entier relatif, alors :

$$\cos(a + k \times 2\pi) = \cos(a) \quad \text{et} \quad \sin(a + k \times 2\pi) = \sin(a).$$

Démonstration rédigée p. 208

Cosinus et sinus de valeurs remarquables



Nombre réel a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(a)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstrations : exercices 91 à 93 p. 209

OBJECTIF 3 Étudier les fonctions trigonométriques

Savoir-faire 3 p. 197

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Définitions

- La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe **sin(x)**.
- La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout nombre réel x, associe **cos(x)**.

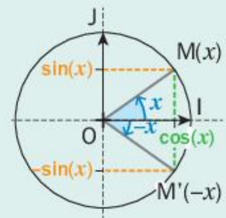
Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

Propriétés (admises)

- Pour tout nombre réel x :

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\text{et } \cos(-x) = \cos(x).$$

On dit que la fonction **sinus** est **impaire** et que la fonction **cosinus** est **paire**.



- Pour tout nombre réel x :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**.

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

Étude et courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

En tenant compte de la parité et de la périodicité des fonctions sinus et cosinus, il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur π ; on choisit l'intervalle $[0 ; \pi]$.

- La fonction **sinus** est **croissante** sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, puis **décroissante** sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

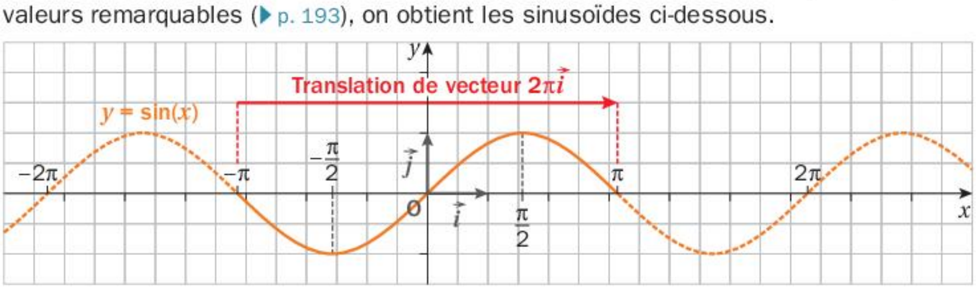
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de la fonction sinus	0 ↗	1	↘ 0

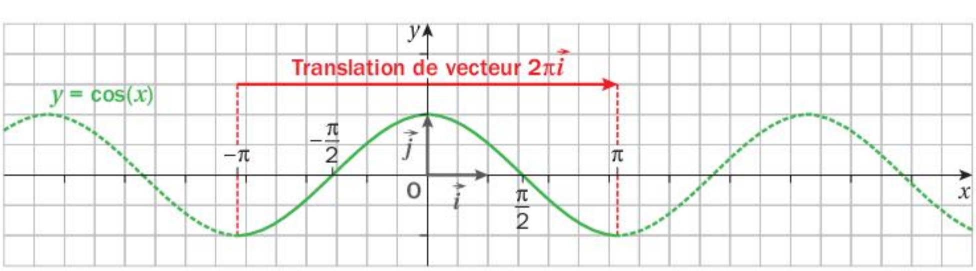
- La fonction **cosinus** est **décroissante** sur $[0 ; \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de la fonction cosinus	1 ↘	0	↘ -1

• Le sens de variation des fonctions sinus et cosinus se retrouve par **lecture sur le cercle trigonométrique**.
• La **parité** et la **périodicité** permettent d'obtenir les variations des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les propriétés de parité et de périodicité de ces fonctions, ainsi que les valeurs remarquables (▶ p. 193), on obtient les sinusoïdes ci-dessous.





La fonction **sinus** est **impaire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** : on obtient chaque courbe sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

La fonction **cosinus** est **paire** : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Vidéo
Se repérer sur le cercle trigonométrique
hatier-clic.fr/ma1195

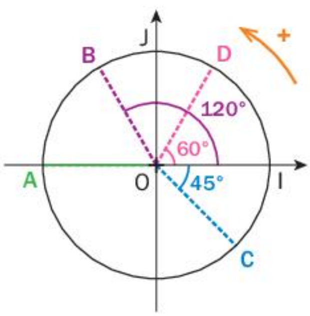
1 Se repérer sur le cercle trigonométrique

OBJECTIF 1
Exploiter le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants associés, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels indiqués.

a. $A(\pi)$ **b.** $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **c.** $C\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **d.** $D\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

Solution



a. Le nombre réel π correspond à une longueur d'arc sur le cercle trigonométrique égale à un demi-périmètre, soit à un angle au centre de 180°.
On place donc le point A tel que $\boxed{\widehat{IOA} = 180°}$.

Le périmètre du cercle trigonométrique est 2π.

b. Le nombre réel $\frac{2\pi}{3}$ correspond à une longueur d'arc sur le cercle égale à $\frac{2\pi}{3}$.
On utilise la proportionnalité pour déterminer l'angle au centre correspondant.

Angle	360°	120°
Longueur d'arc	2π	$\frac{2\pi}{3}$

À partir de I, on tourne sur le cercle trigonométrique dans le sens direct et on place B tel que $\boxed{\widehat{IOB} = 120°}$.

Le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

c. Le nombre réel $-\frac{\pi}{4}$ correspond à une longueur d'arc sur le cercle égale à $\frac{\pi}{4}$.

À l'aide de la proportionnalité, on obtient $\widehat{IOC} = \dfrac{360 \times \frac{\pi}{4}}{2\pi} = 45°$.
À partir de I, on place C tel que $\boxed{\widehat{IOC} = 45°}$ dans le sens indirect.

$-\frac{\pi}{4}$ est un nombre réel négatif, donc on tourne dans le sens indirect (sens des aiguilles d'une montre).

d. $-\frac{11\pi}{3} = -\frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -4\pi + \frac{\pi}{3}$. Les nombres réels $-\frac{11\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont donc associés au même point sur le cercle trigonométrique.

-4π correspond à 2 tours complets en tournant dans le sens indirect sur le cercle trigonométrique.

On obtient $\widehat{IOD} = \dfrac{360 \times \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 60°$.
À partir de I, on place D tel que $\boxed{\widehat{IOD} = 60°}$ dans le sens direct.

Application

9 Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants associés, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels indiqués.

a. $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **b.** $B\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **c.** $C\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ **d.** $D\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **e.** $E\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

f. $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **g.** $G\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ **h.** $H\left(-\frac{6\pi}{3}\right)$ **i.** $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ **j.** $N\left(\frac{21\pi}{2}\right)$

10 Les nombres réels suivants sont-ils associés au même point sur le cercle trigonométrique ?

a. $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{7\pi}{3}$. **b.** $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{21\pi}{4}$.

11 Citer un nombre réel positif et un nombre réel négatif associés au même point sur le cercle trigonométrique que :

a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $\frac{4\pi}{5}$ **c.** $-\frac{\pi}{4}$ **d.** $-\frac{\pi}{6}$

Les incontournables 35 à 40 p. 201

2 Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel

OBJECTIF 2
Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel

En utilisant les cosinus et sinus de valeurs remarquables (▶ p. 193), déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombres réels suivants.

a. $\frac{9\pi}{4}$ **b.** $-\frac{7\pi}{3}$

Solution

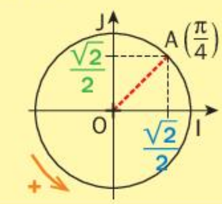
a. $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$.

Les nombres réels $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ de la droite numérique sont donc associés, par enroulement de cette droite, à un unique point A sur le cercle trigonométrique.

Donc $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

De la même façon, $\boxed{\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Le **cosinus** d'un nombre réel est égal à l'**abscisse** du point associé à ce nombre, et son **sinus** est égal à l'ordonnée du point.

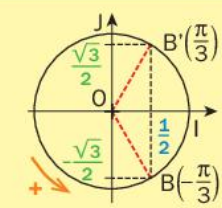


b. $-\frac{7\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$. Les nombres réels $-\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ sont donc associés à un unique point B sur le cercle trigonométrique.

Donc $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Or, le point B est le **symétrique par rapport à la droite (OI)** du point B' associé au nombre réel $\frac{\pi}{3}$. On en déduit que ces deux points ont la même abscisse, mais des ordonnées opposées.

Ainsi, les nombres réels associés à ces points ont le même cosinus mais des sinus opposés : $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.



Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\boxed{\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Pour vérifier les valeurs exactes trouvées, on peut utiliser la calculatrice (en mode **radian**).

Application

12 **a.** Sur le cercle trigonométrique, placer les points A, B, C et D associés respectivement aux nombres réels $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$ et $\frac{9\pi}{2}$.

b. Déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombres réels précédents.

13 Déterminer la valeur exacte de :

a. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ **b.** $\cos(-5\pi)$

c. $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **d.** $\cos\left(-\frac{4\pi}{12}\right)$

14 Déterminer la valeur exacte de :

a. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **b.** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

c. $\sin(-3\pi)$ **d.** $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

15 Les sinus et cosinus des nombres réels suivants sont-ils égaux ou opposés ?

a. $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$. **b.** $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

c. $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. **d.** $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{11\pi}{5}$.

Les incontournables 41 et 42 p. 201

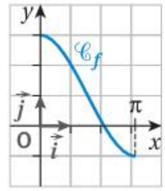
3 Traduire graphiquement la parité et la périodicité

OBJECTIF 3
Étudier les fonctions trigonométriques

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2\cos(x)$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

a. Étudier la parité de f, puis compléter $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$.

b. Étudier la périodicité de f, puis compléter $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[\pi\ ;\ 3\pi]$.



Solution

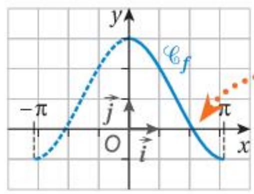
a. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et, pour tout nombre réel x, $f(-x) = 1 + 2\cos(-x)$.

Or, la fonction cosinus est paire donc $\cos(-x) = \cos(x)$.

Donc $f(-x) = 1 + 2\cos(x)$.

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc f est **paire**.

Comme f est paire, on complète $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



Pour tout nombre réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.

Pour tracer et compléter $\mathscr{C}_f$ avec précision, on peut utiliser des **valeurs remarquables** sur $[0\ ;\ \pi]$.
On a par exemple $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc f s'annule sur $[0\ ;\ \pi]$ pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
Et comme f est **paire**, f s'annule sur $[-\pi\ ;\ 0]$, pour $x = \dfrac{-2\pi}{3}$.

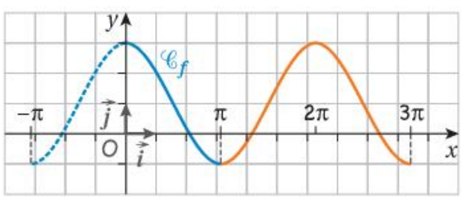
b. Pour tout nombre réel x, $f(x + 2\pi) = 1 + 2\cos(x + 2\pi)$.

Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π donc $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

D'où $f(x + 2\pi) = 1 + 2\cos(x)$.

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc f est **périodique de période 2π**.

Comme f est périodique de période 2π, on complète $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[\pi\ ;\ 3\pi]$ en répétant le motif par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.



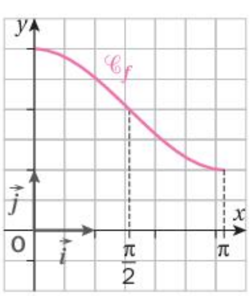
On peut aussi utiliser la calculatrice et la table de valeurs de la fonction pour trouver les coordonnées de certains points de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Application

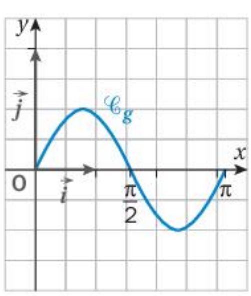
16 Pour chaque fonction :

- étudier sa parité, puis recopier et compléter sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$;
- étudier sa périodicité, puis compléter sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal sur l'intervalle $[\pi\ ;\ 3\pi]$.

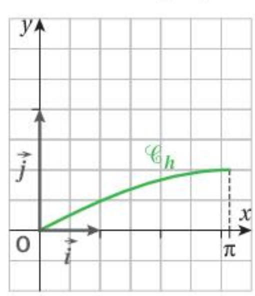
a. $f(x) = 2 + \cos(x)$



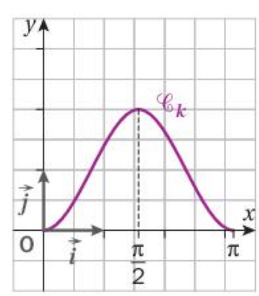
b. $g(x) = \sin(x)\cos(x)$



c. $h(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)$



d. $k(x) = 1 - \cos(2x)$



Les incontournables 43 et 44 p. 201

RETENIR L'ESSENTIEL...

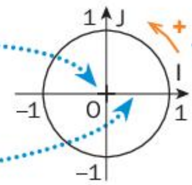
Fiche de cours

Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique

Centre O
Origine du repère

Rayon
$OI = OJ = 1$

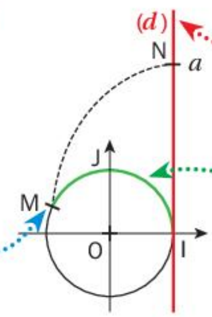


Orientation
sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre)

Enroulement de la droite numérique

À tout nombre réel a, on associe un unique point M du cercle trigonométrique par **enroulement de la droite** (d).

Au point M est associée une infinité de nombres réels de la forme $a + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

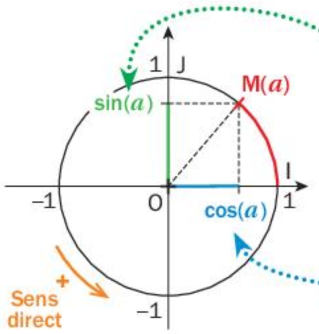


Droite numérique (d) : tangente au cercle trigonométrique au point I. L'abscisse de N sur (d) est a.

Si $a \in [0\ ;\ 2\pi[$, la longueur de l'**arc** $\widehat{IM}$ est **proportionnelle** à la mesure de **l'angle** $\widehat{IOM}$. La longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est égale à la longueur du segment [IN].

Cours 1 p. 192

Cosinus et sinus d'un nombre réel



Le point M a pour ordonnée $\sin(a)$.

Le point M a pour abscisse $\cos(a)$.

Valeurs remarquables

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(a)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$)

- $-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$
- $\left(\cos(a)\right)^2 + \left(\sin(a)\right)^2 = 1$
- $\cos(a + k \times 2\pi) = \cos(a)$
- $\sin(a + k \times 2\pi) = \sin(a)$

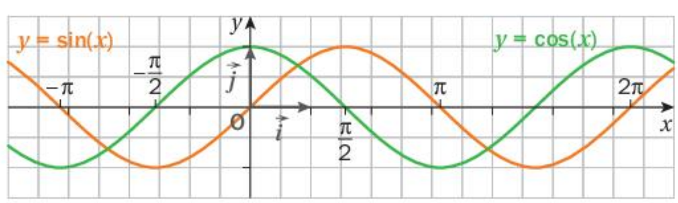
Cours 2 p. 193

Fonctions trigonométriques

$\forall x \in \mathbb{R}$,

fonction **sinus** : $x \mapsto \sin(x)$;

fonction **cosinus** : $x \mapsto \cos(x)$.



Propriétés ($x \in \mathbb{R}$)

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

La fonction **sinus** est **impaire**.

La fonction **cosinus** est **paire**.

- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π**.

Cours 3 p. 194

... ET FAIRE LE POINT

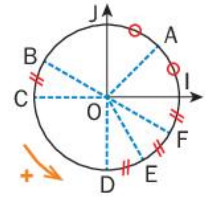
QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.
Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
17 Sur le cercle trigonométrique, un arc a pour longueur $\frac{2\pi}{3}$, ce qui correspond à un angle de :	60°	30°	120°	75°
18 Par enroulement de la droite numérique, si un point M du cercle trigonométrique est associé au nombre réel $\frac{\pi}{3}$, alors il est aussi associé au nombre réel :	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

Pour les questions 19 et 20
On considère le cercle trigonométrique ci-contre.



	A	B	C	D
19 Le point A du cercle trigonométrique est associé au nombre réel :	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{4}$
20 Le nombre réel $\frac{5\pi}{6}$ correspond au point :	F	E	D	B
21 Si $a \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$, alors :	$\cos(a) \geqslant 0$ et $\sin(a) \leqslant 0$.	$\cos(a) \leqslant 0$ et $\sin(a) \leqslant 0$.	$\cos(a) \leqslant 0$ et $\sin(a) \geqslant 0$.	$\cos(a) \geqslant 0$ et $\sin(a) \geqslant 0$.
22 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$	0	1	–1	0,5
23 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ldots$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
24 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = \ldots$	0	1	$\frac{1}{5}$	0,5
25 La fonction cosinus définie sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ est :	croissante.	décroissante.	croissante et décroissante.	ni croissante, ni décroissante.
26 Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus :	est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.	est symétrique par rapport à l'origine O du repère.	n'admet aucune symétrie.
27 Pour tout nombre réel x, $\sin(x + 2\pi) = \ldots$	$\sin(x)$	$-\sin(x)$	$-\sin(x) + 2\pi$	$\sin(x) + 2\pi$
28 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2\sin(x)$ est :	paire.	ni paire ni impaire.	impaire.	paire et impaire.
29 $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [-\pi\,;\pi]$ $\Leftrightarrow x = \ldots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

Corrigés p. 368

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

30 Parlons stratégies ! — À l'oral

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique.
Les nombres réels x et x' sont-ils associés au même point sur ce cercle ?
Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $x = \dfrac{\pi}{5}$ et $x' = -\dfrac{21\pi}{5}$.

b. $x = \dfrac{3\pi}{7}$ et $x' = \dfrac{17\pi}{7}$.

c. $x = \dfrac{5\pi}{5}$ et $x' = -\dfrac{7\pi}{6}$.

d. $x = \dfrac{-\pi}{12}$ et $x' = \dfrac{13\pi}{12}$.

Différentes stratégies pour reconnaître si deux nombres réels sont associés au même point du cercle trigonométrique

Stratégie 1
Je calcule l'angle correspondant à chaque réel en utilisant la proportionnalité.

Stratégie 2
Je cherche à savoir si la différence entre ces deux nombres réels est de la forme $k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stratégie 3
J'essaie d'écrire x' sous la forme $x + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

J'ai une **autre stratégie** !

31 Parlons stratégies ! — À l'oral

En utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants. Expliquer la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $\dfrac{5\pi}{2}$ **b.** $-\dfrac{\pi}{6}$ **c.** $-\dfrac{5\pi}{3}$ **d.** $-\dfrac{3\pi}{4}$ **e.** $\dfrac{17\pi}{2}$ **f.** $\dfrac{13\pi}{3}$ **g.** $-\dfrac{7\pi}{4}$ **h.** $\dfrac{29\pi}{3}$ **i.** $-\dfrac{42\pi}{6}$

Différentes stratégies pour déterminer la valeur exacte du cosinus et du sinus d'un nombre réel

Stratégie 1
Je cherche une valeur remarquable associée au même point sur le cercle trigonométrique.

Stratégie 2
Je cherche si ce nombre réel est de la forme $-a$ ou $\pi - a$ ou $\pi + a$ avec a valeur remarquable.

Stratégie 3
J'utilise la calculatrice en mode radian.

J'ai une **autre stratégie** !

32 En moins d'une minute !

Pour chaque nombre réel, proposer trois nombres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique.

a. $\dfrac{-\pi}{3}$ **b.** $\dfrac{5\pi}{4}$ **c.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **d.** $\dfrac{-7\pi}{6}$ **e.** $\dfrac{-2\pi}{7}$

33 En moins de deux minutes !

En utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

a. $\dfrac{-19\pi}{6}$ **b.** $\dfrac{-29\pi}{4}$ **c.** $\dfrac{18\pi}{2}$

d. $\dfrac{22\pi}{3}$ **e.** $-\dfrac{33\pi}{3}$ **f.** $\dfrac{45\pi}{10}$

34 En moins de trois minutes !

Dans chaque cas, déterminer le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.

a. $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

c. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in [0 ; \pi]$.

d. $\cos(x) = -1$ et $x \in [-\pi ; 3\pi]$.

e. $\cos(2x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $x \in [-\pi ; \pi[$.

f. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ et $x \in [-\pi ; \pi[$.

g. $2\cos(x) - \sqrt{3} \leqslant 0$ et $x \in [0 ; 2\pi[$.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Se repérer sur le cercle trigonométrique

Calculer la longueur d'un arc de cercle

35 **1.** Quelle est la longueur d'un arc de cercle :
a. de rayon 3 cm et d'angle au centre 45° ?
b. de rayon 3 cm et d'angle au centre 120° ?

2. Quelle est la longueur d'un arc du cercle trigonométrique :
a. d'angle au centre 60° ?
b. d'angle au centre 270° ?

36 Donner un nombre réel positif auquel chacun des points suivants du cercle trigonométrique peut être associé.
a. M tel que $\widehat{IOM} = 36°$.
b. N tel que $\widehat{ION} = 200°$.
c. P tel que $\widehat{IOP} = 150°$.

Placer un point sur le cercle trigonométrique

37 Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D et E associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants.

a. 2π **b.** $\frac{3\pi}{4}$ **c.** $\frac{7\pi}{6}$ **d.** $-\frac{2\pi}{3}$ **e.** $\frac{\pi}{2}$

38 Construire à la règle et au compas sur le cercle trigonométrique les points F, G, H et K associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants.

a. $\frac{2\pi}{3}$ **b.** $-\frac{3\pi}{4}$ **c.** $-\frac{\pi}{6}$ **d.** $\frac{5\pi}{6}$

Aide Pour placer le nombre réel $\frac{\pi}{3}$, on peut tracer un triangle équilatéral.

39 **a.** Placer sur le cercle trigonométrique le point M associé au nombre réel $-\frac{13\pi}{3}$.
b. Quel nombre réel de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est associé au point M sur le cercle trigonométrique ?

40 Les nombres réels suivants sont-ils associés au même point sur le cercle trigonométrique ?

a. $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{17\pi}{4}$. **b.** $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. **c.** $-\frac{\pi}{10}$ et $\frac{19\pi}{10}$.
d. $\frac{29\pi}{6}$ et $-\frac{7\pi}{6}$. **e.** $\frac{18\pi}{5}$ et $-\frac{6\pi}{5}$. **f.** $\frac{25\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel

41 **a.** Préciser les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

π $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$

b. À l'aide du cercle trigonométrique, en déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

$-\pi$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{6}$ $\frac{2\pi}{3}$

42 **a.** Avec la calculatrice en mode radian, calculer le cosinus et le sinus des nombres réels suivants.

$\frac{3\pi}{10}$ $\frac{2\pi}{5}$ $\frac{\pi}{12}$ $-\frac{\pi}{7}$

On donnera la valeur exacte ou une valeur approchée au centième.
b. Même question pour les nombres réel suivants.

$\frac{4\pi}{9}$ $\frac{5\pi}{11}$ $\frac{13\pi}{7}$ $-\frac{2\pi}{5}$

Traduire graphiquement la parité et la périodicité

43 Recopier et compléter les phrases suivantes.
a. La courbe représentative de la fonction cosinus dans le plan muni d'un repère orthogonal est symétrique par rapport à ... .
b. La courbe représentative de la fonction sinus dans le plan muni d'un repère orthogonal est symétrique par rapport à ... .

44 **Vrai ou faux ?**
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
a. « La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi ; 0]$. »
b. « La fonction sinus est croissante sur $[0 ; \pi]$. »
c. « Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, la fonction cosinus admet un unique minimum. »
d. « La fonction cosinus est croissante sur $[0 ; 2\pi]$. »
e. « Sur l'intervalle $[0 ; 3\pi]$, la fonction sinus admet un unique maximum. »
f. « La fonction sinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$. »

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Exploiter le cercle trigonométrique

Savoir-faire 1 p. 195

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

45 **1. a.** Par combien faut-il multiplier $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir 2π ? pour obtenir 3π ?

b. Par combien faut-il multiplier $\frac{\pi}{3}$ pour obtenir 2π ? pour obtenir 3π ?

2. Compléter par un nombre entier naturel.

a. $5\pi = \pi + \ldots \times 2\pi$

b. $27\pi = \pi + \ldots \times 2\pi$

c. $59\pi = -\pi + \ldots \times 2\pi$

d. $2\,019\pi = -\pi + \ldots \times 2\pi$

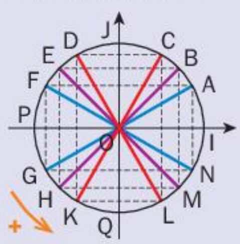
46 **1.** Quels sont les points du cercle trigonométrique ci-dessous associés aux nombres réels suivants ?

a. $\frac{\pi}{3}$ **b.** $-\frac{\pi}{2}$

c. 4π **d.** $-\pi$

e. $-\frac{\pi}{4}$ **f.** $\frac{13\pi}{6}$

g. $-\frac{2\pi}{3}$ **h.** $\frac{5\pi}{4}$



2. Quel nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ peut être associé à chacun des points suivants :

B ; D ; E ; F ; G ; H ; L ; N ?

47 **Vrai ou faux ?**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique de centre O.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. « Les nombres réels 0 et π sont associés au même point sur le cercle trigonométrique. »

b. « Si le point M est associé au nombre réel $\frac{2\pi}{5}$, alors $\widehat{IOM} = 72°$. »

c. « Les nombres réels $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{7\pi}{6}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique. »

d. « Le nombre réel de l'intervalle $[2\pi\,;\,4\pi[$ qui est associé au même point que $-\frac{\pi}{6}$ est $\frac{11\pi}{6}$. »

e. « Si M est le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel $\frac{\pi}{4}$, alors il est associé à tous les nombres réels de la forme $\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$, k étant un nombre entier relatif. »

f. « Si le point P du cercle trigonométrique est tel que $\widehat{IOP} = 103°$, alors il est associé au nombre réel $\frac{7\pi}{12}$. »

48 Placer sur le cercle trigonométrique les points L, M, N, P et Q associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels donnés en **1** et en **2**.

1. a. 13π **b.** $\frac{3\pi}{5}$ **c.** $-\frac{11\pi}{4}$ **d.** -26π **e.** $-\frac{16\pi}{3}$

2. a. $\frac{101\pi}{2}$ **b.** $\frac{37\pi}{2}$ **c.** $-\frac{7\pi}{6}$ **d.** $\frac{28\pi}{3}$ **e.** $-\frac{15\pi}{7}$

49 Placer sur le cercle trigonométrique les point A, B, C et D associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels donnés en **1** et en **2**.

1. a. $\frac{50\pi}{3}$ **b.** $\frac{19\pi}{6}$ **c.** $-\frac{25\pi}{4}$ **d.** 151π

2. a. $\frac{25\pi}{2}$ **b.** $-\frac{43\pi}{3}$ **c.** $\frac{2\pi}{15}$ **d.** $-\frac{7\pi}{10}$

50 Un fil est enroulé autour d'une bobine de 1 cm de rayon. La longueur du fil est $\frac{2019\pi}{2}$ cm.

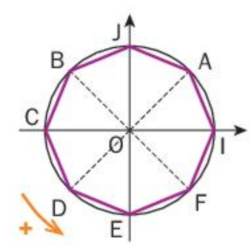
a. Combien a-t-on fait de tours entiers de fil sur la bobine ?

b. Quelles positions ont les deux extrémités du fil sur la face circulaire vue en coupe ? Faire une figure.

51 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a. IAJBCDEF est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

Donner un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ associé à chacun des sommets de cet octogone.



b. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier IGHKLM de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique.

52 **Vrai ou faux ?**

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a. « Chaque point du cercle trigonométrique est associé à un unique nombre réel. »

b. « Deux nombres réels opposés sont associés au même point sur le cercle trigonométrique. »

53 **a.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 5 cm, puis placer un point M sur $\mathscr{C}$.

b. N est un point de $\mathscr{C}$ tel que l'arc $\overset{\frown}{MN}$ mesure 20 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MON}$ arrondie au degré, puis placer le point N.

c. Placer le point P de $\mathscr{C}$ tel que P est le symétrique de N par rapport à O. En déduire la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MP}$ arrondie au dixième de cm.

Fichier Python
Ex. 56
Manuel numérique enseignant

54 Trouver l'intrus !

Dans chaque cas, parmi les quatre nombres réels donnés, trois seulement sont associés au même point sur le cercle trigonométrique. Précisez lesquels, puis placer ce point sur le cercle trigonométrique.

a.	-4π	0	6π	-7π
b.	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$
c.	$-\frac{8\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Maths à l'oral
Présentez oralement chaque étape de votre raisonnement.

55 IN ENGLISH ▸ p. 381

Alex invited eight friends to share, in a fair way, a giant pizza 30 cm in diameter with him.

• Calculate the perimeter and the area of each slice of pizza.

56 ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel.

```
Si x ⩾ 0
alors
    Tant que x > π
        x ← x − 2π
    Fin Tant que
sinon
    Tant que x ⩽ −π
        x ← x + 2π
    Fin Tant que
Fin Si
```

1. Quel nombre réel cet algorithme affiche-t-il en sortie si on saisit pour x la valeur :

a. $\frac{11\pi}{4}$? **b.** $-\frac{5\pi}{3}$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Programmer cet algorithme en Python, puis tester le programme pour les valeurs suivantes.

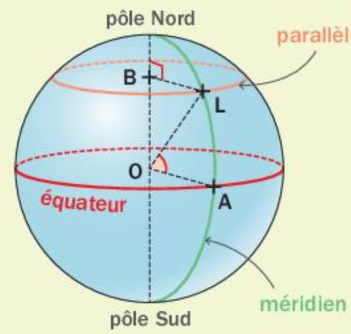
a. $-\frac{21\pi}{5}$ **b.** $\frac{36\pi}{7}$

★★

57 De Londres à l'équateur

On assimile la Terre à une sphère de centre O et de rayon 6 371 km.

Rappel L'équateur et les méridiens sont des grands cercles de la sphère terrestre.
Un parallèle est un cercle de la sphère terrestre parallèle à l'équateur.



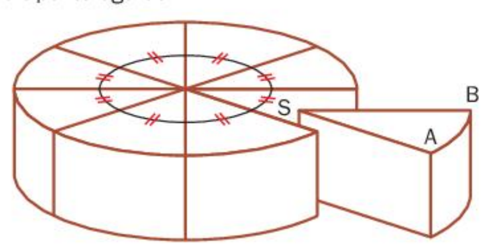
a. Calculer la longueur, arrondie au km, de l'équateur.
En déduire la longueur d'un méridien terrestre.

b. Le point L représente la ville de Londres située sur le 50ᵉ parallèle Nord.
En déduire, au degré près, la latitude de Londres, c'est-à-dire la mesure de l'angle $\widehat{LOA}$, suivie de l'indication Nord ou Sud.

c. Calculer la plus courte distance, arrondie au km, sur la sphère terrestre entre Londres et l'équateur.

58 Gâteau à partager

Un pâtissier a l'habitude de confectionner un gâteau de forme cylindrique de rayon 10 cm et de hauteur 6 cm. Ce gâteau, prévu pour huit personnes, peut être découpé en huit parts égales.



1. a. Calculer la mesure de l'angle (en degrés) du secteur circulaire ASB correspondant à une part.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du secteur circulaire ASB.

2. Pour l'anniversaire d'Éloïse, ses parents commandent un gâteau pour dix personnes.
Le pâtissier souhaite conserver la même forme et la même hauteur que celles du gâteau pour huit.
Quel doit être le rayon du disque de base (en cm) du gâteau pour dix personnes pour qu'il puisse être partagé en dix parts égales de même volume que celles du gâteau pour huit personnes ? Arrondir le rayon au millimètre.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel

Savoir-faire 2 p. 196

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

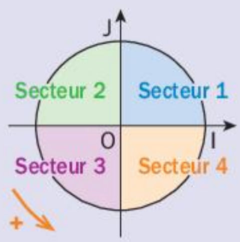
59 Donner la valeur exacte du cosinus et du sinus de chacun des nombres réels suivants.

a. $\frac{\pi}{3}$ **b.** $-\frac{\pi}{2}$ **c.** $\frac{7\pi}{3}$ **d.** $-\pi$

e. $-\frac{\pi}{4}$ **f.** $\frac{5\pi}{6}$ **g.** 0 **h.** $\frac{3\pi}{4}$

i. $\frac{5\pi}{3}$ **j.** $\frac{3\pi}{2}$ **k.** $\frac{7\pi}{6}$ **l.** $-\frac{2\pi}{3}$

60 Le cercle trigonométrique ci-contre est découpé en quatre secteurs.

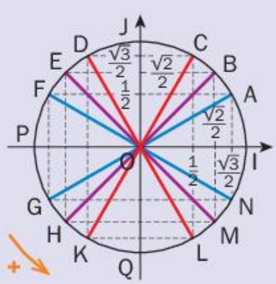


a. Dans quel secteur se situe un point ayant une abscisse positive et une ordonnée négative ?

b. Dans quel secteur se situe le point associé à un nombre réel a de cosinus négatif et de sinus positif ?

c. Dans quel secteur se situe le point associé à un nombre réel b de cosinus et sinus négatifs ?

61 On considère le cercle trigonométrique ci-contre.



1. a. Quels sont les points de ce cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$?

À quels nombres réels sont-ils associés ?

Déterminer le sinus de ces nombres réels.

b. Reprendre la question précédente pour les points d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. Quels sont les points de ce cercle d'ordonnée $\frac{1}{2}$?

À quels nombres réels sont-ils associés ?

Déterminer le cosinus de ces nombres réels.

b. Reprendre la question précédente pour les points d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

62 **a.** Quelle est la valeur exacte du sinus d'un nombre réel a tel que :

$$\cos(a) = 0{,}1 \quad \text{et} \quad 0 < a < \pi \text{ ?}$$

b. Quelle est la valeur exacte du cosinus d'un nombre réel b tel que :

$$\sin(b) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ ?}$$

63 **QCM**

1. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est :

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$

2. La valeur exacte de $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ est :

a. -1 **b.** 1 **c.** $\frac{1}{2}$

3. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ est :

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $-\frac{1}{2}$.

4. $\sin(x) = 0{,}5$ pour $x = \ldots$:

a. $\frac{\pi}{3}$ **b.** $\frac{\pi}{6}$ **c.** $\frac{5\pi}{6}$

5. Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi[$, l'équation $\cos(x) = 0$ admet exactement :

a. une solution. **b.** deux solutions. **c.** aucune solution.

64 En utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

$\frac{15\pi}{3}$ $-\frac{9\pi}{4}$ $-\frac{7\pi}{6}$

$-\frac{5\pi}{2}$ $-\frac{28\pi}{3}$ $\frac{2\,018\pi}{4}$

65 En utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivants.

$\frac{101\pi}{6}$ $\frac{70\pi}{3}$ $-\frac{25\pi}{4}$ $-\frac{15\pi}{2}$

$\frac{43\pi}{4}$ $\frac{19\pi}{6}$ $-\frac{21\pi}{2}$ $\frac{1981\pi}{3}$

66 **a.** Calculer la valeur exacte des nombres réels suivants.

$$C = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$S = \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

b. Comparer les nombres réels C et S.

Justifier ce résultat.

67 Calculer chaque expression ; donner si nécessaire le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

a. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

c. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **d.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi)$

Fichier Python
Ex. 70
Manuel numérique enseignant

★★

68 De la réponse à la question (et vice-versa)

Aïssa a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

> Pour tout nombre réel x, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$.
> Or, $\cos(x) = 0{,}6$ avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$,
> d'où $(\sin(x))^2 = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64$.
> Donc :
> $\sin(x) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$ ou $\sin(x) = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$.
> En utilisant la calculatrice en mode radian,
> j'obtiens $x \approx 0{,}927$ ou $x \approx -0{,}927$.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Aïssa.
b. Identifier et corriger les erreurs commises par Aïssa.

Maths à l'oral
Discutez de la réponse que vous apporteriez à l'énoncé proposé.

69 De la méthode à son application

a. Rappeler la relation liant le sinus et le cosinus d'un nombre réel a.
b. Déduire de la question **a** la valeur exacte de $\sin(a)$ pour un nombre réel a compris entre 0 et π et tel que $\cos(a) = 0{,}2$.
c. À l'aide de la calculatrice en mode radian, donner la valeur de a en radians, arrondie au millième

70 ALGORITHMIQUE

a. Exprimer le cosinus d'un nombre réel a, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, en fonction de son sinus.
b. Écrire un algorithme qui, connaissant le sinus de ce nombre réel, affiche la valeur de son cosinus.
c. Coder cet algorithme en Python, puis le tester avec $\sin(a) = 0{,}5$.

71 IN ENGLISH ▶ p. 381

Irina got the following results using her calculator. Are they accurate? Justify.

a.
```
sin(-π/6)
                -1/2
```

b.
```
cos(3π/4)
        0.9991545541
```

72

1. x est un nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{4}$.
a. Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$.
b. À l'aide de la calculatrice en mode radian, déterminer une valeur approchée de x au millième.
c. Vérifier à l'aide de la calculatrice le résultat obtenu à la question **a**.
2. Reprendre la question **1** pour calculer la valeur exacte de $\cos(x)$ avec x nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -0{,}4$.

73

Jusqu'en 2012 le diamètre des roues des VTT Adulte était de 26 pouces. Depuis 2015, tous les constructeurs de VTT ont abandonné ce diamètre. Les vélos sont maintenant équipés de roues à 27,5 pouces ou de roues à 29 pouces. Lorsque la roue de rayon R rencontre un obstacle de hauteur h, le cycliste a un effort à produire pour franchir cet obstacle. Plus l'angle α est petit, moins l'effort est important.

a. Pour une hauteur h de 8 pouces, calculer la mesure de l'angle α (en degrés) avec chacune des trois mesures de diamètre.
b. Interpréter les résultats obtenus.

Pour les exercices 74 et 75
Dans chaque cas, déterminer le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.

74

a. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
b. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
c. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$.
d. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.
e. $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x \in [0\,;\pi]$.
f. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

75

a. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi\,;\pi[$.
b. $1 - \sin(2x) = 0$ et $x \in [-\pi\,;\pi[$.
c. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi\,;0[$.
d. $\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.
e. $2(\cos(x))^2 - 1 = 0$ et $x \in [-\pi\,;\pi[$.

76 Vrai ou faux ? LOGIQUE

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
a. « Si $\sin(a) = 0$, alors $\cos(a) = 1$. »
b. « Si $\cos(a) = 0{,}5$ alors $\sin(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. »
c. « $\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^2 = 1$. »
d. « Si $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-\pi\,;0]$. »

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Étudier les fonctions trigonométriques

Savoir-faire 3 p. 197

Questions FLASH

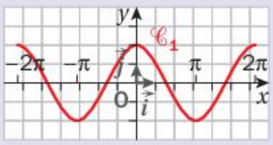
Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Pour les exercices 77 et 78

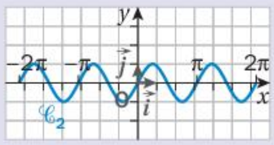
$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sont les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

77 Dans chaque cas, émettre une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.

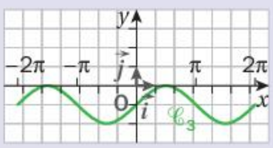
a.



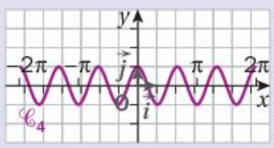
b.



c.



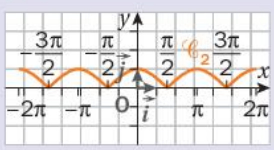
d.



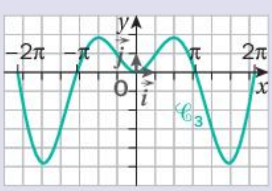
78 Dans chaque cas, émettre une conjecture quant à la périodicité de la fonction représentée. Justifier.

a.

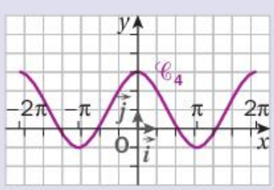
b.



c.



d.



79 Recopier et compléter le tableau de variations :

a. de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$;

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	…	…	2π
Variations de $x \mapsto \sin(x)$	0	…	1	−1	0

b. de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$.

x	$-\pi$	…	π	2π
Variations de $x \mapsto \cos(x)$	−1	1	…	…

Pour les exercices 80 et 81

De la conjecture à sa démonstration

Pour chacune des fonctions, définie sur $\mathbb{R}$:

1. tracer sa courbe représentative ;

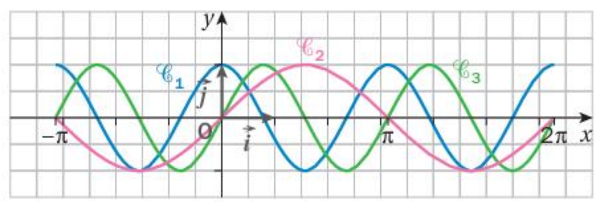
2. émettre une conjecture quant à la parité et la périodicité de la fonction ;

3. valider ou corriger les conjectures émises.

80 **a.** $f : x \mapsto \cos(2x)$ **b.** $g : x \mapsto \sin(3x)$
c. $h : x \mapsto 2\sin(x) - 1$ **d.** $k : x \mapsto x - \cos(x)$

81 **a.** $f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ **b.** $g : x \mapsto (\cos(x))^2$
c. $h : x \mapsto (\sin(x))^2$ **d.** $k : x \mapsto x + \sin(x)$

82 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont les courbes représentatives de fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$.



- Associer à chaque courbe l'expression de la fonction qu'elle représente parmi celles ci-dessous.

$f : x \mapsto \cos(2x)$ $g : x \mapsto \sin(2x)$ $h : x \mapsto \sin(x)$

83 **Vrai ou faux ?** LOGIQUE

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. a. « Si, pour tout nombre réel x, $f(x + 2\pi) = f(x)$, alors $f(x + 4\pi) = f(x)$. »

b. « La réciproque de la proposition précédente est vraie. »

2. « Si, pour tout nombre réel x, $f(x) = \cos(\pi x + 5)$, alors $f(x + 2) = f(x)$. »

84 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos(x) - 1.$$

a. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

d. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

85 **QCM**

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x$ est :

a. paire. **b.** impaire. **c.** ni paire ni impaire.

2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\cos(x)+2}$ est :

a. paire. **b.** impaire. **c.** ni paire ni impaire.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 90
Manuel numérique enseignant

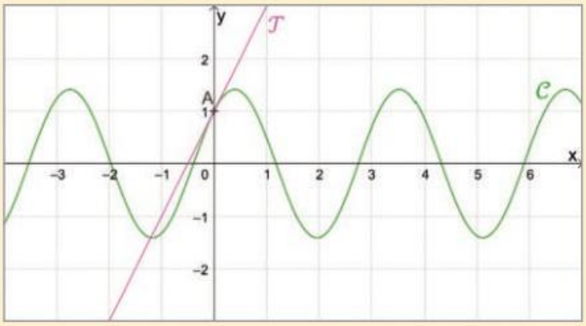
86 Avec des logiciels

w est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$w(t) = \sqrt{2}\sin(at + b)$$

où a et b sont deux nombres réels avec $0 \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de w, ainsi que sa tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 0 d'équation $y = 2t + 1$:



Puis, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu l'affichage ci-dessous.

Dérivée(sin(a · t + b), t)
→ **a cos(a t + b)**

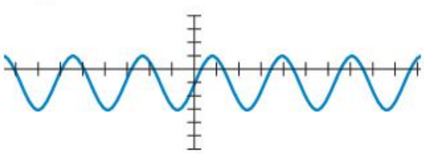
a. Déterminer la valeur de chacun des nombres réels a et b.

b. Démontrer que la fonction w est périodique de période π.

Maths à l'oral
Présentez oralement votre démarche.

87 IN ENGLISH p. 381

The function f is such that $f(x) = 2\sin(2x) - 1$, where $x \in \mathbb{R}$. The graph of this function is shown below.

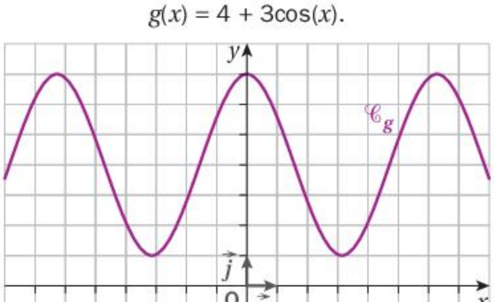


- Show that the point A(0 ; –1) is the center of symmetry of the function.

88

Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4 + 3\cos(x).$$



a. À l'aide de ce graphique, émettre une conjecture sur la périodicité de g et sur un encadrement de $g(x)$ à l'unité.

b. Valider ou corriger les conjectures émises.

89

On considère la fonction tangente, notée tan, définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a déterminé la dérivée de la fonction tangente :

Dérivée(tan(x))
→ **tan²(x) + 1**

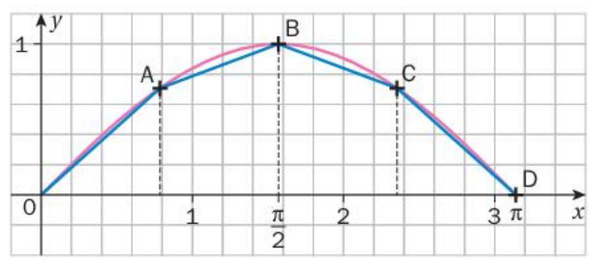
Dresser le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Tracer la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

90 Longueur d'un arc

Les architectes s'appuient sur des fonctions pour modéliser les courbes de certains bâtiments et calculer des longueurs d'arcs.

Pour créer une nouvelle gare, on cherche à calculer la longueur l de l'arc $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$.



Comme sur la figure ci-dessus, on a subdivisé l'intervalle $[0 ; \pi]$ en quatre intervalles de même longueur, et placé les points A, B, C et D sur l'arc $\mathscr{C}$ pour que la ligne brisée bleue de longueur l_4 approche la longueur de l'arc $\mathscr{C}$.

a. TICE À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter l'arc $\mathscr{C}$ sur $[0 ; \pi]$. Construire des lignes brisées de longueurs l_2, l_3 et l_4 en subdivisant l'intervalle $[0 ; \pi]$ respectivement en deux, trois et quatre intervalles de même longueur.

Afficher les longueurs l_2, l_3 et l_4 des lignes brisées.

b. Calculer les valeurs exactes de l_2, l_3 et l_4.

c. ALGORITHMIQUE Pour améliorer l'approche de l, on subdivise $[0 ; \pi]$ en n (entier naturel non nul) intervalles de même longueur et on note l_n la longueur de la ligne brisée construite.

Proposer un algorithme qui, à partir d'une valeur de n, affiche une valeur approchée de l_n.

d. PROGRAMMATION python

Programmer cet algorithme en Python pour donner une valeur approchée de l_{10}, l_{100} et $l_{1\,000}$.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Les démonstrations rédigées

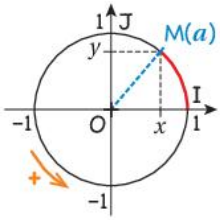
Propriété

Pour tout nombre réel a, $-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1$.

OBJECTIF : on souhaite encadrer le cosinus et le sinus d'un nombre réel.

Démonstration

- a est un nombre réel.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M du cercle trigonométrique associé au nombre réel a.
On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M dans ce repère.



- Par définition (▶ Cours p. 193), on a :

$$x = \cos(a) \quad \text{et} \quad y = \sin(a).$$

- Le cercle trigonométrique étant de rayon 1 et de centre O, on peut en déduire que l'abscisse x du point M est un nombre réel compris entre -1 et 1, et l'ordonnée y du point M est également un nombre réel compris entre -1 et 1.
Ainsi, pour tout nombre réel a :

$$-1 \leqslant \cos(a) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin(a) \leqslant 1. \blacksquare$$

Le principe

1. On introduit le **point M du cercle trigonométrique** associé au nombre réel a.
2. On utilise la **définition du cosinus et du sinus**.
3. On utilise la **définition du cercle trigonométrique** pour encadrer l'abscisse et l'ordonnée du point M.

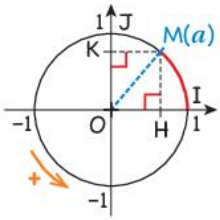
Propriété

Pour tout nombre réel a, $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$.

OBJECTIF : on souhaite établir une relation entre le cosinus et le sinus d'un nombre réel.

Démonstration

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M du cercle trigonométrique associé au nombre réel a, le point H de la droite (OI) tel que le triangle OHM est rectangle en H et le point K de la droite (OJ) tel que le triangle OKM est rectangle en K.



- Le triangle OHM est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\text{OH}^2 + \text{HM}^2 = \text{OM}^2 \Leftrightarrow \text{OH}^2 + \text{OK}^2 = 1^2$$

- Or, par définition (▶ Cours p. 193) :

$$\text{OH} = |\cos(a)|$$
$$\text{et OK} = |\sin(a)|.$$

Ainsi, pour tout nombre réel a :

$$\text{OH}^2 + \text{OK}^2 = 1^2 \Leftrightarrow (\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1. \blacksquare$$

Le principe

1. On introduit le **point M du cercle trigonométrique** associé au nombre réel a et ses projetés orthogonaux sur (OI) et (OJ).
2. On applique le **théorème de Pythagore** et on utilise la **définition du cercle trigonométrique** :
OM = OI = 1.
3. On utilise la **définition du cosinus et du sinus**.

Vidéo
Démonstration : calcul de valeurs particulières de sinus et cosinus
hatier-clic.fr/ma1209

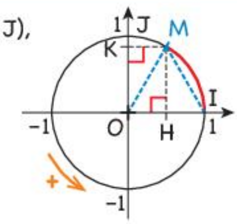
La démonstration à compléter

91 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter la démonstration permettant de déterminer :

a. la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

Démonstration

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ radians.
H est le point du segment [OI] tel que le triangle OMH est … en H.



- Comme O… = OI = … unité, le triangle MOI est isocèle en O.
De plus, $\widehat{IOM}$ mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians, le triangle MOI est … .
- On en déduit que la hauteur (HM) est aussi la … issue du sommet M ; H est ainsi le … du segment … . Donc OH = $\frac{\dots}{2}$.
- Or, OH = $\dots\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\dots}{\dots}$. ■

1 On introduit le point M du cercle trigonométrique associé au nombre réel $\frac{\pi}{3}$ et son projeté orthogonal sur (OI).

2 On définit la **nature du triangle** MOI.

3 On utilise une **propriété d'un triangle équilatéral**.

4 On utilise la **définition des coordonnées d'un point du cercle trigonométrique**.

b. la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Pour tout nombre réel a, $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$,
donc $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + (\sin(\dots))^2 = 1$.
- Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots$ donc $\left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2 + (\sin(\dots))^2 = 1$.
D'où $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$.
Or $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \dots 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{\dots}{\dots}$. ■

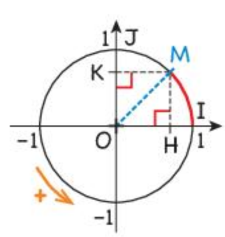
1 On utilise la **propriété liant le cosinus et le sinus** d'un nombre réel.

2 On utilise le **résultat précédent** : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Démonstrations Vers le BAC

Pour les exercices 92 et 93, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

92 M est le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel $\frac{\pi}{4}$. H est le point du segment [OI] tel que le triangle OMH est rectangle en H. K est le point du segment [OJ] tel que le triangle OMK est rectangle en K.



a. Quelle est la nature du triangle OMH ? Justifier.

b. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

c. Justifier que les distances OH et OK sont égales.

d. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

93 Placer le point N du cercle trigonométrique tel que $\widehat{ION} = \frac{\pi}{6}$ radians, puis le point N', symétrique de N par rapport à la droite (OI).

a. Quelle est la nature du triangle ONN' ? Justifier.

b. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

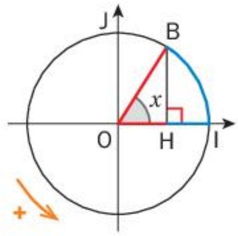
Aide Pour démontrer que la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut utiliser le théorème de Pythagore ou la trigonométrie.

c. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 96
Manuel numérique enseignant

94 **Calculer** | TICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on a représenté le cercle trigonométrique de centre O.



B est un point du cercle trigonométrique associé à la mesure d'angle x avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

H est le pied de la hauteur issue de B du triangle IOB.

a. Exprimer la longueur l_1 du chemin rouge (BO + OH) en fonction de x.

b. Exprimer la longueur l_2 du chemin bleu ($\overset{\frown}{BI}$ + IH) en fonction de x.

c. Pour quelle valeur du nombre réel x la longueur du chemin rouge est-elle égale à celle du chemin bleu ? On donnera une valeur approchée de x à 10^{-2}.

Aide On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre une équation sur un intervalle donné.

95 **Vrai ou faux ?** LOGIQUE

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. « Il existe un nombre réel x tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. »

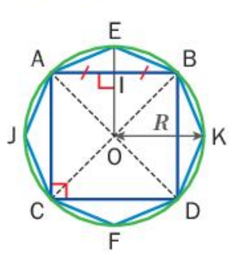
b. « Pour tout nombre réel x, on a $(\cos(x))^2 \in [0\ ;\ 1]$. »

96 **Histoire des mathématiques**

Vers 250 avant J.-C., pour **trouver une approximation de π**, Archimède a encadré le périmètre d'un cercle par les périmètres de polygones réguliers de même nature inscrits et circonscrits à ce cercle.

1ʳᵉ méthode : avec le théorème de Pythagore

1. ABCD est un carré de côté c_1 inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R comme sur la figure ci-contre.



a. Exprimer c_1 en fonction de R en utilisant le théorème de Pythagore.

b. Exprimer le périmètre p_1 de ce carré en fonction de R.

c. Quelle valeur de R faut-il choisir pour que p_1 soit une approximation de π ?

2. On cherche à calculer le périmètre p_2 de l'octogone AEBKDFCJ de côté c_2 inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.

La médiatrice de [AB] coupe $\mathscr{C}$ en E et [AB] en I.

À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la longueur EI en fonction de AB et de R.

En déduire c_2, puis p_2, en fonction de c_1 et R.

3. PROGRAMMATION python

a. Écrire un algorithme qui permet d'obtenir le côté et le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans un cercle de rayon R ($n \geqslant 3$).

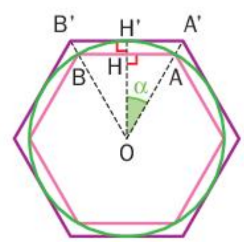
b. Programmer cet algorithme en Python.

c. **Chercher** | Exécuter ce programme et comparer les résultats obtenus avec ceux d'Archimède qui a trouvé $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

2ᵉ méthode : avec la trigonométrie

On cherche à encadrer la valeur de π par le périmètre p_n d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et le périmètre d'un polygone P_n à n côtés circonscrit à ce cercle (n pair).

a. Sur la figure ci-dessous, $n = 6$.



Calculer dans ce cas la mesure de l'angle α, en degrés, puis montrer que :

$$\text{AB} = 2\sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \text{A'B'} = 2\tan(\alpha).$$

En déduire p_6 et P_6.

b. Si on généralise à des polygones réguliers à n côtés (n pair), exprimer p_n et P_n en fonction de n.

c. TICE À l'aide d'un tableur, calculer les valeurs de p_n, P_n et $P_n - p_n$ pour n pair jusqu'à $n = 96$ (valeurs calculées par Archimède).

d. Que peut-on conclure au sujet de l'encadrement de π obtenu ?

Info

Depuis l'Antiquité, les mathématiciens ont cherché à déterminer avec le plus de précision possible le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle (▶ p. 342). Ce nombre a été nommé π.

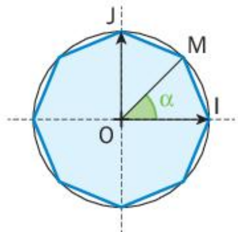
97 Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent :

- pour l'une, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$;
- pour l'autre, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

● Ces résultats sont-ils contradictoires ?

D'après Bac S métropole, sept. 2018.

98 **Représenter |** Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O. La figure ci-dessous représente un octogone.



a. Dans ce cas $n = 8$ et $\widehat{IOM} = \alpha = \dfrac{\pi}{4}$, calculer l'aire A_8 de cet octogone.

b. De façon générale, pour un polygone régulier à n côtés, on pose $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$.

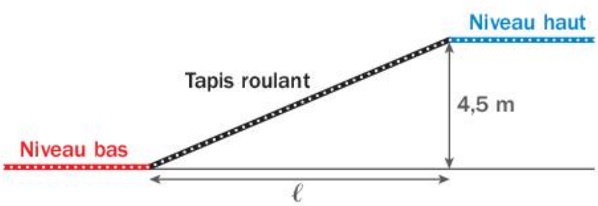
Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est égale à $A_n = \pi\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

c. À l'aide d'un outil numérique, représenter sur $[0\ ;\ \pi]$ la fonction f définie par $f(x) = \pi\dfrac{\sin(x)}{x}$.

d. À l'aide de la courbe représentative de f, si n devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.

99 **Le tapis roulant** En groupe

Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus, possède une vitesse de roulement de 0,8 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et une pente maximale de 10 %. La distance entre les deux niveaux est de 4,5 m et on note ℓ la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant.

- Donner un encadrement de la longueur ℓ pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser un logiciel ou la calculatrice.

Aide Chercher la définition du mot « pente » dans ce contexte.

100 **Vrai ou faux ?** LOGIQUE

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse ; justifier. Qu'en est-il de leur réciproque ?

a. « Si $a = b$ alors $\cos(a) = \cos(b)$. »

b. « Si $a \in \left[\dfrac{-\pi}{2}\ ;0\right]$ alors $\sin(a) < \cos(a)$. »

101 **Histoire des mathématiques**

1. **Communiquer |** Le mathématicien astronome grec **Hipparque de Nicée** (–190 - –120) a introduit la division du cercle en 360° et établi les premières **tables des cordes**.

a. Dans ses tables des cordes, quelle correspondance avec la longueur d'une corde d'un cercle, Hipparque de Nicée établit-il ? Qu'a-t-il également découvert au sujet de l'axe de rotation de la Terre ?

b. Dans quel ouvrage le mathématicien et astronome grec **Claude Ptolémée** (90 - 168) expose-t-il toute la trigonométrie de l'Antiquité ?

Quelles avancées pour la trigonométrie Claude Ptolémée a-t-il réalisées ?

Extrait d'une table des cordes de l'*Almageste*, BNF.

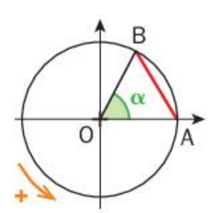
Maths à l'oral

Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

Ptolémée observant les astres.

2. Ptolémée a en particulier démontré que la longueur d'une corde [AB] d'un cercle de rayon 1 telle que $\widehat{AOB} = \alpha$ est $AB = 2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Démontrer ce résultat.



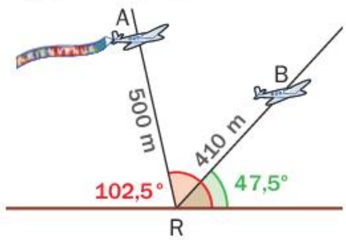
Aide Calculer la longueur d'une demi-corde en fonction de α.

Fichier Python
Ex. 102
Manuel numérique enseignant

102 Vu de la plage

Deux petits avions A et B se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer une banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage.

Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar R repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-contre.



Par arrêté municipal dans cette commune et pour des raisons de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à 300 m et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de 500 m.

1. Raisonner | Ces deux avions respectent-ils les distances de sécurité imposées ? Justifier.

2. ALGORITHMIQUE

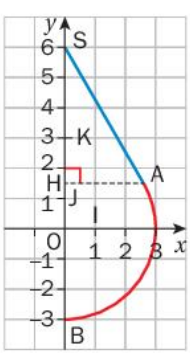
a. Proposer un algorithme qui, à partir des données fournies par le radar, affiche si les normes de sécurité sont respectées.

b. Programmer cet algorithme en Python et le tester en vérifiant les résultats de la question **1**.

103 Courbe lissée pour un minuteur

Un minuteur est formé d'un cône et d'une sphère tronquée. Le rayon de la sphère est 3 cm et la hauteur totale du minuteur est 9 cm.

Sur la figure ci-dessous, on a représenté le profil du minuteur dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Un arc de cercle de centre O et de rayon 3 cm joint les points A et B.



Les points B et S ont pour coordonnées B(0 ; –3) et S(0 ; 6). Le point K est le milieu de [OS] et le point H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAS. On a un raccord « lisse » entre la partie sphérique et la partie conique : la droite (AS) est tangente à l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ au point A.

Pour des raisons d'ergonomie, on souhaite que la mesure de l'angle au sommet du cône n'excède pas 65°.

On cherche les coordonnées exactes du point de raccord A.

a. Calculer | Justifier que le triangle OAS est rectangle en A.

b. Calculer | Déterminer la valeur exacte de la longueur du segment [AK]. Justifier.

c. En déduire la nature du triangle OAK.

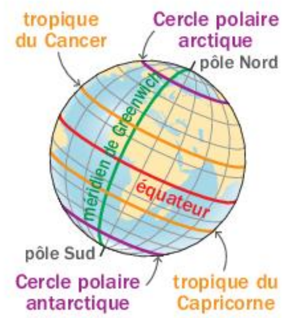
d. La condition sur la mesure de l'angle au sommet du cône est-elle satisfaite ?

e. Montrer que, dans ces conditions, les coordonnées du point A sont $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$.

D'après BAC STD2A Antilles Guyane, juin 2017.

104

La Terre est assimilée à une boule de rayon 6 371 km.



a. La longueur du cercle polaire arctique est égale à 15 993 km.

Quelle est la latitude de tous les lieux situés sur ce cercle polaire ?

b. Le tropique du Capricorne a une latitude d'environ 23° Sud.

Calculer la distance la plus courte sur la surface de la Terre entre le cercle polaire arctique et le tropique du Capricorne (arrondir au km).

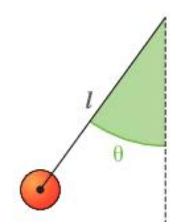
Aide

a. Calculer le rayon du cercle polaire, puis faire un schéma de la section de la Terre par un plan contenant son centre et les pôles.

b. Calculer la longueur (en km) d'un méridien.

105 Un pendule simple

Une caméra a permis de filmer le mouvement d'un pendule simple (une image toutes les 100 ms).

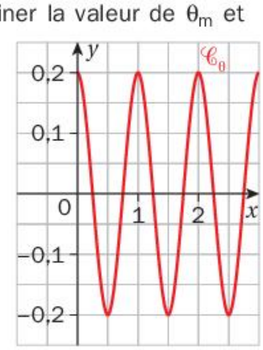


La mesure, image par image, de l'élongation angulaire $\theta(t)$, exprimée en radians, en fonction du temps t, exprimé en secondes, est définie par :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$$

où θ_m est l'élongation angulaire maximale et T_0 la période d'oscillation.

a. À l'aide de la courbe représentative de la fonction θ représentée ci-dessous, déterminer la valeur de θ_m et celle de T_0.



b. En déduire l'expression de l'élongation angulaire $\theta(t)$ de ce pendule en fonction de t.

c. Calculer la longueur l (en m) de ce pendule sachant que, pour ce type de pendule, on a :

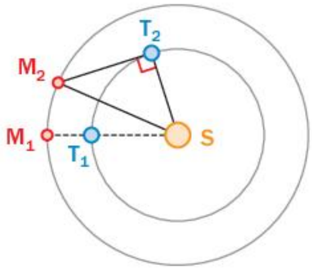
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ avec $g \approx 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Fichier logiciel
Ex. 107
Manuel numérique enseignant

Enseignement scientifique

106 La distance de Mars au Soleil

La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut être observée à l'œil nu depuis la Terre. Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de Mars sont à peu près coplanaires.
Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient « en opposition », c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil. On note T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant, et S la position du Soleil.
Cent six jours plus tard, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives T_2 et M_2, et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{M_2T_2S}$ est droit.



a. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_1SM_2}$, sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.

b. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_1ST_2}$, puis de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$, sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.

c. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.

Fiche métier
Astrophysicien-ne
hatier-clic.fr/ma1213a

SVT

107 Le phénomène des marées

Certains phénomènes naturels peuvent être modélisés par des fonctions trigonométriques. Pour les marées, en exprimant la hauteur d'eau y, en douzième de marnage, et le temps t, en heure marée, on a :

$$y = 6\left(\sin\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right)+1\right).$$

Info

En notant T_0 l'heure de basse mer, T_1 l'heure de haute mer, H_0 et H_1 les hauteurs d'eau respectivement en T_0 et T_1, le **douzième de marnage** est égal à $\frac{H_1-H_0}{12}$ et l'**heure marée** est égale à $\frac{T_1-T_0}{6}$.

1. a. Calculer la hauteur d'eau, en douzième de marnage, au bout de 3 heures marée, de 4 heures marée et de 6 heures marée.

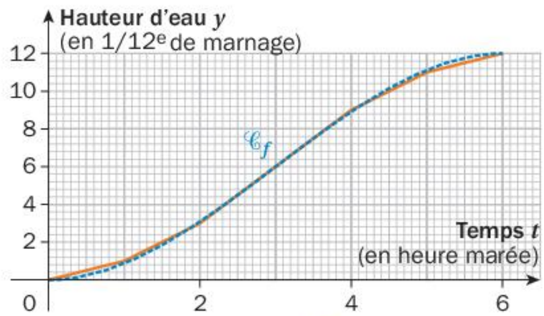
b. La règle des douzièmes utilisée dans la marine dit que la variation de la hauteur est de $\frac{1}{12}^{e}$ de marnage au bout de la 1re heure marée, de $\frac{2}{12}^{e}$ de marnage au bout de la 2e heure marée, et ainsi de suite. Cette règle vous semble-t-elle vérifiée d'après la modélisation proposée ?

2. TICE Construire à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 24] par :

$$f(t) = 6\left(\sin\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right)+1\right).$$

Que peut-on en déduire au sujet du nombre de marées hautes et marées basses sur 24 heures ?

3. Une méthode, très répandue chez les navigateurs amateurs, consiste à approcher la fonction f par une fonction affine par morceaux bien choisie, comme celle représentée ci-contre sur l'intervalle [0 ; 6].
Déterminer l'expression de cette fonction affine sur l'intervalle [0 ; 6].



D'après brochure IREM Aix-Marseille, *Mathématiques en liaison avec des problèmes concrets*, tome 2, 2006.

Fiche métier
Technicien-ne en énergies renouvelables
hatier-clic.fr/ma1213b

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

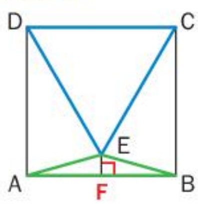
108 Coordonnées

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique de centre O. Le point L est le symétrique du point I par rapport à O. E est le point de la demi-droite [OJ) tel que le triangle ILE est équilatéral. A et B sont les points d'intersection respectifs du cercle avec les segments [IE] et [LE].

- Quelles sont les coordonnées des points I, L, E, A et B dans le repère (O, I, J) ?

109 Un triangle dans un carré

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1 cm et DCE est un triangle équilatéral. (EF) est une hauteur du triangle ABE.



- Quelle est la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Aide Un nombre réel associé à un angle de 15° est $\frac{\pi}{12}$.

Défis

110 La roue tourne

Le disque représenté ci-dessous a pour rayon 1 et roule sur le segment [KL] de longueur 9π.

- Parmi les figures ci-dessous, déterminer celle qui représente le disque quand son point de contact avec le segment [KL] se place au point L.

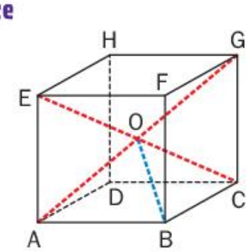
a. **b.** **c.** **d.** **e.**

D'après *Concours Kangourou*, 2017.

111 Angle dans l'espace

ABCDEFGH est un cube de centre O.

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. En donner une valeur arrondie au dixième de degré.



112 Calcul

Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$(\cos(x) + 3\sin(x))^2 + (3\cos(x) - \sin(x))^2 = 10.$$

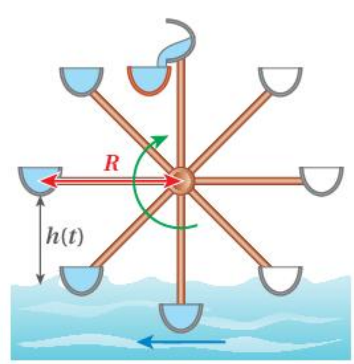
En groupe

113 La noria

En Asie, pour irriguer les rizières en altitude, on utilise souvent la noria. Il s'agit d'une grande roue composée de seaux attachés par des goupilles. Les seaux sont successivement immergés, remplis et vidés dans une gouttière.

Une noria porte huit seaux répartis de façon régulière sur la roue. On étudie la hauteur d'un seau par rapport à la surface de l'eau en fonction du temps. Cette hauteur est positive quand le seau est au-dessus de l'eau et négative quand il est en dessous. En supposant que le mouvement de la roue est circulaire uniforme, on a modélisé le calcul de la hauteur d'un seau (en m) en fonction du temps t (en min) par la fonction h définie par :

$$h(t) = 2 + 2{,}5\sin\left(2\pi\left(t - \frac{1}{4}\right)\right).$$



- Pour déverser dans le champ par la gouttière 1 000 seaux remplis d'eau, combien de temps la noria doit-elle tourner ?

Info
Une fonction du type $t \mapsto f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
ω est appelée **pulsation** (ou vitesse angulaire) de la fonction et s'exprime en rad·s^{-1}.

Réfléchissons ensemble aux initiatives à prendre, puis répartissons-nous les tâches.

D'après revue *Petit x* n° 91, 2013 ©.

Partie C

Géométrie

Isaac Newton
(1642-1727)

Mathématicien et physicien anglais

Dans les *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), dont la traduction française est due à Émilie du Châtelet (1706-1749), il définit le **concept de force** (magnitude et direction). La somme de deux forces peut alors être représentée par la diagonale d'un parallélogramme.

Michel Chasles
(1793-1880)

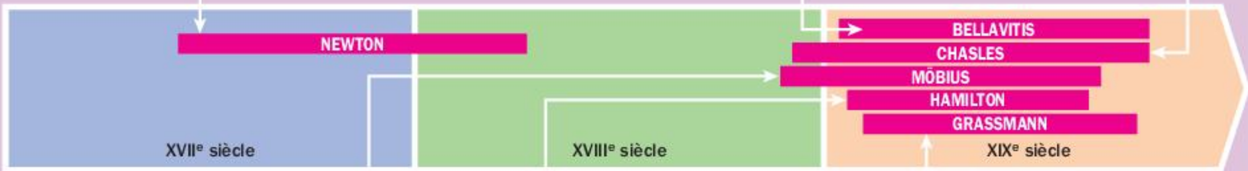
Mathématicien français

Ses travaux portent principalement sur la **géométrie projective**.
En 1846, il propose le terme d'**homothétie**. En France, la formule donnant la somme de deux vecteurs est nommée *Relation de Chasles* en son honneur.

Giusto Bellavitis
(1803-1880)

Mathématicien italien

Dans sa *Méthode des équipollences* (▶ page suivante), il expose une forme de calcul géométrique qui tient compte à la fois de la longueur et de l'orientation des segments.



August Ferdinand Möbius
(1790-1868)

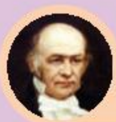
Mathématicien allemand

Dans *Der barycentrische calcul* (1827), il contribue à l'émergence des **premières notions de calcul vectoriel**.

Hermann Günther Grassmann
(1809-1877)

Mathématicien allemand

Ses travaux sur ce qu'il appelle la *grandeur extensive* (▶ page suivante) permettent de préciser et de généraliser la notion de vecteur dans des espaces abstraits de dimension supérieure à 3.



William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Mathématicien et physicien irlandais

Il prolonge les opérations ordinaires (addition, multiplication, etc.) à des paires ordonnées (a,b) de nombres réels et aboutit ainsi au **concept de vecteur** (le terme apparaît en 1846).

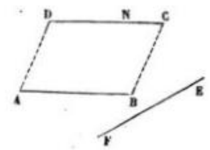
Une HISTOIRE des mathématiques

Les équipollences de Bellavitis

Giusto Bellavitis (1803-1880) est un mathématicien italien autodidacte dont les travaux en géométrie ont eu une influence majeure sur l'histoire des vecteurs. Dès ses articles de 1832 et **dans un ouvrage de 1854, Bellavitis présente une nouvelle notion qu'il nomme les équipollences**. Selon lui, ces équipollences expriment « des relations entre des [segments de] droites considérées non seulement quant à leurs grandeurs mais aussi quant à leurs directions ». **Il définit ainsi, à sa manière, des vecteurs (norme, direction) et pose les bases du calcul vectoriel**.

Deux droites qui ont de telles relations sont dites *équipollentes;* et, dans le calcul des équipollences, on peut toujours substituer à une droite une autre qui lui soit équipollente. Ainsi la droite AB (*fig.* 1) est équipollente

Fig. 1.



à DC, et est seulement égale à EF; ce qu'on distingue au moyen de deux signes différents, en écrivant

$$\mathrm{AB} \doteqdot \mathrm{DC}$$

et

$$\mathrm{AB} = \mathrm{EF}.$$

Exposition de la méthode des équipollences par Giusto Bellavitis, traduction française, 1874. ▶

L'*Ausdehnungslehre* de Grassmann

Au début du XIX^{e} siècle, le mathématicien et linguiste **Hermann Günther Grassmann (1809-1877) cherche à développer un calcul sur les objets géométriques.** Il y parvient dans ce qu'il présente comme la théorie de la grandeur extensive (*Ausdehnungslehre* en allemand). Malheureusement, ce traité très novateur n'obtient aucun succès en son temps car, à la même époque, plusieurs mathématiciens prestigieux (Möbius, Bellavitis, Hamilton, Cauchy, etc.) explorent le même sujet et publient de nombreux résultats.

Comme je lisais l'extrait de votre mémoire sur les sommes et les différences géométriques publié dans les Comptes rendus [Tome 21 1845], je fus frappé par la ressemblance merveilleuse, qu'il y a entre les résultats qui y sont communiqués et les découvertes faites par moi-même depuis l'année 1832 ; […] J'ai conçu la première idée de la somme et de la différence géométriques de deux ou plusieurs lignes et du produit géométrique de deux ou trois lignes dans l'année nommée, idée en tout égard identique à celle qui est représentée dans l'extrait de votre mémoire.

▲ Lettre de Grassmann à Adhémar Barré de Saint-Venant, 18 avril 1847.

Négligés, oubliés, les travaux de Grassmann sont finalement redécouverts par Felix Klein (1849-1925), ce qui lui ouvre, à la toute fin de sa vie, les portes de l'Académie des Sciences de Göttingen. **De nos jours, Grassmann est reconnu comme l'un des pères de la théorie des espaces vectoriels.**

Zoom sur...

Emma Castelnuovo

Mathématicienne et enseignante italienne, Emma Castelnuovo (1913-2014) promeut un enseignement des mathématiques qui va du concret à l'abstrait en évitant les notions superficielles et la technicité inutile. En 1949, elle publie ainsi *Geometria intuitiva* (*Géométrie intuitive*) qui marque un tournant dans la pédagogie du secondaire. **Humaniste, elle considère les mathématiques avant tout comme un outil pour l'égalité des chances et le développement culturel. En son honneur, la communauté internationale crée en 2013 le prix Emma Castelnuovo** qui récompense des réalisations exceptionnelles dans le domaine de l'enseignement des mathématiques.

CHAPITRE 8

Produit scalaire

Itinéraire

OBJECTIF 1
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs
- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 17 à 21
- Les incontournables 34 et 35
- Entraînement 44 à 63

OBJECTIF 2
Exploiter la relation d'orthogonalité
- Activité 2
- Cours 2
- Savoir-faire 2
- Quiz 22 et 23
- Les incontournables 36 à 38
- Entraînement 64 à 83

OBJECTIF 3
Calculer des longueurs et des mesures d'angle
- Activité 3
- Cours 3
- Savoir-faire 3
- Quiz 24 et 25
- Les incontournables 39 à 41
- Entraînement 84 à 116

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points
- Activités 4 et 5
- Cours 4
- Savoir-faire 4
- Quiz 26 et 27
- Les incontournables 42 et 43
- Entraînement 117 à 136

Le kitesurf est un sport de glisse sur planche tractée par un cerf-volant. Plusieurs disciplines (comme le *freestyle* ou le *wakestyle*) consistent à réaliser des figures : le pratiquant doit avoir une bonne connaissance des actions s'exerçant sur la planche pour réaliser une figure en toute sécurité.
En physique, les actions sont modélisées par des forces, qui sont représentées par des vecteurs. On utilise dans certaines situations le produit scalaire qui permet de rendre compte de l'effet d'une force sur un déplacement souhaité.

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases à partir des mots suivants.

VECTEUR — coordonnées — direction — angle — norme — *PARALLÉLOGRAMME* — somme de deux vecteurs — *vecteurs égaux* — relation de Chasles — sens

Rappels

Notion de vecteur

- On caractérise un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par :
– sa **norme** ou longueur : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$;
– sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
– son **sens** : de A vers B.
- $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

$A(-1\ ;\ 2)$ et $B(0\ ;\ 1)$ sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Opérations sur les vecteurs

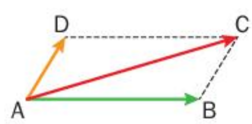
- **Addition de deux vecteurs**

Avec les coordonnées

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

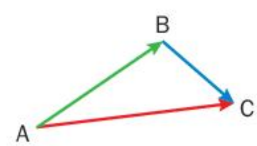
Règle du parallélogramme

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

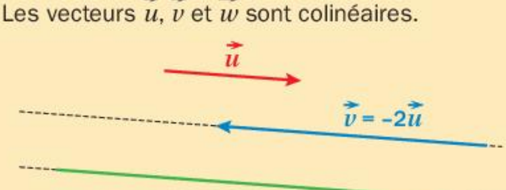


- **Produit d'un vecteur par un nombre réel**

• Le produit d'un vecteur non nul par un nombre réel k non nul est un vecteur de norme $|k|\|\vec{u}\|$ et de même direction que $\vec{u}$.
Si $k > 0$, ce vecteur est de même sens que $\vec{u}$.
Si $k < 0$, ce vecteur est de sens contraire à $\vec{u}$.
• Si $\vec{v} = k\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.
• Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple

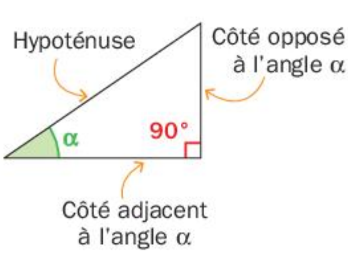
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.



Trigonométrie ▸ Chapitre 7

Dans un triangle rectangle :

Angle α	0°	30°	45°	60°	90°
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

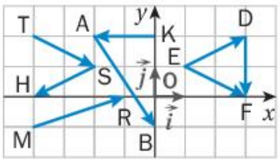
Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Notion de vecteur

1 On considère la figure ci-dessous.



a. Citer les vecteurs de même direction.

b. Citer les vecteurs de même sens.

c. Citer les vecteurs égaux.

d. Donner les coordonnées de chaque vecteur.

2 **a.** Construire un représentant des vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}.$$

b. Construire un représentant de $-\vec{u}$ et de $-\vec{v}$.

c. Donner les coordonnées de $-\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

3 A(2 ; −3), B(4 ; 5) et C(−1 ; −2) sont trois points.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Déterminer les coordonnées du point D afin que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

c. Calculer les longueurs de ses côtés.

Opérations sur les vecteurs

4 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Recopier et compléter les égalités suivantes.

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\ldots$ **b.** $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\ldots$ **c.** $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\ldots$

d. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\ldots$ **e.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\ldots$ **f.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\ldots$

5 On étudie la résultante $\vec{F}$ des forces qui s'exercent sur un skieur, modélisé par un point sur le schéma ci-contre :

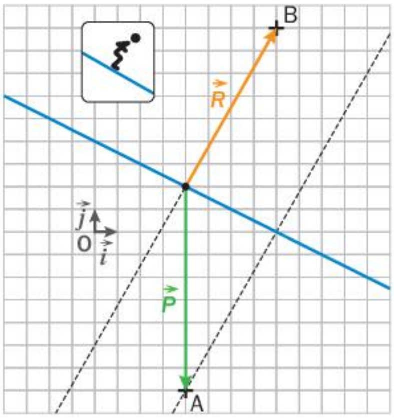
$$\vec{F}=\vec{R}+\vec{P}$$

avec $\vec{R}$ la réaction normale de la piste et $\vec{P}$ le poids du skieur.

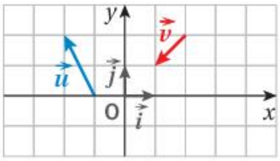
a. Construire le vecteur $\vec{F}$ et lire sur le schéma ses coordonnées.

b. Lire graphiquement les coordonnées de $\vec{R}$ et de $\vec{P}$, puis retrouver les coordonnées de $\vec{F}$ par le calcul.

c. D'après le principe d'inertie, le skieur peut-il avoir un mouvement rectiligne uniforme ?



6 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.



- Construire $\overrightarrow{w_1}=2\vec{u}$, $\overrightarrow{w_2}=-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{w_3}=-\vec{u}+2\vec{v}$.

7 ABC est un triangle. Les points H et G sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AH}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BG}=-\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, H et G dans le plan muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b. Les points A, G et H sont-ils alignés ? Justifier.

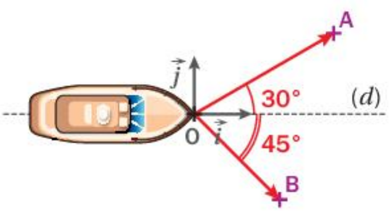
Trigonométrie

8 Deux remorqueurs sont reliés au nez d'un bateau initialement en un point O. L'un d'entre eux, s'il était seul, l'amènerait jusqu'au point A ; l'autre, jusqu'au point B. On a OA = 80 m et OB = 60 m.
Ensemble, les deux remorqueurs amènent le nez du bateau au point R tel que $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

a. Déterminer les coordonnées des points A et B.

b. Calculer les coordonnées du point R.

c. Le point R appartient-il à la droite (d) ?



Corrigés p. 368

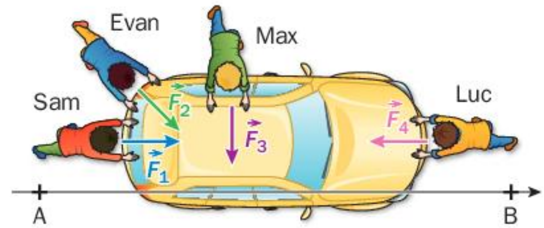
Activités

Fichier logiciel
Activité 2
Manuel numérique enseignant

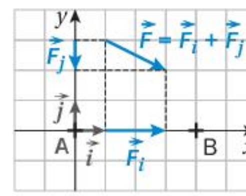
OBJECTIF 1
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

1 La voiture en panne

La voiture ci-contre est tombée en panne. On souhaite la déplacer d'un point A vers un point B. Quatre personnes poussent cette voiture en exerçant des forces de même norme F mais avec des directions différentes. Chaque personne n'a pas la même efficacité pour déplacer la voiture de A vers B. On dit que ces forces $\vec{F}$ « n'échangent pas le même travail ».



1. Classer ces personnes de la plus efficace à la moins efficace pour déplacer la voiture de A vers B ; expliquer ce classement.



Pour traduire l'efficacité de chaque force, on s'intéresse au projeté orthogonal $\vec{F_i}$ du vecteur $\vec{F}$ sur la droite (AB), qui est la seule composante du vecteur $\vec{F}$ qui influe sur le déplacement voulu de la voiture.

Les physiciens ont introduit au XIX^e siècle la notion de **travail d'une force** :

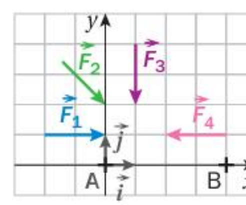
> Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur le trajet de A vers B est appelé **produit scalaire de $\vec{F}$ et de $\overrightarrow{AB}$**.
> Il se note $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ et il vaut :
> - $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ ont le même sens ;
> - $-\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ sont de sens opposés.

2. On a reproduit ci-contre les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$.

a. Reproduire le schéma et construire le projeté orthogonal de chaque vecteur sur la droite (AB).

b. Calculer le produit scalaire $\vec{F_k}\cdot\overrightarrow{AB}$ pour k allant de 1 à 4.

c. Vérifier la réponse donnée à la question **1**.

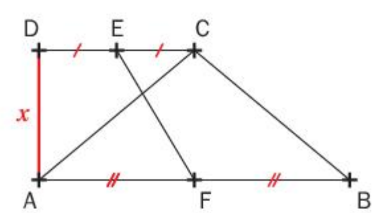


OBJECTIF 2
Exploiter la relation d'orthogonalité

2 La hauteur du trapèze TICE

On considère un trapèze rectangle ABCD de bases [AB] et [CD] tel que AB = 6 cm et CD = 3 cm. E et F sont les milieux respectifs des côtés [CD] et [AB].

On cherche à déterminer la hauteur AD du trapèze pour que les droites (EF) et (AC) soient perpendiculaires.



1. a. Reproduire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Aide On pourra utiliser un curseur pour faire varier la longueur AD ou placer un point mobile D sur une droite perpendiculaire à la droite (AB).

b. Conjecturer une réponse au problème.

c. Faire apparaître la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}$ lorsque les droites sont perpendiculaires. Justifier la valeur observée.

2. a. Recopier et compléter les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \dots + \overrightarrow{AF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \dots .$$

b. Démontrer que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}$.

c. En déduire que $AD^2 = 4{,}5$ et conclure.

OBJECTIF 3
Calculer des longueurs et des mesures d'angle

3 Les câbles du poulailler

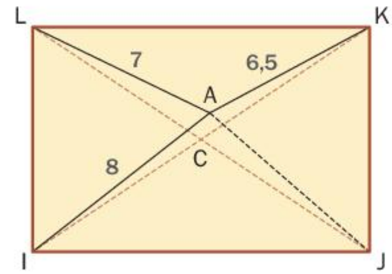
1. ABC est un triangle avec $AB = 8$, $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

a. Exprimer BC^2 en fonction de AB, AC et $\cos(\widehat{BAC})$.

Aide $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

b. En déduire la longueur BC.

2. Le poulailler de Livia est constitué d'un triangle ILK rectangle en L, éclairé par trois lampadaires, placés en I, K et L, et dont le générateur est placé en A. Livia connaît les distances AI, AK et AL. Agrandissant son poulailler pour le transformer en un rectangle IJKL, elle souhaite déterminer la longueur de câble nécessaire pour alimenter un éclairage en J.



a. On note C le centre de IJKL. Démontrer que $AI^2 + AK^2 = 2AC^2 + \frac{IK^2}{2}$.

Aide $AI^2 = \overrightarrow{AI}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}\right)^2$

b. Démontrer de même que $AJ^2 + AL^2 = 2AC^2 + \frac{IK^2}{2}$.

c. En déduire la longueur de câble dont Livia a besoin pour son nouvel éclairage.

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

4 La droite cachée

1. Pour une droite $(N\,;\vec{u})$ du plan $(\vec{u} \neq \vec{0})$, montrer que l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} = 0$ est la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à $(N\,;\vec{u})$ et passant par N.

Aide On peut montrer que, pour tout point M, $M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} = 0$.

2. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 3$. Le point P est défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, et la droite Δ est perpendiculaire à la droite (AB) en P.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$.

a. Vérifier que le point P appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

b. En utilisant les relations $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 2$, démontrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
Conclure quant à la nature de $\mathscr{E}$.

3. Étudier de même les ensembles des points M du plan vérifiant chacune des relations suivantes.

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 6$ **b.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -2$

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$ **d.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} = -12$

Aide Pour $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = k$, on cherchera d'abord à définir un point P tel que $P \in (AB)$ et $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = k$.

Maths à l'oral
Chaque groupe étudie un ensemble et présente à la classe sa démarche et l'ensemble obtenu, puis on compare les réponses.

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

5 Étude d'un ensemble de points OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

C et D sont deux points du plan tels que $CD = 4$. On note I le milieu du segment [CD].
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $MC^2 + MD^2 = 16$.

1. Montrer que $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MI = 2$. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 + MD^2 \leqslant 10$.

Cours

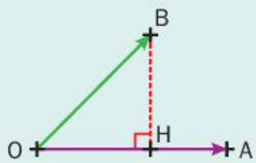
OBJECTIF 1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Savoir-faire 1 p. 226

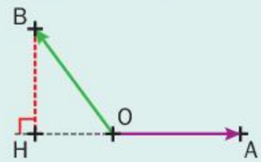
Définition Si O, A et B sont trois points du plan, avec O et A distincts, et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA), alors le **produit scalaire** de $\overrightarrow{OA}$ par $\overrightarrow{OB}$ est défini par **projection orthogonale** :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}.$$

- si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = OA \times OH$.



- si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens opposés, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH} = -OA \times OH$.



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ se lit « $\overrightarrow{OA}$ scalaire $\overrightarrow{OB}$ ».

Le produit scalaire a pour résultat un **nombre réel**.

Si le point H est confondu avec le point O, alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

Définition Si l'un des deux vecteurs est nul, on a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

⚠ La **réciproque** de cette assertion est fausse.

▶ Rabat V, Logique

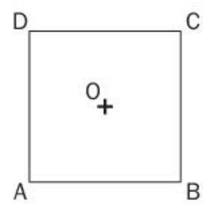
Exemple

ABCD est un carré de centre O avec AB = 4.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 4 \times 4 = 16$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = 4 \times 2 = 8.$



Propriétés

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors on a la **formule de calcul avec cosinus** :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et on note $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$.

Démonstration rédigée p. 242

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

$\vec{u}^2$ se lit « **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ ».

Propriétés

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, et a et b deux nombres réels.

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$: le produit scalaire est symétrique.

② $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$: le produit scalaire est compatible avec l'addition.

③ $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = (ab) \times (\vec{u}\cdot\vec{v})$: le produit scalaire est compatible avec le produit.

④ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Démonstration : exercice 140 p. 243

Le produit scalaire est donc une forme dite **bilinéaire symétrique**.

Propriété Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x \times x' + y \times y'.$$

Démonstration rédigée p. 242

Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6 \times 2 + (-3) \times (-1) = 15$.
- Si $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 1 + (-5) \times 1 = -3$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

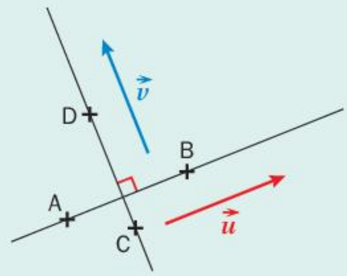
OBJECTIF 2 Exploiter la relation d'orthogonalité

Savoir-faire 2 p. 227

Définition

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux** si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires**.
On notera alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.



Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration rédigée p. 242

Conséquence

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (théorème de Pythagore).

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$

Il s'agit d'un **critère d'orthogonalité** de deux vecteurs.

Propriété

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $x \times x' + y \times y' = 0$.

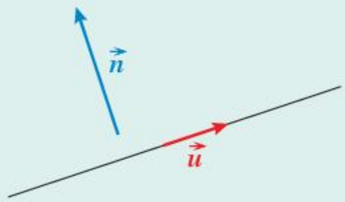
Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

En effet, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$.

Définition

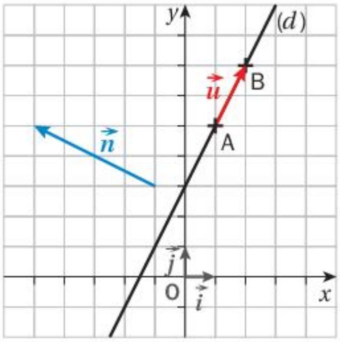
Pour une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal à cette droite**.



Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d) passant par A(1 ; 5) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times (-4) + 2 \times 2 = 0$.



Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

OBJECTIF 3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

Savoir-faire 3 p. 228

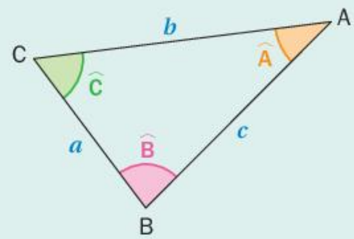
Propriété — Formules d'Al-Kashi

ABC est un triangle avec a = BC, b = CA et c = AB.
On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\widehat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\widehat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\widehat{C})$$



Démonstration : exercice 139 p. 243

On remarque que le sommet A est associé au côté opposé, de longueur a, et à l'angle noté $\widehat{A}$.

Exemple

Dans le triangle DEF ci-contre, DE = 4, DF = 7 et $\widehat{D}$ = 60°.

Calcul de la longueur EF

$$\text{EF}^2 = \text{DE}^2 + \text{DF}^2 - 2 \times \text{DE} \times \text{DF} \times \cos(\widehat{D})$$
$$= 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \frac{1}{2}$$
$$= 37.$$

Ainsi, EF = $\sqrt{37}$.

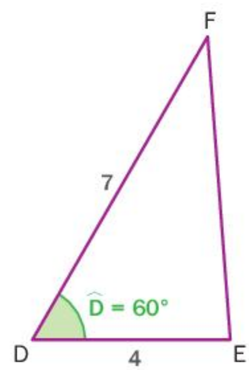
Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{E}$

$\text{DF}^2 = \text{DE}^2 + \text{EF}^2 - 2 \times \text{DE} \times \text{EF} \times \cos(\widehat{E})$,

donc $7^2 = 4^2 + 37 - 2 \times 4 \times \sqrt{37} \times \cos(\widehat{E})$,

d'où $\cos(\widehat{E}) = \dfrac{7^2 - 4^2 - 37}{-2 \times 4 \times \sqrt{37}} = \dfrac{1}{2\sqrt{37}}$.

Avec la calculatrice, on en déduit $\widehat{E} \approx 85°$.

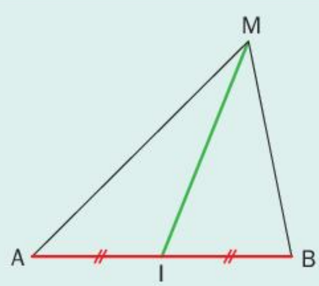


On utilise un outil numérique pour déterminer une valeur approchée d'une mesure de l'angle $\widehat{E}$: 1,49 rad, soit 85,3°.

Propriété — Formules de la médiane

A et B sont deux points du plan, et on note I le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

- $\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}}$
- $\mathbf{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}}$



Démonstration à compléter : exercice 137 p. 243

La droite (MI) est la **médiane** issue de I dans le triangle MAB.

Exemple

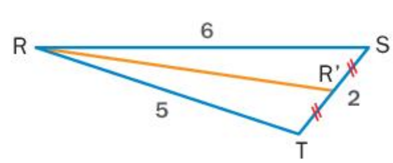
Calcul de la longueur d'une médiane

Dans le triangle RST, RS = 6, RT = 5 et ST = 2.
On calcule la longueur du segment [RR'], où R' est le milieu de [ST].

$\text{RT}^2 + \text{RS}^2 = 2\text{RR}'^2 + \dfrac{\text{ST}^2}{2}$,

donc $\text{RR}'^2 = \dfrac{1}{2} \times \left(5^2 + 6^2 - \dfrac{2^2}{2}\right) = \dfrac{59}{2}$,

d'où $\text{RR}' = \sqrt{\dfrac{59}{2}} \approx 5{,}4$.



La droite (RR') est la médiane issue de R dans le triangle RST.

La formule ci-contre met en lien le carré de la longueur d'une médiane avec les carrés des longueurs du triangle.

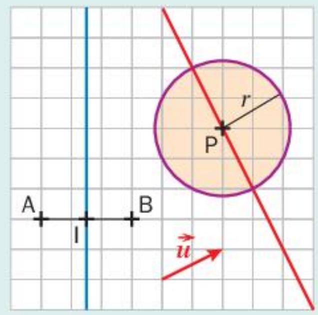
OBJECTIF 4 Étudier un ensemble de points

Savoir-faire 4 p. 229

A, B et P sont trois points, $\vec{u}$ un vecteur non nul, et I le milieu du segment [AB].

Propriétés

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 0$ est la **droite** passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.
- L'ensemble des points M tels que **MA = MB** est la **médiatrice** du segment [AB].
- L'ensemble des points M tels que $PM^2 = r^2$ avec $r > 0$ est le **cercle** de centre P et de rayon r.
- L'ensemble des points M tels que $PM^2 \leqslant r^2$ avec $r > 0$ est le **disque** de centre P et de rayon r.



Démonstration : exercice 138 p. 243

Propriété

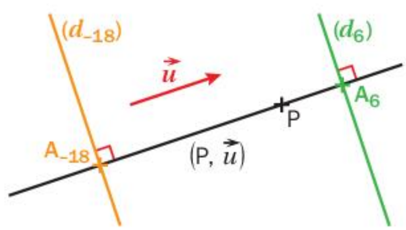
Si k est un nombre réel, alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = k$ est une droite (d_k) de vecteur normal $\vec{u}$.

Les droites (d_k) sont toutes perpendiculaires à une même droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et sont donc parallèles entre elles.

Exemples

Pour un vecteur $\vec{u}$ de norme 3, on a représenté ci-contre :

- l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 6$: c'est la droite que l'on nomme (d_6), (d_6) passant par le point A_6 tel que $\overrightarrow{PA_6} = \frac{2}{3}\vec{u}$;
- l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = -18$: c'est la droite que l'on nomme (d_{-18}), (d_{-18}) passant par le point A_{-18} tel que $\overrightarrow{PA_{-18}} = -2\vec{u}$.



Comme $\overrightarrow{PA_6}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens et $\overrightarrow{PA_6}\cdot\vec{u} = 6$, le point A_6 est défini par :

$$\overrightarrow{PA_6} = \frac{6}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

De même, le point A_{-18} est défini par :

$$\overrightarrow{PA_{-18}} = \frac{-18}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Propriétés

- Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ où I est le milieu de [AB].
- Pour un nombre réel k, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est l'**ensemble vide** ou le **point I** ou un **cercle de centre I**.

Démonstration : exercice 138 p. 243

Exemples

Avec AB = 10 :

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 5 + 25 = 30$,

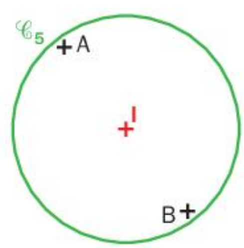
donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\sqrt{30}$;

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -25 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -25 \Leftrightarrow MI^2 = -25 + 25 = 0$,

donc l'ensemble des points est réduit au point I ;

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -60 \Leftrightarrow MI^2 = -60 + 25 = -35$,

donc l'ensemble de points est l'ensemble vide.



$MI^2 = -35$ est absurde, c'est pourquoi on aboutit à l'ensemble vide.

Savoir-faire

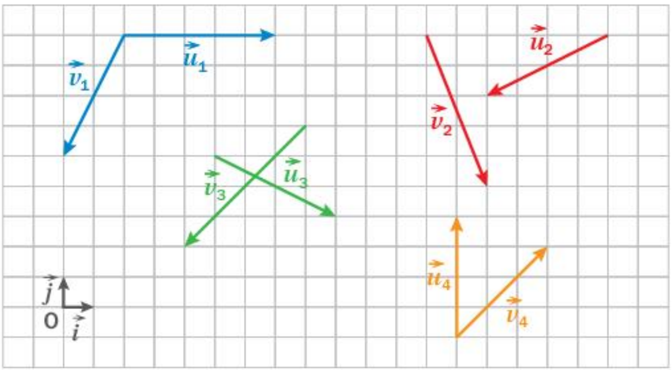
Vidéo
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs
hatier-clic.fr/ma1226

OBJECTIF 1
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Sur la figure ci-dessous, les carreaux du quadrillage ont des côtés de longueur 1.
Calculer :

a. le produit scalaire $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1}$ en utilisant le projeté orthogonal ;
b. les produits scalaires $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{v_3}$ en utilisant les coordonnées des vecteurs ;
c. le produit scalaire $\overrightarrow{u_4}\cdot\overrightarrow{v_4}$ en utilisant la formule avec le cosinus.



Solution

a. Par projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{v_1}$ sur la droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u_1}$, on a $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1} = (-2) \times 5 = -10$.

b. Par lecture graphique, on a $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{v_2} = (-4) \times 2 + (-2) \times (-5) = -8 + 10 = 2.$$

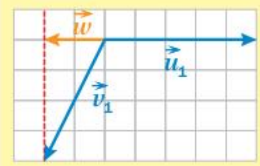
Par lecture graphique, on a $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{v_3} = 4 \times (-4) + (-2) \times (-4) = -16 + 8 = -8.$$

c. On peut lire graphiquement les coordonnées $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

D'où $\|\overrightarrow{u_4}\| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$ et $\|\overrightarrow{v_4}\| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Comme $(\vec{u}, \vec{v}) = 45°$, $\overrightarrow{u_4}\cdot\overrightarrow{v_4} = 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos(45°) = 12\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 12$.



$\vec{w}$ est donné par le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v_1}$ sur la droite dirigée par $\overrightarrow{u_1}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}$ étant colinéaires et de sens opposés, leur produit scalaire est égal à l'opposé du produit de leurs normes.

On applique la formule :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

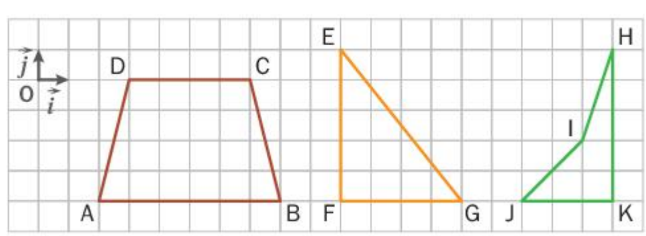
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors :
$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

On applique la formule :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

$\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Application

9 Le quadrillage ci-contre est formé de carrés de côté 1. Calculer :
a. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$
b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$
c. $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EF}$
d. $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{JK}$



10 Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.
a. $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{j}$.
b. $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$.
c. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

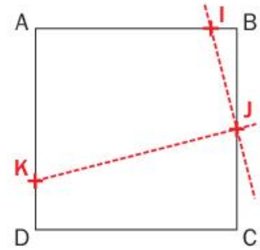
Les incontournables 34 et 35 p. 233

2 Démontrer l'orthogonalité

OBJECTIF 2
Exploiter la relation d'orthogonalité

ABCD est un carré de côté 8.
I, J et K sont tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$
et J est le milieu de [CB].

- Démontrer que les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.



Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires, on peut calculer le produit scalaire des vecteurs directeurs associés et montrer qu'il est nul.

Solution

Méthode 1 : on munit le plan du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ et on détermine les coordonnées de tous les points de la figure.

- De façon immédiate, A(0 ; 1), B(1 ; 1), C(1 ; 0) et D(0 ; 0).

J étant le milieu de [BC], $J\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$ soit $J\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$.

Si J est le milieu de [BC], alors $J\left(\frac{x_C + x_B}{2} ; \frac{y_C + y_B}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} x_I - 1 \\ y_I - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{cases} x_I = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} \\ y_I = 1 \end{cases}$, ainsi $I\left(\frac{7}{8} ; 1\right)$.

$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} x_K - 0 \\ y_K - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

On en déduit $\begin{cases} x_K = 0 \\ y_K = \frac{1}{4} \end{cases}$, ainsi $K\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$.

- Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ est :

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KJ} = \left(\frac{1}{8}\right) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont orthogonaux, d'où les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.

Méthode 2 : on décompose les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ pour utiliser les angles droits de la figure et les produits scalaires nuls.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{KJ} &= \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}\right) \\ &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CJ} \\ &= IB \times DC + BJ \times KD - BJ \times CJ \\ &= 1 \times 8 + 4 \times 2 - 4 \times 4 = 0 \end{aligned}$$

On utilise la relation de Chasles : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On conclut comme ci-dessus que les droites (IJ) et (KJ) sont perpendiculaires.

Application

11 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B, C, D ont pour coordonnées respectives (–3 ; 8), (–1 ; 3), (0 ; 7) et (–5 ; 5).
- Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

12 ABCD est un carré, I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [CD].
- Démontrer que les droites (IB) et (AJ) sont perpendiculaires en utilisant deux méthodes différentes.

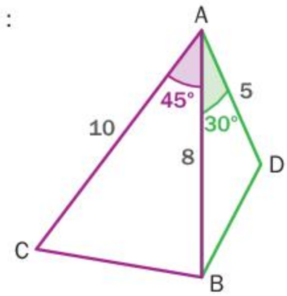
Aide
On s'aidera d'un schéma.

Les incontournables 36 à 38 p. 233

3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

OBJECTIF 3
Calculer des longueurs et des mesures d'angle

À l'aide des indications fournies sur la figure, calculer :
a. la longueur BC ;
b. la longueur de la médiane issue de A dans ABC ;
c. une mesure de l'angle $\widehat{ABD}$ à 0,1° près.



Solution

a. La formule d'Al-Kashi donne dans le triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$

$\quad = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 164 - 80\sqrt{2}$.

On conclut $BC = \sqrt{164 - 80\sqrt{2}}$.

On peut noter $\widehat{A}$ au lieu de $\widehat{CAB}$ car on a précisé dans quel triangle on applique la formule.

$\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b. On note A′ le milieu de [BC].
Une formule de la médiane donne dans le triangle ABC :

$2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2} = 8^2 + 10^2 - \dfrac{164 - 80\sqrt{2}}{2} = 82 + 40\sqrt{2}$,

donc $AA'^2 = 41 + 20\sqrt{2}$, d'où $AA' = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$.

c. Dans le triangle ABD, on peut calculer $\cos(\widehat{B})$ grâce à la formule d'Al-Kashi :

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos(\widehat{B})$.

Or, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos(\widehat{A})$

$\quad = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 89 - 40\sqrt{3}$.

D'où $BD = \sqrt{89 - 40\sqrt{3}}$.

Comme $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos(\widehat{B})$,

on a $5^2 = 8^2 + 89 - 40\sqrt{3} - 2 \times 8 \times \sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \times \cos(\widehat{B})$,

d'où $-16\sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \times \cos(\widehat{B}) = 25 - 64 - 89 + 40\sqrt{3}$.

Ainsi, $\cos(\widehat{B}) = \dfrac{-128 + 40\sqrt{3}}{-16\sqrt{89 - 40\sqrt{3}}}$ et donc $\widehat{B} \approx 34{,}2°$.

Afin de calculer $\cos(\widehat{B})$ avec la formule d'Al-Kashi, il est nécessaire de connaître la longueur BD, qui est calculée à partir de la formule d'Al-Kashi appliquée à l'angle $(\widehat{BAD})$.

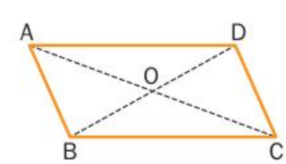
Sur un outil numérique, on utilise la fonction arccos.

Application

13 Dans le triangle DEF, DE = 4, DF = 7 et EF = 8.
a. Déterminer $\widehat{D}$.
b. On note E' le milieu de [DF]. Calculer la longueur EE'.

14 Sachant que SR = 4, RT = 10 et que $\widehat{SRT} = 60°$, calculer ST.

15 ABCD est un parallélogramme de centre O tel que AB = 5, BC = 6 et AC = 8.



a. Déterminer BD.
b. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

Les incontournables 39 à 41 p. 233

4 Étudier un ensemble de points

OBJECTIF 4
Étudier un ensemble de points

A et B sont deux points du plan tels que AB = 4.

1. Déterminer et représenter les ensembles des points M du plan vérifiant chacune des relations ci-dessous.

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$ **b.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$ **c.** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \leqslant -1$

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels k tels que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ soit réduit à l'ensemble vide.

Solution

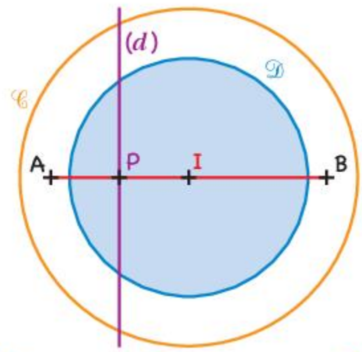
1. a. • On va montrer qu'il existe un point $P \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, on a :

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = AP \times AB$$

et donc $AP = \frac{1}{AB} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, P est tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.



On va s'appuyer sur le point P pour se ramener à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

• $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PA}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

On réécrit l'égalité de l'énoncé avec deux produits scalaires contenant $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM}$ d'après la relation de Chasles.

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc la droite (d) passant par P et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

On applique la propriété du cours.

b. On note I le milieu du segment [AB].

On sait que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ (formule de la médiane).

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4^2}{4} + 2 \Leftrightarrow MI^2 = 6.$

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

c. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \leqslant -1 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} \leqslant -1 \Leftrightarrow MI^2 \leqslant \frac{4^2}{4} - 1 \Leftrightarrow MI^2 \leqslant 3.$

L'ensemble des points M du plan vérifiant la relation est donc le disque $\mathscr{D}$ de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

2. Pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4^2}{4} + k \Leftrightarrow MI^2 = k + 4.$

On aboutit à l'ensemble vide si et seulement si $k + 4 < 0$, c'est-à-dire $k < -4$.

On aboutit à l'ensemble vide quand le membre de droite d'une équation de la forme $MI^2 = k$ est strictement négatif.

Application

16 Pour un segment [CD] de longueur 6 et de milieu I, déterminer les ensembles de points M vérifiant chacune des relations suivantes.

a. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CD} = 2$ **b.** $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CD} = 4$ **c.** $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = 5$ **d.** $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DM} = 1$

Les incontournables 42 et 43 p. 233

RETENIR L'ESSENTIEL...

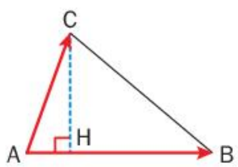
Fiche de cours

Produit scalaire de deux vecteurs…

… avec la projection orthogonale

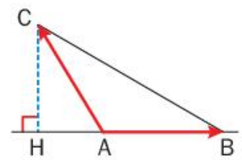
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont …

… de même sens :



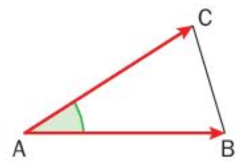
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

… de sens contraire :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

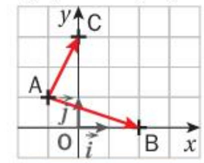
… avec la trigonométrie



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

… avec les coordonnées

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$

▸ Cours 1 p. 222

Montrer ou utiliser la perpendicularité ou l'orthogonalité

A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires.** ⇔ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **orthogonaux.** ⇔ Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$. ⇔ Dans un repère orthonormé : si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $xx' + yy' = 0$.

▸ Cours 2 p. 223

Calculer…

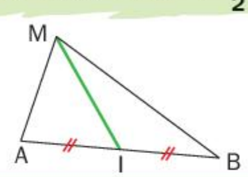
… une distance

Dans un **repère orthonormé** : si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

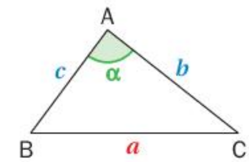
Avec la **médiane** :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\alpha)$$



… un angle

Dans un **triangle rectangle**, on utilise les formules de **trigonométrie** : cosinus, sinus et tangente.

Avec le **produit scalaire** :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Avec les **formules d'Al-Kashi** :

$$\cos\left(\widehat{A}\right) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

▸ Cours 3 p. 224

Étudier un ensemble $\mathscr{E}$ de points M

k est un nombre réel, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = k$	$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$
$\mathscr{E}$ est une **droite** de vecteur normal $\vec{u}$.	$\mathscr{E}$ est l'**ensemble vide**, ou le **point** I, milieu de [AB], ou un **cercle** de centre I.

▸ Cours 4 p. 225

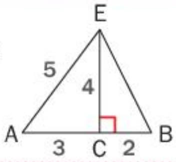
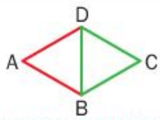
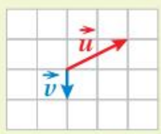
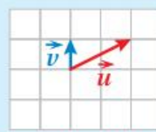
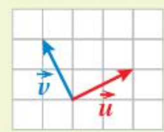
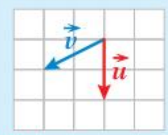
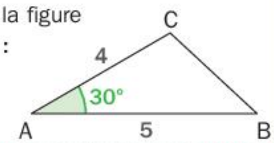
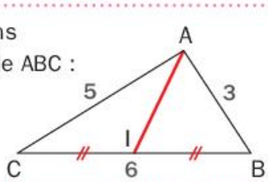
… ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
17 Dans le triangle AEB : 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 30$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 15$	$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} = 16$	$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC} = 8$
18 ABD et BCD sont des triangles équilatéraux et BD = 6 cm. 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 18$	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD} = 6$	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -18$	$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD} = 18$
19 $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ sur les figures :				
20 Sur la figure ci-contre : 	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 20$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10\sqrt{3}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$
21 Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ alors :	$\lVert\vec{u}\rVert^2 = 1$	$\lVert\vec{v}\rVert^2 = 10$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = 13$	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = 15$
22 $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à :	$\vec{v}\begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\30\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
23 La droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ admet pour vecteur normal :	$\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}15\\9\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$
24 On considère la figure de la question **20**.	BC ≈ 8,7	BC ≈ 2,5	BC ≈ 4,9	BC ≈ 7,6
25 Dans le triangle ABC : 	$\cos(\widehat{CAB}) = \dfrac{3}{5}$	$\cos(\widehat{B}) = \dfrac{3}{4}$	$AI = \sqrt{8}$	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{7}{4}$
Pour les questions 26 et 27, A et B sont deux points du plan et AB = 4.				
26 L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ est :	l'ensemble vide.	la droite (AB).	une droite perpendiculaire à (AB).	un cercle.
27 L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = -5$ est :	l'ensemble vide.	la droite (AB).	une droite perpendiculaire à (AB).	un cercle.

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

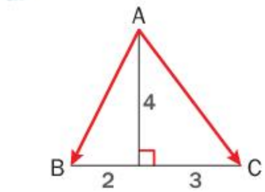
Les bons réflexes

Adoptez la bonne stratégie !

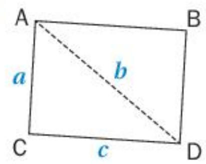
28 Parlons stratégies ! À l'oral

Dans chaque cas, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et expliquer la **stratégie** choisie.

a.

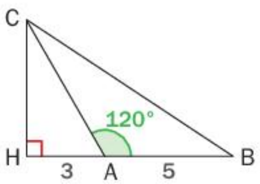


b.

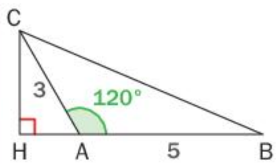


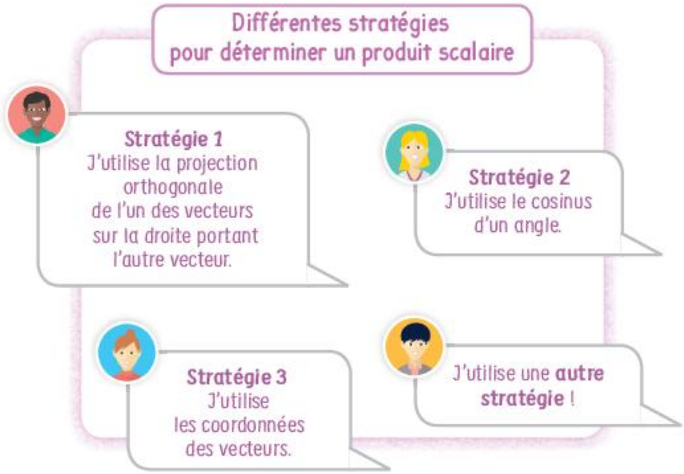
ABDC est un parallélogramme.

c.



d.



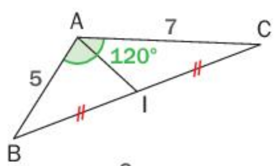


29 Parlons stratégies ! À l'oral

1.

a. Calculer BC.

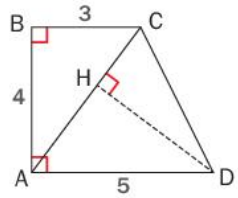
b. Calculer AI.

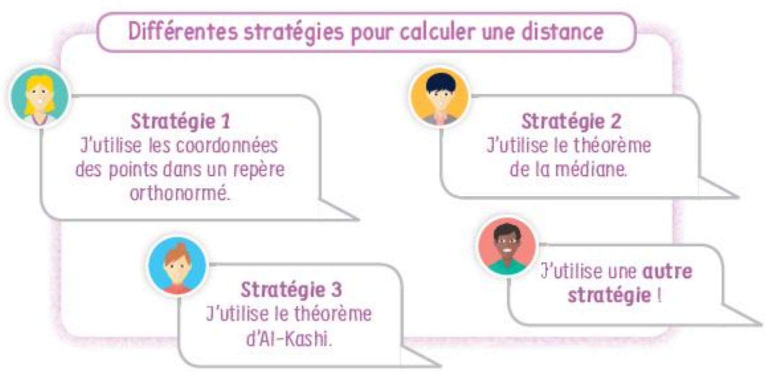


2.

a. Calculer CD.

b. Calculer DH.





30 En moins d'une minute ! À l'oral

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (AB) et (CD). Dans chaque cas, ces droites sont-elles perpendiculaires ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

2. Déterminer un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{w}$.

a. $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

31 En moins de deux minutes !

A(2 ; –1) et B(–3 ; –2) sont deux points du plan.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur du plan.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 3$ **b.** $MA^2 + MB^2 = 5$ **c.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -2$

32 En moins de deux minutes !

On donne A(2 ; –1), B(0 ; 1) et C(1 ; –2).

a. Calculer AB et AC.

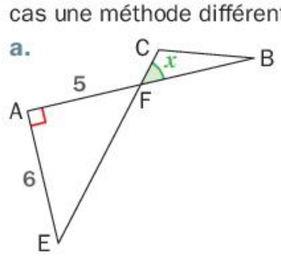
b. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c. Calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

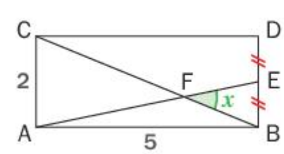
33 Chacun sa méthode En groupe

Déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle x demandé, en utilisant dans chaque cas une méthode différente.

a.



b.



Les incontournables

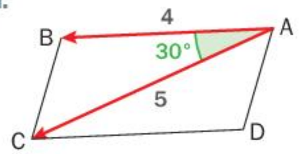
Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

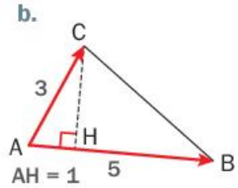
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

34 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

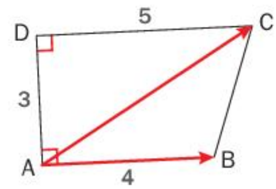
a.



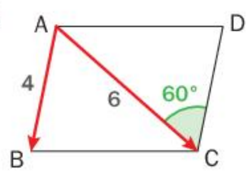
b.



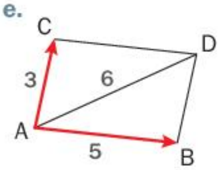
c.



d.



e.



35 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$. Calculer :

a. $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v})$ **b.** $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ **d.** $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

Démontrer l'orthogonalité

36 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.
Sont-ils orthogonaux ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

37 A(–2 ; 5), B(4 ; 3) et C(1 ; –6) sont trois points du plan.

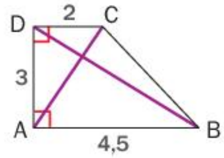
a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

38 Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze rectangle.

• Démontrer que les diagonales du trapèze sont perpendiculaires.



Calculer des longueurs et des mesures d'angle

39 A(4 ; 1), B(0 ; 5) et C(–2 ; –1) sont trois points du plan.

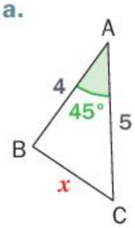
a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

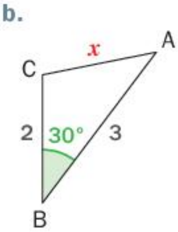
c. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

40 ABC est un triangle.
Déterminer la longueur x du côté manquant, dans chacun des cas suivants.

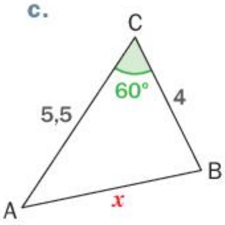
a.



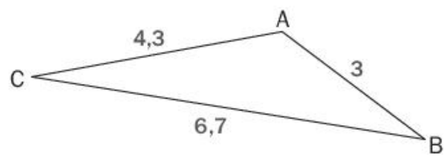
b.



c.



41 ABC est un triangle tel que AB = 3 cm, AC = 4,3 cm et BC = 6,7 cm.



a. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

b. I est le milieu du segment [BC] ; calculer la longueur AI.

Étudier un ensemble de points

42 [AB] est un segment de longueur 6 cm.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20$;

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10$.

2. Représenter graphiquement ces ensembles.

43 ABC est un triangle tel que AB = 8, AC = 5 et $\widehat{BAC} = 60°$.

a. Calculer BC et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Corrigés p. 368

OBJECTIF 1 Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

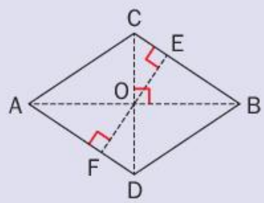
Savoir-faire 1 p. 226

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Questions FLASH

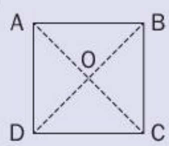
44 ACBD est un losange de centre O.
Déterminer les projections orthogonales des vecteurs sur la droite indiquée.

a. $\overrightarrow{AC}$ sur (AB).
b. $\overrightarrow{BD}$ sur (DC).
c. $\overrightarrow{OC}$ sur (BC).
d. $\overrightarrow{AD}$ sur (CD).
e. $\overrightarrow{OB}$ sur (EF).
f. $\overrightarrow{AB}$ sur (EF).



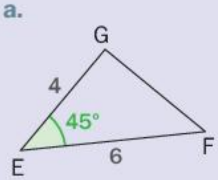
45 ABCD est un carré de centre O et de côté 1.
Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$
b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$
c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$
d. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$
e. $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC}$
f. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB}$

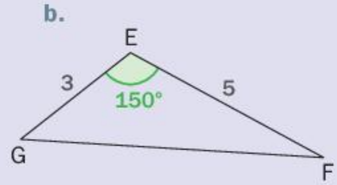


46 Calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$ dans chaque cas.

a.



b.



47 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que :

a. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 12$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8$;
b. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 12$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 7$.

48 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

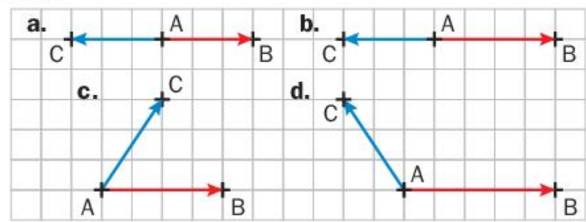
c. $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

49 **Vrai ou faux ?**

a. « Si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur produit scalaire est égal au produit de leurs normes. »
b. « Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ alors $\vec{u} = \vec{w}$. »
c. « Il existe des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} < 0.\text{ »}$$
d. « Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. »

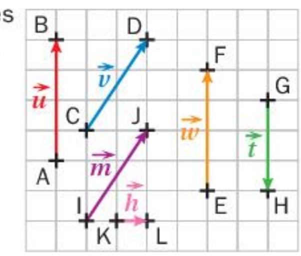
Pour les exercices 50 à 52
Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

50 Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque cas.



51 Calculer les valeurs des produits scalaires suivants.

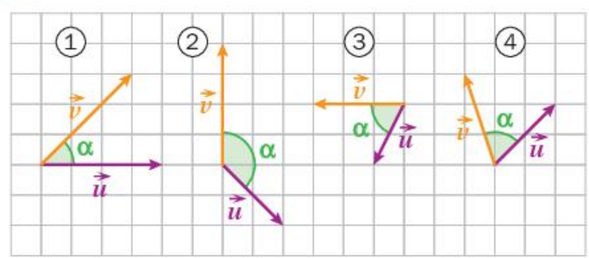
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b. $\vec{t}\cdot\vec{w}$
c. $\vec{m}\cdot\vec{h}$
d. $\vec{w}\cdot\vec{u}$
e. $\vec{v}\cdot\vec{w}$
f. $\vec{m}\cdot\vec{u}$



52 1. Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

a. $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$;
b. $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



53 ABC est un triangle.

1. Déterminer, si possible, la longueur AC.
a. AB = 3 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$; $\widehat{BAC} = 60°$.
b. AB = 5 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10$; $\widehat{BAC} = 135°$.

2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
a. AB = 2 ; AC = $\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2$.
b. AB = 5 ; AC = 2 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 15$.
c. AB = 3 ; AC = 4 ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12$.

54 **Règle de calculs**

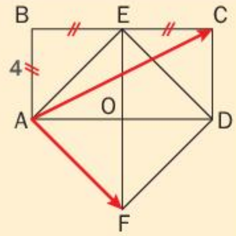
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$.

a. Calculer $(\vec{u} + 2\vec{v})\cdot(5\vec{u} - \vec{v})$.
b. Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

Fichier Python
Ex. 62
Manuel numérique enseignant

55 Copie à la loupe

Victor doit calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ à l'aide des indications données sur la figure ci-contre, sachant que ABCD et EAFD sont des rectangles.



Voici sa réponse.

Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AD}$.
Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AF}$ sur (AD) est $\overrightarrow{AO}$.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO} = AD \times AO$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires de même sens.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = 8 \times 4 = 32$.

a. Identifier les erreurs commises par Victor.
b. Résoudre le problème en décomposant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Maths à l'oral
Expliquez et corrigez chacune des erreurs identifiées.

56 Identités de polarisation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan. Après avoir développé $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$, prouver que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

57 Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
a. AB = 4, AC = 7 et BC = 5.
b. ABC est isocèle en B, AB = 3 et AC = 4.
c. ABC est rectangle en B, AB = 6 et AC = 10.
d. ABDC est un parallélogramme, AB = 5, AC = 4 et AD = 7.

58 $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan.
Calculer les produits scalaires suivants.
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b. $\vec{u}\cdot(-4\vec{v})$
c. $-\vec{u}\cdot(2\vec{v})$
d. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

59 IN ENGLISH ▸ p. 381

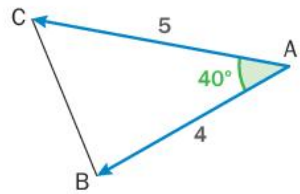
1. A(3 ; –3), B(7 ; –5) et C(4 ; –2) are three points in a x-y plane.
Calculate the scalar product of vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$.
2. a. Calculate |AB| and |AC|.
b. Deduce an approximate value of angle $\widehat{BAC}$.

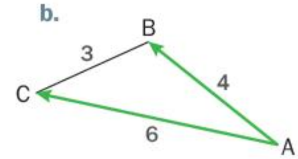
60 LOGIQUE

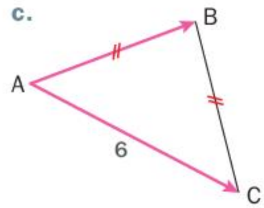
Dans chaque cas, indiquer si les propositions ① et ② sont équivalentes ou si l'une implique l'autre.
a. ① $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$. ② A, B et C sont alignés.
b. ① $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. ② $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
c. ① $\vec{u} = 3\vec{v}$. ② $\vec{u}^2 = 9\vec{v}^2$.
d. ① $\|\vec{u}\| = 0$. ② $\vec{u} = \vec{0}$.

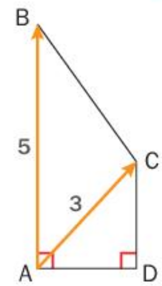
★★

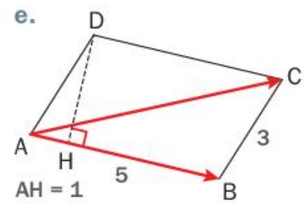
61 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en choisissant une méthode adaptée.

a.


b.


c.


d.


e.


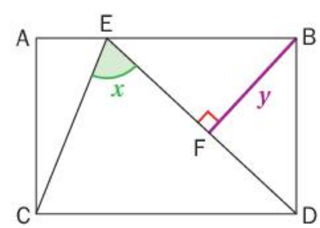
f. AB = 7, AC = 1, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

62 PROGRAMMATION python

a. Écrire un programme en Python qui calcule le carré de la norme d'un vecteur connaissant ses coordonnées.
b. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan.
Recopier et compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

```
def produitscalaire(a,b,c,d):
    u=a**2+b**2
    v=c**2+d**2
    z=...
    w=0.5(...-...-...)
    return w
```

63 ABDC est un rectangle de longueur AB = 6 et de largeur AC = 4.
E est un point du segment [AB] défini par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}$.
F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED).



a. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.
b. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF.

Aide Dans les deux cas, on pourra utiliser les coordonnées des points dans un repère bien choisi.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Exploiter la relation d'orthogonalité

Savoir-faire 2 p. 227

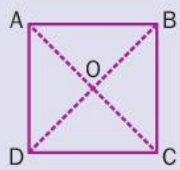
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Questions FLASH

64 ABCD est un carré de centre O.

- Déterminer quatre couples de vecteurs orthogonaux.



65 Vrai ou faux ?

a. « $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. »

b. « $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. »

c. « $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2+a\\1\end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont orthogonaux. »

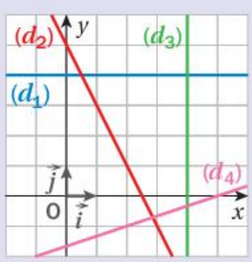
d. « $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ sont orthogonaux. »

66 Dans chaque cas, déterminer un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ c. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ e. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

67 Déterminer un vecteur normal à chacune des droites représentées ci-contre.



68 Vrai ou faux ?

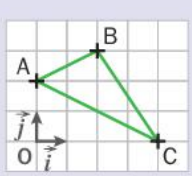
a. « Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ alors les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux. »

b. « Si les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. »

c. « Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. »

d. « Si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. »

69 Le triangle ABC ci-contre est-il rectangle ?



70 Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}5-m\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. b. $\vec{u}\begin{pmatrix}m-2\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3-m\\m\end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}-m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$. d. $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}$.

71 A, B et C sont des points du plan.

1. Dans chaque cas, indiquer si le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orthonormé.

a. A(5 ; –6), B(4,4 ; –5,2) et C(4,4 ; –6,8).

b. A(1 ; 2), B(2 ; 2,5) et C(0,5 ; 1).

2. a. Montrer que le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ tel que A(1 ; –5), B(2 ; –7) et C(3 ; –4) n'est pas orthonormé.

b. À partir de ces trois points, donner un repère orthonormé du plan.

72 A(2 ; 1), B(–1 ; 2), C(–3, –4) et D(1 ; –2) sont des points du plan.

a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

73 Vrai ou faux ?

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

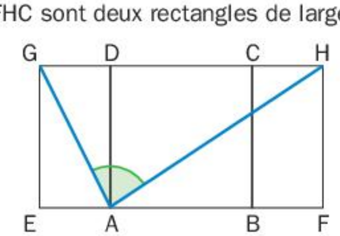
a. « A(1 ; 2), B(2 ; 3), C(2 ; –4) et D(–3 ; 0). »

b. « A(2 ; 4), B(4 ; –3), C(6 ; 3) et D(–1 ; 1). »

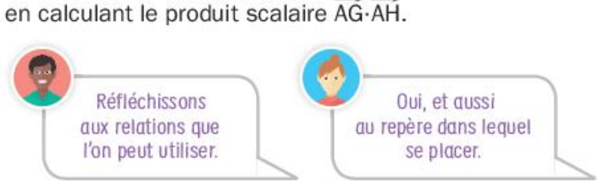
c. « $A(\sqrt{3} ; 8)$, $B(\sqrt{2} ; 3)$, $C(-2 ; -\sqrt{2})$ et $D(3 ; -\sqrt{3})$. »

74 ABCD est un carré de côté 4.

AEGD et BFHC sont deux rectangles de largeur 2.



- Étudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}$.



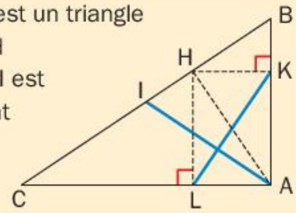
75 Justifier que si E(1 ; 5), F(–4 ; 4), G(–4 ; 20) et H(4 ; 19), alors EFGH est un rectangle.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 78, 80 et 82
Manuel numérique enseignant

★★

76 Copie à la loupe

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A et I est le milieu de [BC]. K et L sont les projetés orthogonaux de H sur [AB] et [AC] respectivement.



Julie a rédigé la réponse suivante à l'énoncé donné avec cette figure.

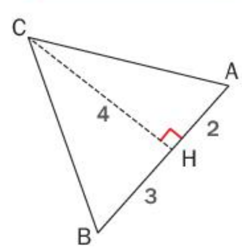
Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a :
$A(0 ; 0)$; $B(1 ; 0)$; $C(0 ; 1)$; $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
Donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H\\y_H\end{pmatrix}$.
Comme $(AH) \perp (BC)$: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
$-x_H + y_H = 0 \Rightarrow x_H = y_H$.
L'équation de la droite (BC) est $y = -x + 1$.
Et $H \in (BC)$ donc $y_H = -x_H + 1 = -y_H + 1$.
Donc $2y_H = 1 \Rightarrow y_H = \frac{1}{2}$.
$H\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.
On obtient alors $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{KL} = 0$: c'est vrai.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Julie.
b. Identifier les erreurs commises par Julie et les corriger.

Maths à l'oral
Expliquez chaque erreur identifiée.

77 IN ENGLISH ▶ p. 381

ABC is a triangle and H is the orthogonal projection of C onto AB.
- Calculate the scalar product of vectors $\overrightarrow{CA}$ and $\overrightarrow{CB}$ in two differents ways.



78 PROGRAMMATION python

Voici une fonction en Python qui teste si deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, avec a, b, c, d entiers, sont orthogonaux.

```
def orthogonaux(a,b,c,d):
    p=a*b-c*d
    if p==0:
        return True
    else:
        return False
```

1. Corriger les deux erreurs commises.
2. Tester la fonction lorsque :
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$; **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

79 Coordonnées de l'orthocentre

$A(0 ; 3)$, $B(2 ; -1)$ et $C(-2 ; 3)$ sont trois points du plan. On cherche à déterminer les coordonnées du point $H(x ; y)$, orthocentre du triangle ABC.

1. a. Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}$.
b. En déduire une relation entre x et y.
2. Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire les coordonnées du point H.

80

$A(6 ; 1)$ et $B(-3 ; 3)$ sont deux points du plan. Une équation de la droite (d) est $y = 2x$. On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite (d) tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires.

1. TICE Construire une figure sur un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une solution au problème.
2. On note $M(x ; y)$.
a. Si M appartient à (d), établir une relation entre x et y.
b. Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
c. Calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en fonction de x.
d. Conclure.

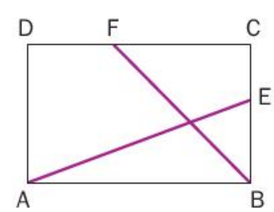
81

a est un nombre réel et ABCD est un carré de côté a. E est un point du segment [AB] et F le point du segment [AD] tel que AE = DF. On pose $AE = x$.

a. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD}$.
b. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

82

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 8$ et de largeur $AD = 5$. E est un point du segment [CB] tel que $CE = 2$. On cherche à déterminer la position du point F sur le segment [CD] pour que les droites (FB) et (EA) soient perpendiculaires.



a. TICE Représenter la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une réponse à la question posée.
b. Valider ou corriger cette conjecture.

Aide On pourra exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}$ en fonction de DF dans un repère bien choisi.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

83

$R(-2 ; 3)$, $S(4 ; 5)$ et $T(3 ; -2)$ sont trois points du plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point T sur la droite (RS), c'est-à-dire le point $U \in (RS)$ tel que $(TU) \perp (RS)$.

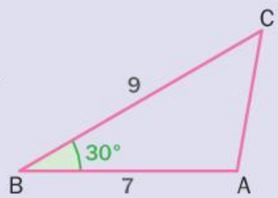
OBJECTIF 3 Calculer des longueurs et des mesures d'angle

Savoir-faire 3 p. 228

Questions FLASH

84 Un triangle RST isocèle en R est tel que RS = 4 et $\widehat{R} = 120°$.
On note H le pied de la hauteur issue de R.
a. Calculer la longueur HR.
b. En déduire ST.

85 Calculer la longueur AC dans le triangle ABC ci-contre.



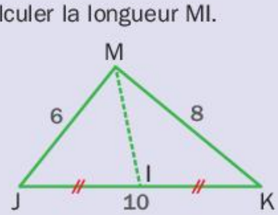
86 Dans un triangle DEF, DE = 5, DF = 3 et $\widehat{D} = 45°$.
• Calculer la longueur EF.

87 On donne IJ = 8, JK = 7 et JK = $\sqrt{113}$.
a. Déterminer la nature du triangle IJK.
b. En déduire une mesure des angles de ce triangle.

88 Dans un triangle ABC, on a AB = 15, AC = 9 et BC = 12.
a. Calculer la longueur de la médiane issue de A.
b. On note B' le milieu de [AC].
Calculer la longueur BB'.

89 Dans un triangle GHL, on a GH = 6, GL = 11 et HL = 8.
a. Calculer $\cos(\widehat{G})$ et $\cos(\widehat{H})$.
b. En déduire une valeur approchée d'une mesure de $\widehat{L}$.

90 À l'aide des informations données sur la figure ci-dessous, calculer la longueur MI.



91 Sachant que NP = 2, on construit les points :
• Q tel que Q ∈ [NP) et NQ = 3NP ;
• R tel que $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NR}) = 60°$ et NR = 5NP.
• Calculer la distance QR.

92 Un triangle RSN est tel que RS = 3, RN = 7 et SN = 9.
• Déterminer une mesure de chaque angle de ce triangle.

93 **a.** Dans un triangle ABC, AB = 6, AC = 15 et BC = 10. Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.
b. Dans un triangle DEF, DE = 10, DF = 7 et $\widehat{D} = 60°$. Calculer la longueur EF.
c. Sachant que IJ = 32, IK = 20 et que $\widehat{JIK} = 30°$, calculer la longueur JK.
d. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que GH = 22, HL = 21 et GL = 25.

94 **a.** Un segment [AB] est de longueur 9 et de milieu I. Sachant qu'un point M est tel que MA = 4 et MB = 7,5, calculer la distance MI.
b. Dans un triangle DEF, on note E' le milieu de [DF]. Sachant que EE' = 10, DE = 15 et DF = 21, calculer la distance EF.
c. Un triangle GHL est tel que GH = 7, GL = 12 et HL = $\sqrt{60}$. Calculer la longueur des médianes issues de H et de L.

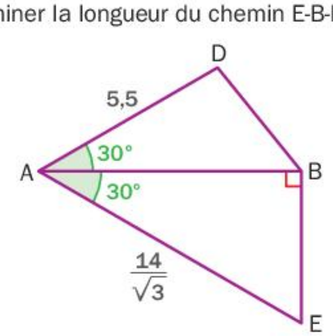
95 Le triangle MNP est défini par MN = 9, MP = 5 et NP = 7,5. On note M', N' et P' les milieux respectifs des segments [NP], [MP] et [MN].
• Calculer la longueur de chaque médiane.

96 On donne AB = 5, BC = 3 et $\widehat{B} = 60°$.
a. Calculer la longueur AC.
b. En déduire $\widehat{A}$, puis $\widehat{C}$.

97 IJKL est un rectangle avec JI = 5 et LI = 4.
Le point M situé à l'intérieur du rectangle est tel que MI = 2 et $\widehat{JIM} = 30°$.
a. Calculer la longueur MJ, puis la longueur ML.
b. En déduire la longueur MK.

98 Le triangle EFG est tel que EF = 10,5, FG = 16 et $\widehat{EFG} = 45°$.
• Calculer le périmètre du triangle EFG.

99 Déterminer la longueur du chemin E-B-D.



Aide Calculer les longueurs EB et BD à l'aide de différentes expressions de produits scalaires.

Fichier Python
Ex. 115
Manuel numérique enseignant

100 **De la conjecture à sa démonstration**

Le triangle ABC est tel que AB = 8, AC = $\sqrt{\frac{64}{3}}$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

a. Tracer le triangle ABC.
Que peut-on conjecturer quant à sa nature ?

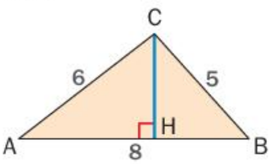
b. On note I le milieu de [AB].
Démontrer que le triangle IAC est rectangle en I.

c. Conclure quant à la nature du triangle ABC.

Maths à l'oral
Présentez à la classe votre solution à cet exercice.

Pour les exercices 101 à 103
Calculer la longueur de la hauteur issue de C et en déduire l'aire du triangle ABC.

101



102 AC = 6, $\widehat{A} = 45°$, AB = 10.

103 AC = 7, BC = 8 et $\widehat{C} = 45°$.

104 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD], rectangle en A et en D.
On a AB = 7, BC = 12 et $\widehat{DCB} = 60°$.

a. Calculer l'aire de ce trapèze.

b. Calculer la longueur BD.

Pour les exercices 105 à 107
Calculer les longueurs exactes demandées et des valeurs approchées de celles-ci à 10^{-2} près.

105 Dans le triangle ABC, AB = 9, AC = 17 et $\widehat{A} = 40°$.
- Calculer la longueur BC.

Info
Un résultat de la forme BC = 370 – 306 cos(40°) est une valeur exacte.

106 Dans le triangle DEF, DF = 3, EF = 5 et $\widehat{F} = 50°$.
- Calculer la longueur DE.

107 Dans le triangle IJK, IJ = 5, $\widehat{J} = 30°$ et JK = 12.
- Calculer la longueur IK.

108 Dans le triangle RST, on a RS = 5, RT = 4 et $\widehat{R} = 45°$.
- Calculer la longueur de la médiane issue de R.

109 Le rectangle ABCD a pour dimension AB = 10 et AD = 4. Le point P à l'intérieur de ABCD est tel que AP = 3 et $\widehat{CAP} = 15°$ dans le sens anti-horaire.

a. Calculer les longueurs BP et DP.

b. En déduire la longueur CP.

★★

Pour les exercices 110 à 113
Résoudre les triangles proposés, c'est-à-dire déterminer toutes les longueurs et des valeurs approchées à 0,1° près des mesures d'angle.

110 Le triangle ABC est isocèle en A, AB = 7, $\widehat{B} = 46°$.

111 Le triangle DEF est tel que DF = 11, EF = 19 et $\widehat{F} = 25°$.

112 Le triangle IJK est tel que $\widehat{I} = 120°$, IK = 3 et IJ = 14.

113 Le triangle MNP est tel que $\widehat{N} = 101°$, MN = 16,5 et NP = 13.

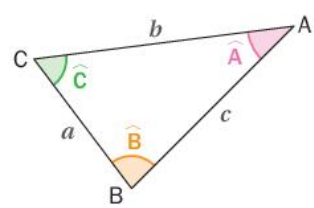
114 Le triangle PQR est tel que PR = 5, PQ = 12 et QR = $\sqrt{97}$. On note R' le milieu de [PQ].

a. Prouver que le triangle PRR' est isocèle.

b. On note P' le milieu de [QR].
Le point P' appartient-il au cercle de centre Q et de rayon la longueur QP ?

115 ABC est un triangle dont on connaît les longueurs a et b, et une mesure de l'angle $\widehat{C}$.

1. Exprimer la longueur c et $\cos(\widehat{B})$ en fonction des données.



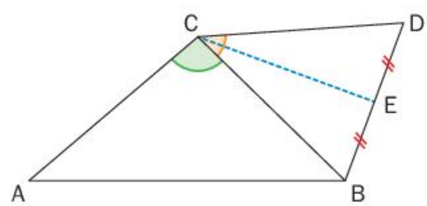
2. PROGRAMMATION python Écrire :

a. une fonction en Python `A_K_long` prenant en paramètres a, b et $\widehat{C}$ et renvoyant c ;

b. une fonction en Python `A_K_angle` prenant en paramètres a, b et $\widehat{C}$ et renvoyant une mesure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.

Aide Le module `math` contient les fonctions `cos` et `acos` (qui à un cosinus d'angle renvoie une mesure de cet angle en radians).

116 Le triangle ABC est tel que AC = 7, AB = 10 et BC = 6,5.



a. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

b. Sachant que $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE, où E est le milieu du segment [BD].

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 4 Étudier un ensemble de points

Savoir-faire 4 p. 229

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

117 A, B et P sont trois points alignés.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = -4$

c. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BA} = 2{,}5$ **d.** $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}$

e. $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$

118 A et B sont deux points du plan tels que AB = 5.
Déterminer les ensembles de points M tels que :

a. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 1$; **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -4$;

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA} = 2{,}5$; **d.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}$;

e. $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AB} = -10$.

119 A, B et M sont trois points du plan, et I est le milieu du segment [AB]. Déterminer la valeur de MI^2.

a. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3$, avec AB = 3.

b. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -3$, avec AB = 3.

c. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB} = -10$, avec AB = 8.

d. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 1$, avec AB = 1.

120 [AB] est un segment de longueur 4 cm.
I est le milieu de [AB].
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ lorsque :

a. $k = -4$; **b.** $k = -1$; **c.** $k = 2$.

121 D et E sont deux points du plan tels que DE = 5.

1. On note $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DE} = 3$.

a. Le point A de la droite (DE) est défini par $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = 3$.
Montrer que $\overrightarrow{DA} = 0{,}6\overrightarrow{DE}$.

b. Montrer que pour tout point M appartenant à $\mathscr{D}_1$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$.

c. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{D}_1$.

2. Reprendre la question **1** afin de déterminer $\mathscr{D}_2$, ensemble des points P tels que $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DE} = 10$.

122 S et U sont deux points du plan tels que SU = 8.

1. On note $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{UM} = 3$.

a. T est le milieu de [SU]. Prouver que :

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{UM} = 3 \Leftrightarrow MT^2 = 19.$$

b. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{C}_1$.

2. Reprendre la question **1** afin de déterminer $\mathscr{C}_2$, ensemble des points P tels que $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{UP} = -3$.

123 Le segment [GH] est de longueur 10.

a. Justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH} = 5$ est une droite perpendiculaire à (GH).

b. En déduire la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH} \leqslant 5$.

124 Le segment [EF] est de longueur 3 cm.
Le point P appartient à la demi-droite [FE) et est tel que EP = 7.

● Déterminer la valeur de k telle l'égalité $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EF} = k$ soit vérifiée.

125 Pour deux points C et D tels que CD = 6, on note :

- $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CD} = 12$;
- $\mathscr{D}_2$ l'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CD} = 3$;
- $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $3 \leqslant \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CD} \leqslant 12$.

a. Déterminer les ensembles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

b. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

c. Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$.

126 K et L sont deux points tels que KL = 6.
J est le milieu du segment [KL].

1. On s'intéressse à l'ensemble $\mathscr{D}$ des points P tels que :

$$\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} \leqslant 20.$$

a. Montrer que $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} \leqslant 20 \Leftrightarrow PJ^2 \leqslant 29$.

b. Reconnaître l'ensemble $\mathscr{D}$.

2. Étudier l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{LP} = 5$.

127 Pour deux points R et T tels que RT = 5, on note :

- $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{TP} = 15$;
- $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des points Q tels que $\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{TQ} = 25$;
- $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $15 \leqslant \overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{TM} \leqslant 25$.

a. Déterminer les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

c. Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$.

128 [GH] est un segment de longueur 10.

1. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que :

$$GM^2 + HM^2 = 56.$$

a. On note I le milieu du segment [GH].
Démontrer que $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow MI = 3$.

Aide Utiliser une formule de la médiane.

b. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ l'ensemble des points M tels que :

$$GM^2 + HM^2 = k.$$

Déterminer l'ensemble des valeurs k telles que $\mathscr{C}_k$ soit l'ensemble vide.

★★

129 Copies à la loupe

Gilles et Ginette ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies pour déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$ avec AB = 6.

Gilles

Comme $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{6^2}{2}$,
on a $MI^2 = 15 - \frac{6^2}{2} = -3$.
Ainsi, l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

Ginette

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 15$

$2MI^2 - \frac{AB^2}{2} = 15$ donc $MI^2 = \frac{15+\frac{36}{2}}{2} = \frac{33}{2}$.

L'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 15$ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{33}{2}$.

• Leurs réponses sont-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral

Expliquez chaque étape en discutant des éventuelles erreurs.

130 A et B sont deux points du plan tels que AB = 1.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

a. Montrer que $M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$.

b. On définit les points P et Q tels que :
$$\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AQ} - 3\overrightarrow{BQ} = \vec{0}.$$
Construire les points P et Q.

c. Justifier que $P \in \mathscr{F}$ et $Q \in \mathscr{F}$.

d. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$, et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$.

e. En déduire que $M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = 0$.

f. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{F}$, puis construire cet ensemble.

131 Le segment [IJ] est de longueur 5.

1. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points M tels que :
$$MI^2 - MJ^2 = -10.$$
On note A le milieu du segment [IJ].

a. Démontrer que $M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AM} = -5$.

b. En déduire l'ensemble $\mathscr{D}$.

Aide Utiliser une formule de la médiane.

2. Étudier l'ensemble des points N tels que :
$$NI^2 - NJ^2 = 25.$$

132 Le segment [KL] est de longueur 2.

• Justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML} = k^2 - 1$ n'est jamais vide.

133 E et F sont deux points du plan tels que EF = 4.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tels que :
$$ME^2 + 5MF^2 = 400.$$

a. G est le point tel que $\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

b. Calculer les distances GE et GF.

c. Démontrer que $ME^2 + 5MF^2 = 6MG^2 + \frac{40}{3}$.

d. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$.

134 A(2 ; 3) et B(6 ; 6) sont deux points du plan, et I est le milieu du segment [AB].
k est un nombre réel.

1. Calculer la longueur AB.

2. Prouver que pour tout point M :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{4k+25}{4}.$$

3. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$. Déterminer k tel que :

a. $\mathscr{E}$ est l'ensemble vide ;

b. le point O(0 ; 0) appartient à $\mathscr{E}$;

c. l'ensemble $\mathscr{E}$ est un point.

135 A et B sont deux points du plan tels que AB = 5.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points P tels que :
$$\left\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right\| = PA.$$

a. On note I le milieu du segment [AB].
Exprimer $\left\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right\|$ en fonction de PI.

b. En déduire que $P \in \mathscr{F} \Leftrightarrow PA^2 - 4PI^2 = 0$.

c. On définit les points C et D tels que :
$$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$
Justifier que $C \in \mathscr{F}$ et $D \in \mathscr{F}$.

d. Exprimer $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PI}$ en fonction de $\overrightarrow{PC}$, et $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PI}$ en fonction de $\overrightarrow{PD}$.

e. En déduire que $P \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD} = 0$.

f. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{F}$, puis construire cet ensemble.

136 G, H et K sont trois points tels que GH = 7, GK = 2 et HK = 6.

1. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tels que :
$$MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = 50.$$

a. Le point B est le point tel que :
$$\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0}.$$
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GK}$.

Info
On admet que :
$BG = \sqrt{32{,}5}$, $BH = \sqrt{154}$ et $BK = \sqrt{41{,}5}$.

b. Démontrer que :
$$MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = 2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2$$

c. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$.

2. À quelle condition sur k l'ensemble des points M tels que $MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = k$ n'est pas égal à l'ensemble vide ?

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : différentes formules du produit scalaire
hatier-clic.fr/ma1242

Les démonstrations rédigées

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

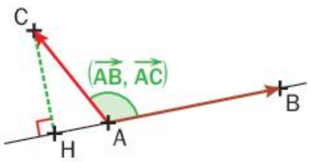
OBJECTIF : on souhaite prouver la formule du produit scalaire avec le cosinus.

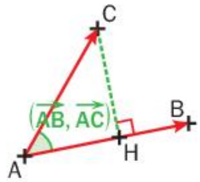
Démonstration

- A, B et C sont trois points distincts du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

– **Si H ∉ [AB]**, alors :
$AH = AC \times \cos\left(\pi - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right)$
$= -AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

– **Si H ∈ [AB]**, alors :
$AH = AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.





- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. ■

Le principe

1. On définit trois points A, B et C pour introduire le **projeté orthogonal** du point C sur la droite (AB).
2. On utilise la **définition par projection orthogonale du produit scalaire** pour exprimer AH en fonction de AC et de $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. On conclut.

Propriété

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

OBJECTIF : on souhaite déterminer la formule du produit scalaire avec les coordonnées.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$. D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
- Or $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$,
$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$.
- Donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2))$.

D'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'$. ■

1. On utilise la propriété reliant **norme et produit scalaire** et le **carré scalaire**.
2. On exprime les carrés des **normes** à l'aide des **coordonnées**.
3. On simplifie l'expression.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

OBJECTIF : on souhaite prouver un critère d'orthogonalité de deux vecteurs.

- Supposons les deux vecteurs orthogonaux.

– Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

– Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent deux droites perpendiculaires, donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, d'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. ■

- Supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Alors :
$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, soit $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

1. On montre d'abord que l'**implication** (sens direct) est vraie en utilisant la formule avec le cosinus démontrée ci-dessus.
2. On montre ensuite que la **réciproque** est vraie.

▸ Rabat VI, Raisonnements

La démonstration à compléter

137 En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant d'**étudier l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$** où A et B sont deux points distincts.

Démonstration

- On note I le milieu du segment [AB].
  On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\ldots + \ldots)\cdot(\ldots + \ldots)$
- D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\cdot(\ldots + \ldots) = MI^2 - AI^2$.
- Soit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
  D'où $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \ldots$.
- L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I, milieu de [AB], et de rayon $\frac{AB}{2}$. En outre, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux : ce cercle est l'ensemble des points M tels que le triangle MAB est rectangle en M. ■

1. **On décompose les vecteurs** $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en utilisant le milieu I de [AB].
2. Comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
3. On utilise le fait que I est le milieu de [AB] et on obtient une des **formules de la médiane**.
4. **On reconnaît un cercle** dont on précise le centre et le rayon, puis on fait le lien avec la nature du triangle MAB.

Démonstrations Vers le BAC

138 **1.** Pour un point P et un vecteur $\vec{u}$, prouver que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u} = 0$ est la droite passant par P et de vecteur normal $\vec{u}$.

2. A et B sont deux points du plan et M est un point de la médiatrice du segment [AB], notée $\mathcal{M}$.
On note I le milieu du segment [AB] ; on a $I \in \mathcal{M}$.

a. Prouver que :
$$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IM}.$$

b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux, puis que l'ensemble $\mathcal{M}$ est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

139 ABC est un triangle.

a. Prouver que :
$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

b. En déduire une des formules d'Al-Kashi.

140 **a.** Prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

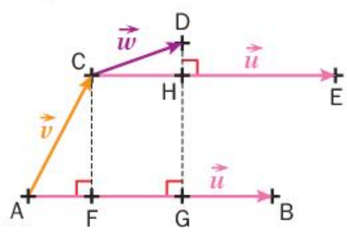
b. À l'aide de la formule avec les coordonnées, prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

c. À l'aide de la formule avec les coordonnées, prouver que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tous nombres réels a et b, on a :
$$\left(a\vec{u}\right)\cdot\left(b\vec{v}\right) = (a \times b)\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right).$$

141 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ et $\left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ sont des angles aigus et k est un nombre réel.

1. À l'aide de l'expression avec les cosinus, prouver la symétrie du produit scalaire :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

2. Les points A, B, C, D et E sont tels que :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} = \vec{u},\ \overrightarrow{AC} = \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \vec{w}.$$
Les points F et G sont les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB), et le point H est le projeté orthogonal de D sur la droite (CE).



a. Justifier que :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB \times AF \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{w} = AB \times CH.$$

b. Montrer que $\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = AB \times AG$.

c. En déduire la distributivité du produit scalaire :
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

3. **a.** En notant encore $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et F le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), justifier que $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = k \times AB \times AF$.

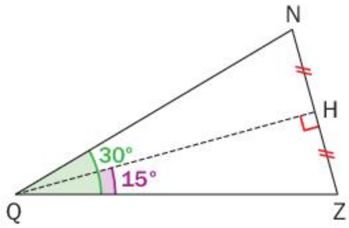
b. En déduire que $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = k \times \vec{u}\cdot\vec{v}$.

4. Développer $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$ et $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$.

Problèmes

142 Calcul de cos(15°) et sin(15°)

Le triangle QNZ est isocèle en Q avec QN = 1 et $\widehat{Q} = 30$.



1. Calculer la longueur NZ.

2. On note H le pied de la hauteur issue de Q.

a. Justifier que H est le milieu du segment [NZ] et que $\widehat{ZQH} = 15°$.

b. En déduire sin(15°).

c. Calculer la longueur HQ. En déduire cos(15°).

143 Loi des sinus — Approfondissement

Dans un triangle ABC, on note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C.

On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

a. Exprimer l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC de trois manières différentes à l'aide des trois hauteurs.

b. **Calculer** | Déterminer $\sin(\widehat{A})$, $\sin(\widehat{B})$ et $\sin(\widehat{C})$ en fonction de l'aire $\mathcal{S}$ et des longueurs a, b et c.

c. En déduire la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c} = \frac{abc}{\mathcal{S}}.$$

Pour les exercices 144 à 148
On pourra utiliser la loi des sinus démontrée à l'exercice 143.

144 Triangle avec deux angles et une longueur

a. Le triangle DEF est tel que DE = 4, $\widehat{D} = 35°$ et $\widehat{E} = 48°$.
Calculer les longueurs DF et EF.

b. Le triangle GHK est tel que HK = 10, $\widehat{H} = 30°$ et $\widehat{K} = 45°$.
Calculer les longueurs GH et GK.

145 Aire d'un champ

Une agricultrice souhaite clôturer une partie de son champ triangulaire RST. Deux repères, situés en T et S, sont séparés de 10 dam.

Le segment [RT] longe une route qui forme un angle de 75° avec le segment [ST]. Le long du segment [RS], coule un ruisseau qui forme un angle de 32° avec le segment [ST].

a. Déterminer la longueur RT.

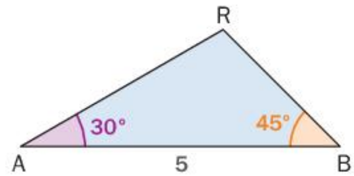
b. On note h la longueur de la hauteur issue de R.
Justifier que $h = \text{RT} \sin(75°)$.

c. **Communiquer** | L'agricultrice souhaite que le terrain clôturé ait une superficie d'au moins 0,5 ha.
Est-ce le cas ?

Aide 1 ha = 10 000 m^2.

146 Mesure à distance

Afin de repérer un rocher placé en R, un marin mesure depuis les points A et B, espacés de 5 milles marins (1 mille marin = 1 852 mètres), deux angles : $\widehat{RAB}$ et $\widehat{ABR}$.

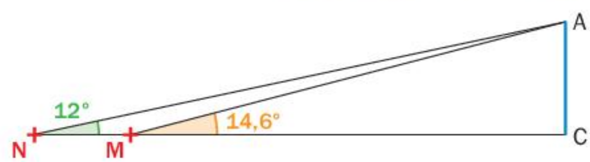


- Déterminer les longueurs AR et BR.

147 Cité administrative

Afin d'estimer la hauteur (antenne comprise) d'une des tours de la Cité administrative de Bordeaux (représentée par le segment [AC]), Linh fait deux relevés d'angle depuis la rue Georges Mandel.

Elle a parcouru 100 mètres entre les deux relevés, marqués par les points M et N.



MN = 100 m

a. Estimer la hauteur de la Cité administrative.

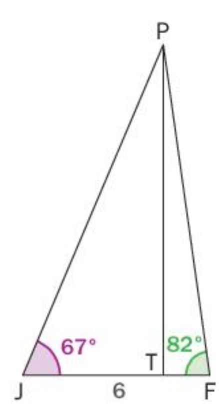
b. À quelle distance se trouvait Linh de la Cité au moment du premier relevé ?

148 Longueur à distance

Jake et Finn doivent délivrer la princesse Flamme.

Pour ce faire, ils doivent rejoindre le château dont la porte est placée en P.

Malheureusement, le pont est surveillé par un gardien qui leur demande d'annoncer la longueur du pont [TP] avant de le traverser. Jake et Finn s'éloignent de 6 mètres l'un de l'autre et font deux mesures d'angle.



- Quelle réponse doivent-ils donner au gardien ?

Pour les exercices 149 à 152

On s'intéresse à l'étude et à l'alignement de trois points remarquables sur un triangle.

149 Centre de gravité Approfondissement

ABC est un triangle, A' (respectivement B' et C') est le milieu du segment [BC] (respectivement [AC] et [AB]).
Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Info
G est le **centre de gravité du triangle** ABC.

1. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Prouver que $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

3. En déduire que le point G est le point de concours des trois médianes du triangle.

150 Centre du cercle circonscrit

Pour un triangle ABC, on note Ω l'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AC].

a. Justifier que le point Ω appartient aussi à la médiatrice du segment [BC].

Info
Ω est donc le **point de concours** des trois médiatrices.

b. En déduire que A, B et C sont sur un même cercle de centre Ω.

Info
Ce cercle est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.

c. Justifier que si un point U est le centre d'un cercle passant par les points A, B et C, alors le point U appartient aux médiatrices des segments [AB] et [AC].
En déduire que le point U est confondu avec le point Ω.

151 Orthocentre

Pour un triangle ABC de centre du cercle circonscrit Ω, H est le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

On note A', B' et C' les milieux des côtés [BC], [AC] et [AB].

a. Prouver que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{\Omega A'}$.

b. En déduire que le point H appartient à la hauteur issue de A.

c. En reprenant la démarche des questions **a** et **b**, prouver que le point H est le point de concours des trois hauteurs.

Info
H est l'**orthocentre** du triangle ABC.

152 Droite d'Euler Approfondissement

ABC est un triangle de centre de gravité G, de centre du cercle circonscrit Ω et d'orthocentre H défini par :

$$\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

1. a. Prouver que $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.

b. En déduire l'alignement des points Ω, G et H.

Info
La droite obtenue est appelée « **droite d'Euler** ».

2. Rechercher des informations au sujet du centre du cercle des neuf points.

Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien et physicien suisse.

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

153 Rayon du cercle circonscrit

On note D le point tel que [AD] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On a alors, d'après le théorème de l'angle inscrit :

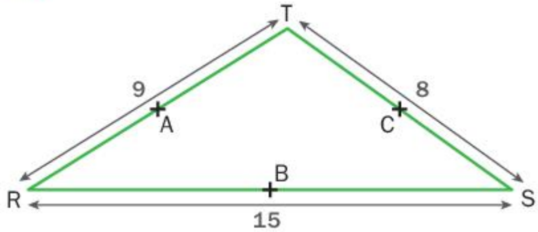
$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}.$$

a. Justifier que $AD = \dfrac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}$.

b. En utilisant la loi des sinus (▶ ex. 143 p. 244), prouver que le rayon du cercle circonscrit est égal à $\dfrac{abc}{2\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle ABC.

154

On considère le triangle RST ci-dessous.



On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que :

$$MR^2 + MS^2 + MT^2 = 360.$$

a. On note K le centre de gravité du triangle RST.
Montrer que :

$$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow 3MK^2 + RK^2 + SK^2 + TK^2 = 360.$$

b. A, B et C sont les milieux respectifs de [RT], [RS] et [ST]. Justifier que :

$$RK^2 + SK^2 + TK^2 = \frac{4}{9}(SA^2 + TB^2 + RC^2),$$

puis que :

$$RK^2 + SK^2 + TK^2 = \frac{1}{3}(RT^2 + RS^2 + ST^2).$$

c. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$.

Fichier Python
Ex. 157
Manuel numérique enseignant

155 Distances des sommets d'un rectangle

ABCD est un rectangle de centre K et P un point du plan.

1. a. Démontrer que $AP^2 + CP^2 = 2PK^2 + \dfrac{BD^2}{2}$.

b. Démontrer que $BP^2 + DP^2 = 2PK^2 + \dfrac{AC^2}{2}$.

c. Raisonner | En déduire que :

$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2.$$

2. Dans un rectangle RSNL, un point M est tel que RM = 3, SM = 7 et NM = 15.
En déduire la longueur LM.

156 Cocyclicité de quatre points

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point K.

1. On suppose que les points A, B, C et D sont **cocycliques**, c'est-à-dire qu'il existe un point I tel qu'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I passe par ces quatre points. On note A' le point tel que [AA'] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

a. Justifier que (KB) $\perp$ (BA').

b. Prouver que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = KI^2 - AI^2$.

c. Prouver que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD} = KI^2 - CI^2$.

d. En déduire que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD}$.

2. Réciproquement, on suppose que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD}$. On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (KC) coupe alors le point $\mathscr{C}$ en un point E, non confondu avec le point C.

a. En utilisant le résultat de la question **1d**, prouver que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE}$.

b. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux, puis que $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

c. Conclure quant à la cocyclicité des points A, B, C et D.

157 Formule de Héron

ABC est un triangle. On note $\mathscr{S}$ l'aire de ce triangle et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre.

1. a. Montrer que $1 + \cos(\widehat{A}) = \dfrac{2p(p-a)}{bc}$

et que $1 - \cos(\widehat{A}) = \dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$.

b. En déduire une expression de $\sin(\widehat{A})$ en fonction de a, b, c et p.

c. Calculer | Montrer alors la formule de Héron :

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. PROGRAMMATION python

Écrire une fonction en Python prenant en paramètres les longueurs a, b et c, et renvoyant l'aire déterminée par la formule de Héron.

3. Pour chaque couple de triangles, déterminer celui qui a la plus grande aire.

a. Triangle 1 de côtés 34 ; 65 et 85.
Triangle 2 de côtés 34 ; 65 et 95.

b. Triangle 1 de côtés 31 ; 32 et 33.
Triangle 2 de côtés 34 ; 55 et 88.

158 Barycentre de deux points

A et B sont deux points distincts du plan, α et β sont deux nombres réels non nuls, et le point G est défini par la relation vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

a. On suppose $\alpha + \beta = 0$. Que peut-on alors conclure pour les points A et B ? En déduire que $\alpha + \beta \neq 0$.

> **Info**
> On dit alors que le point G est le **barycentre** du système (A, α) et (B, β).

b. Justifier que pour tous nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$, le barycentre de (A, α) et (B, β) appartient à la droite (AB).

c. Identifier le barycentre du système (A, 1) et (B, 1).

d. Construire le barycentre du système (A, α) et (B, 3α).

e. On suppose $\alpha = 1$. Prouver que G $\in$ [AB] $\Leftrightarrow \beta > 0$.

159 Ensembles de points

A et B sont deux points distincts du plan, I est le milieu du segment [AB] et k est un nombre réel.

1. $MA^2 + MB^2 = k$

a. Calculer | Pour un point M du plan, montrer que :

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right).$$

b. En raisonnant par disjonction des cas sur le signe de $k - \dfrac{AB^2}{2}$, justifier que l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est soit vide, soit un cercle, soit le point I.

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$

a. Pour un point M du plan, montrer que :

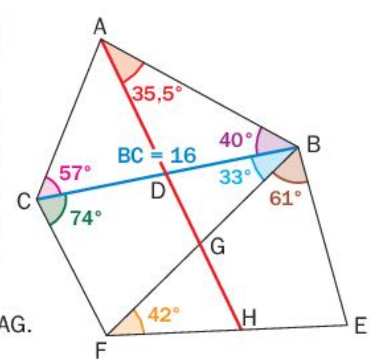
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

b. En raisonnant par disjonction des cas sur le signe de $k + \dfrac{AB^2}{4}$, justifier que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$ est soit vide, soit un cercle de centre I, soit le point I.

160 Triangulation

Afin d'estimer la longueur AG, on part d'une mesure connue (BC = 16 km) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues.

- Estimer la longueur AG.

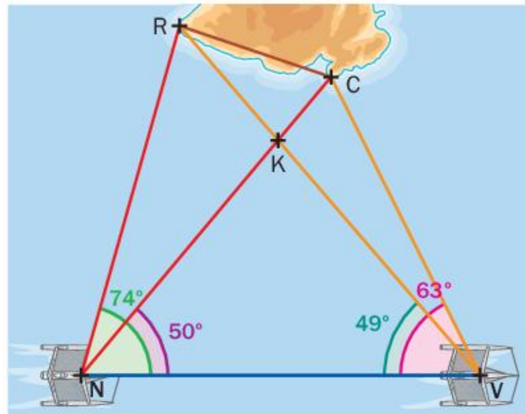


> **Aide**
> Calculer AB, puis AD et BD.
> Procéder de même dans BCF et BEF.
> ▶ ex. 143 p. 244.

> **Info**
> C'est avec un tel procédé qu'a été mesuré le méridien lors de la détermination du mètre (le méridien devant mesurer 20 000 km).

SVT et Sciences de l'ingénieur

161 Afin d'estimer la longueur d'un récif représenté par le segment [RC], un navire réalise quatre relevés d'angle : deux depuis la position N, deux depuis la position V.
On utilisera la **loi des sinus** (▶ ex. 143 p. 244).



1. a. On note K le point d'intersection des droites (RV) et (CN), et ℓ la longueur NV. Déterminer les longueurs NK et KV.
b. En déduire les longueurs CK et RK.
c. Déterminer $\widehat{CKR}$.
En déduire la longueur du récif en fonction de ℓ = NV.

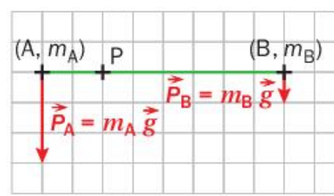
2. Entre les deux relevés, il s'est écoulé 8 minutes.
Sachant que le bateau avance à une vitesse de 30 nœuds, déterminer la longueur RC (en m).

Aide 1 nœud = 1 mille marin par heure = 1 852 mètres par heure.

Fiche métier
Océanologue
hatier-clic.fr/ma1247a

Physique-Chimie

162 Centres de gravité
Le centre de gravité de deux objets ponctuels A et B, de masses respectives m_A et m_B, est le point G défini par la relation vectorielle :
$$m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$



1. Deux personnes sont sur une bascule, représentée par le segment [AB], dont le point d'appui est le point P. La bascule est « à l'horizontale » si le point P est confondu avec le centre de gravité des objets A et B (modélisant les personnes), de masses respectives m_A et m_B.
a. Pour une planche mesurant 1 m, déterminer où devrait se situer le point d'appui si deux personnes de masse 50 kg et 75 kg sont placées aux extrémités.
b. Où placer le point d'appui si on place aux extrémités deux objets, dont l'un a une masse quatre fois supérieure à l'autre ?

2. Les objets du système solaire avec une masse suffisante (le Soleil, les planètes, les planètes naines, certains satellites) sont assimilables à des boules de constitution homogène. On les modélisera ici par des points.
a. Le Soleil, modélisé par le point S, a une masse $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg ; la Terre, modélisée par le point T, a une masse $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$ kg. Ils sont situés à une distance moyenne de 150 millions de kilomètres l'un de l'autre. On note G le centre de gravité du système Soleil-Terre.
Déterminer la distance SG et la comparer au rayon moyen du Soleil (7 millions de kilomètres).
b. Jupiter, modélisée par le point J, a une masse $M_{♃} = 2 \times 10^{27}$ kg et est située à une distance moyenne de 800 millions de kilomètres du Soleil. On note H le centre de gravité du système Soleil-Jupiter.
Déterminer la distance SH et la comparer au rayon moyen du Soleil.
c. Pluton, modélisée par le point P, a une masse $M_{♇} = 1{,}3 \times 10^{22}$ kg. L'un de ses satellites, Charon, de masse $1{,}5 \times 10^{21}$ kg, est situé à une distance moyenne de 19 000 km de Pluton. On note E le centre de gravité du système Pluton-Charon.
Déterminer la distance PE et la comparer au diamètre moyen de Pluton (1 200 km).

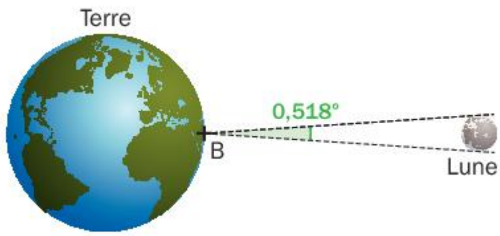
Fiche métier
Astrophysicien·ne
hatier-clic.fr/ma1247b

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

163 La distance Terre-Lune

Le rayon moyen de la Terre est 6 400 km.



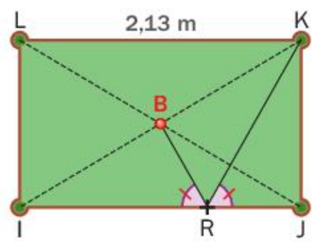
Le diamètre terrestre est estimé à 3,5 diamètres lunaires.

- Sachant qu'un observateur voit la Lune avec un angle de 0,518° lors d'une éclipse lunaire, quelle est la distance Terre-Lune ?

164 Dimensions d'un billard

Une boule B se situe au centre d'un billard IJKL.

En tapant la boule, elle rebondit sur le côté [IJ] en R, puis entre dans le trou K de sorte que (RK) et (JL) soient perpendiculaires.



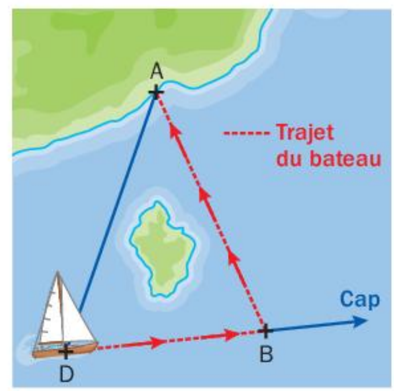
- La longueur du billard est 2,13 m. Quelle est la largeur du billard ?

Défis

165 Horaires du bateau

Un bateau avance à 21 km/h. Il veut accoster au point d'arrivée A.

Du fait de la présence de récifs, il devra passer par le point B pour se rendre à destination. À 10 heures, le bateau est au point D et constate que le point A se trouve à 60° à l'ouest par rapport à son cap. À 10 h 20, le bateau arrive en B. Juste avant de virer vers son but, le capitaine constate que le point A se trouve cette fois à 105° à l'ouest par rapport à son cap.



- À quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?

Aide On pourra utiliser la loi des sinus démontrée dans l'exercice 143 p. 244.

En groupe

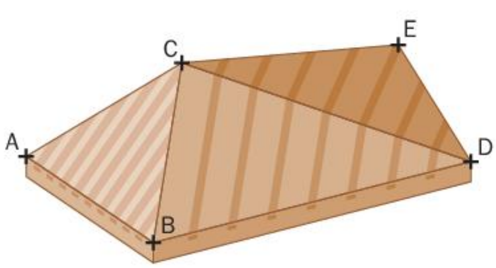
166 Rénovation d'un toit

On souhaite rénover les quatre pans triangulaires d'un toit.

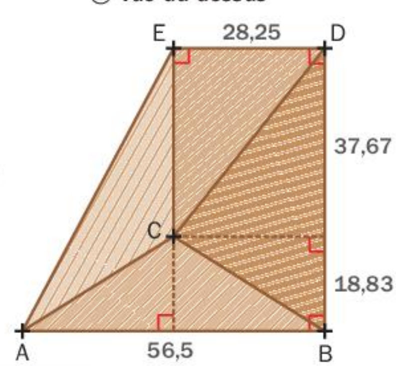
La hauteur des points A, B et D par rapport au sol est 1 000 cm, celle du point E est 1 135 cm et celle du point C est 1 180 cm.

- Calculer l'aire totale du toit.

① Vue en perspective



② Vue du dessus



Aide
- On pourra utiliser la formule de Héron : $\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $\mathcal{S}$ est l'aire d'un triangle de côté a, b et c, et p est son demi-périmètre (▶ ex. 157 p. 246).
- La vue de dessus ne donne pas les bonnes longueurs car elle ne tient pas compte de la différence d'altitude.

Répartissons-nous les tâches pour être plus efficaces !

CHAPITRE 9

Géométrie repérée

Les coordonnées de points dans un repère et les équations de droites, cercles et paraboles sont utiles pour résoudre des problèmes géométriques à l'aide d'outils numériques. Elles peuvent, par exemple, nous aider à déterminer l'épicentre d'un séisme en utilisant les ondes émises qui se propagent à plusieurs endroits de la planète.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1 et 2
- Quiz 18 à 21
- Les incontournables 36 à 40
- Entraînement 49 à 65

OBJECTIF 2

Déterminer et reconnaître une équation de cercle

- Activités 2 et 3
- Cours 2
- Savoir-faire 3 et 4
- Quiz 22 à 24
- Les incontournables 41 à 46
- Entraînement 66 à 82

OBJECTIF 3

Étudier les propriétés des paraboles

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 5
- Quiz 25 à 29
- Les incontournables 47 et 48
- Entraînement 83 à 98

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

Proposer des phrases en utilisant les mots ou groupes de mots suivants.

droite VECTEUR DIRECTEUR *points alignés* droites parallèles ÉQUATIONS DE DROITES axe des ordonnées vecteurs colinéaires *distance* **cercle**

Rappels

Étude de configurations

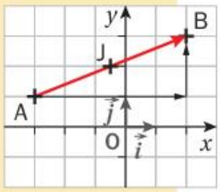
$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan muni d'un repère.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du **milieu** du segment [AB] sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Si le repère est **orthonormé**, alors la **distance** entre A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

A(–3 ; 1) et B(2 ; 3) sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Les coordonnées du milieu J de [AB] sont :

$$x_J = \frac{(-3)+2}{2} = \frac{-1}{2} \text{ et } y_J = \frac{1+3}{2} = 2.$$

- $AB = \sqrt{(2-(-3))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

Équations de droites

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- Une **équation de droite** est une égalité vérifiée par les coordonnées $(x ; y)$ de tous les points de la droite.
- Une équation de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ (où a, b et c sont des nombres réels avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) est appelée **équation cartésienne** de droite.
- Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

Exemple

- Dans l'exemple précédent, le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
- Une équation cartésienne de (AB) est alors :

$$2x - 5y + c = 0 \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

$A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient cette équation :

$$2x_A - 5y_A + c = 0 \Leftrightarrow 2 \times (-3) - 5 \times 1 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 11.$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc :

$$2x - 5y + 11 = 0.$$

$-2x + 5y - 11 = 0$ est une autre équation cartésienne de (AB).

Vecteurs colinéaires et orthogonaux Chapitre 8

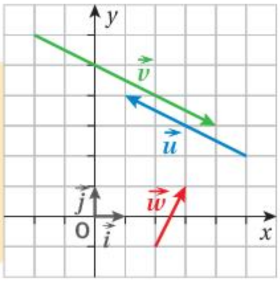
$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \det(\vec{u} ; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{ay - bx = 0}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{ax + by = 0}$.

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé.

- $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-4) \times (-3) - 2 \times 6 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \times 1 + (-3) \times 2 = 0$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.



Réactivation

Étude de configurations

1 M(3 ; 1), N(−1 ; −1) et P(1 ; 0) sont trois points du plan muni d'un repère.

a. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ et de $\overrightarrow{PN}$.

b. Que peut-on en conclure sur le point P ?

2 A(2 ; 1), B(−2 ; 3), C(−3 ; 1) et D(1 ; −1) sont des points du plan muni d'un repère orthonormé.

a. Calculer les coordonnées du milieu I de [AC].

b. Calculer les coordonnées du milieu J de [BD].

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point M(−2 ; 1) se trouve-t-il sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(1 ; 1) passant par B(2 ; 4) ?

4 On modélise l'Amérique du Sud par le triangle ABC dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. En déduire la superficie approximative, en km^2, de l'Amérique du Sud.

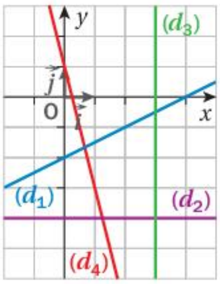
Équations de droites

5 Les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont tracées ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Pour chacune de ces droites :

a. lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur directeur ;

b. déterminer une équation cartésienne.



6 A(−3 ; 6), B(1 ; −2) et C(2 ; −4) sont des points du plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

3. (d) est la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$.

a. Démontrer que la droite (d) est sécante à (AB).

On pourra montrer que ces droites ne sont pas parallèles.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (AB).

Vecteurs colinéaires et orthogonaux

Dans les exercices 7 et 8, le plan est muni d'un repère orthonormé.

7 **1.** Indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$.   **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

2. Indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.   **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-3\end{pmatrix}$.

8 **a.** Quel est le nombre réel a pour lequel les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2a-1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires ?

b. Quels sont les nombres réels b pour lesquels les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}b-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}b+2\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux ?

9 La toile représentée ci-contre mesure 48 cm de longueur et 34 cm de largeur.

Le cadre qui l'entoure a une épaisseur constante de 3 cm.

• Le centre du tableau, noté A, est-il aligné avec les sommets intérieur et extérieur du cadre, notés B et C ?

Aide On pourra introduire un repère bien choisi et considérer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Corrigés p. 368

Activités

Fichier logiciel
Activité 2
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

1 Le bateau en détresse OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Un bateau modélisé ci-dessous par un point B est en train de couler. L'équipage souhaite se rendre le plus rapidement possible sur la plage près de la ville de Montalivet, dans le Sud-Ouest de la France.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(B\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, où l'unité est le kilomètre, on modélise le bord de mer par la droite (d) d'équation $7x - 5y - 50 = 0$.

- Quelle est la plus courte distance que les marins peuvent parcourir pour se rendre sur cette plage ? On notera $A(x\,;y)$ le point de la plage où ils doivent arriver.

OBJECTIF 2
Déterminer et reconnaître une équation de cercle

2 Épicentre d'un séisme

La Guyane française est une région d'outre-mer située sur la côte nord-est de l'Amérique du Sud.

On s'intéresse à deux stations d'enregistrement de tremblement de terre en Guyane : celle de Kourou et celle de Cayenne. Cayenne se trouve à 40 km à l'est et à 20 km au sud de Kourou.

Un même tremblement de terre a été ressenti dans ces deux villes. À l'aide de sismographes, son épicentre est enregistré à 80 km de Kourou et à 100 km de Cayenne.

On cherche à déterminer les positions possibles de l'épicentre E du séisme.

1. TICE **a.** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, placer les points K et C correspondant aux villes de Kourou et de Cayenne dans le repère orthonormé $\left(K\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\left\|\vec{i}\right\| = 1$ (en km).

b. Conjecturer les positions possibles de l'épicentre du séisme.

2. a. Montrer que si un point $E(x\,;y)$ est situé à 80 km de Kourou, alors ses coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 6\,400$ notée (1).

b. Écrire, de la même façon, une équation permettant d'indiquer que le point E se trouve à 100 km de Cayenne.

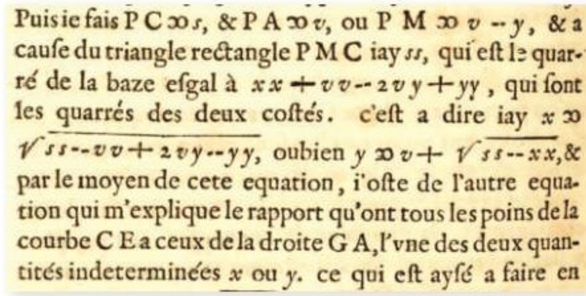
3. En déduire que les coordonnées du point E vérifient l'équation $y = 2x + 40$.

4. En remplaçant y par $2x + 40$ dans l'équation (1), conclure sur les valeurs possibles des coordonnées de l'épicentre.

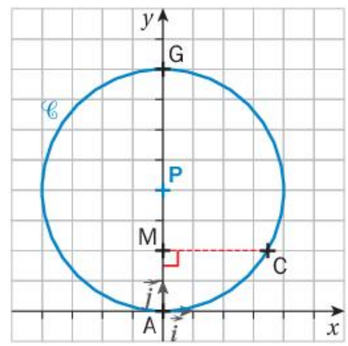
OBJECTIF 2
Déterminer et reconnaître une équation de cercle

3 Introduction des coordonnées cartésiennes

René Descartes (1596-1650) est connu pour avoir relié la géométrie à l'algèbre. Il a mis au point la méthode des coordonnées « cartésiennes » qui permet d'effectuer facilement des démonstrations de géométrie. Dans le texte ci-contre, extrait de *La Géométrie* publié en 1637, Descartes utilise :
– le symbole ∞ comme signe d'égalité ; par exemple $x = y$ s'écrit x ∞ y ;
– un double-tiret pour la soustraction ; par exemple $a - b$ s'écrit a -- b.


Puis ie fais P C ∞ *s*, & P A ∞ *v*, ou P M ∞ *v* -- *y*, & a cauſe du triangle rectangle P M C iay *ss*, qui eſt le quarré de la baze eſgal à *xx* + *vv* -- 2 *vy* + *yy*, qui ſont les quarrés des deux coſtés. c'eſt a dire iay *x* ∞ √*ss* -- *vv* + 2 *vy* -- *yy*, oubien *y* ∞ *v* + √*ss* -- *xx*, & par le moyen de cete equation, i'oſte de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées *x* ou *y*. ce qui eſt ayſé a faire en

Il considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre P et de diamètre [AG]. À tout point C(x ; y) de ce cercle, il associe un point M, projeté orthogonal de C sur l'axe (AG). Il utilise les coordonnées des points dans le repère d'origine A, comme sur la figure ci-contre.



1. En utilisant les notations de la première ligne du texte de Descartes, préciser les coordonnées des points M et P.

2. En suivant les indications de Descartes, démontrer que :
$$s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2.$$

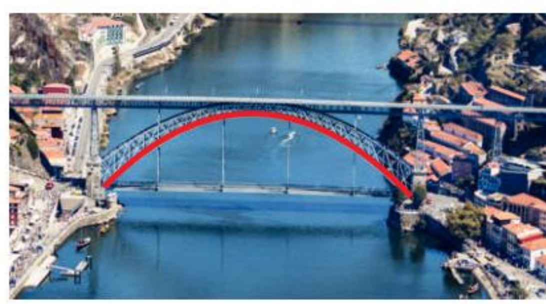
3. a. Que représente s pour le cercle ?
b. À quelle longueur correspond $x^2 + (y - v)^2$?
c. Déterminer les caractéristiques du cercle dont une équation est $x^2 + (y - v)^2 = s^2$.

4. René Descartes affirme que cette équation est équivalente à $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ ou $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$. Que peut-on penser de cette affirmation ?

OBJECTIF 3
Étudier les propriétés des paraboles

4 Symétrie d'une parabole

Le pont Dom-Luis est situé sur le fleuve Douro à Porto au Portugal. Son arc, souligné en rouge ci-contre, permet de soutenir la construction. Sa forme parabolique peut être modélisée dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ par une partie de la courbe représentative de la fonction f, polynôme du second degré, définie par $f(x) = -\frac{45}{7\,396}x^2 + \frac{45}{43}x - 45$.



1. a. TICE Construire cette courbe à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer une équation de son axe de symétrie.
b. Déterminer algébriquement les solutions réelles α et β de l'équation $f(x) = -45$, puis placer les points A(α ; –45) et B(β ; –45) sur la figure.
c. Recopier la phrase suivante en la complétant.
« L'axe de symétrie de la parabole passe par le point de coordonnées (... ; –45). »
d. En déduire une équation de l'axe de symétrie de cette parabole et comparer à la réponse donnée à la question **a**.
e. En utilisant l'équation de l'axe de symétrie ci-dessus, déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Généralisation
a. En reprenant la même démarche qu'à la question **1**, déterminer l'abscisse x_S du sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$.
b. En déduire les coordonnées du sommet S en fonction de a, b et c.

Cours

OBJECTIF 1 Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

Savoir-faire 1 et 2 p. 257-258

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

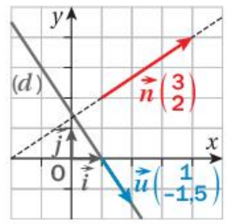
(d) est une droite et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).
On appelle **vecteur normal** à la droite (d) tout vecteur $\vec{n}$ non nul, orthogonal à $\vec{u}$.

Exemple

(d) est une droite et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1{,}5\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d).

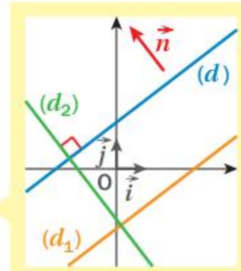
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est normal à (d) car il est orthogonal à $\vec{u}$.

En effet, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1 \times 3 + (-1{,}5) \times 2 = 0$.



Conséquences

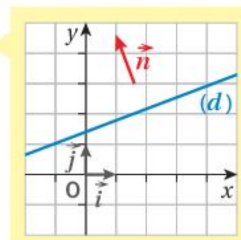
Pour tout vecteur $\vec{n}$ normal à (d) :
- $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(d_1) \Leftrightarrow (d) \mathbin{/\!/} (d_1)$;
- $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $(d_2) \Leftrightarrow (d) \perp (d_2)$.



Propriétés

a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.
- Si (d) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à (d).
- Réciproquement, si un vecteur $\vec{n}$ non nul de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite (d), alors une équation cartésienne de cette droite est de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration à compléter : exercice 99 p. 273



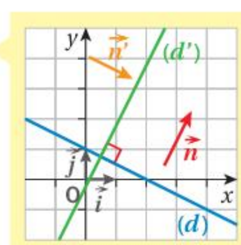
Exemples
- (d_1) est la droite d'équation $3x - 4y - 5 = 0$. Un vecteur normal à (d_1) est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.
- (d_2) est la droite d'équation $y = -2x + 7$.
Une équation cartésienne de (d_2) est $2x + y - 7 = 0$. Un vecteur normal à (d_2) est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Si $y = mx + p$ est l'équation réduite d'une droite (d), le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ est normal à (d).

Propriété

Les droites (d) et (d') admettent pour équation respective $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ avec a, b, c, a', b' et c' des nombres réels tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ et $(a' ; b') \neq (0 ; 0)$.
(d) et (d') sont **perpendiculaires** si et seulement si $\boldsymbol{aa' + bb' = 0}$.

Démonstration : exercice 100 p. 273

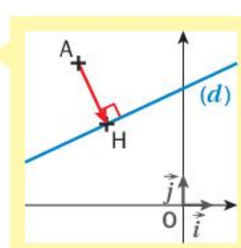


Exemple

Les droites d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et $-4x + 2y + 1 = 0$ sont perpendiculaires, car $1 \times (-4) + 2 \times 2 = 0$.

Propriété

A est un point n'appartenant pas à la droite (d).
Si **H est le projeté orthogonal de A** sur (d), alors le vecteur $\overrightarrow{AH}$ **est normal** à la droite (d).



Conséquence

On pourra ainsi déterminer les coordonnées de H connaissant celles de A, puis la distance AH.

OBJECTIF 2 Déterminer et reconnaître une équation de cercle

Savoir-faire 3 et 4 p. 259-260

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

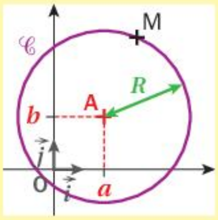
Propriété

A(a ; b) est un point et R un nombre réel strictement positif.
Une **équation du cercle $\mathscr{C}$** de centre A et de rayon R est :

$$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}.$$

En développant et en réordonnant, l'équation du cercle devient :

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0.$$



Si M est un point du cercle de centre A et de rayon R, alors $AM^2=R^2$.

Exemple

M(x ; y) est un point du plan.
M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A(4 ; –1) et de rayon 3 si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(x-4)^2+(y+1)^2=9.$$

C'est une équation du cercle $\mathscr{C}$ qui, en développant, s'écrit aussi :

$$x^2+y^2-8x+2y+8=0.$$

Tout cercle a une équation de la forme : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ mais toute équation de cette forme n'est pas nécessairement celle d'un cercle.

▶ Savoir-faire 4 p. 260

Propriété

S étant un nombre réel, l'ensemble des points M(x ; y) du plan qui vérifient l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=S$ est :

- **un cercle** de centre (a ; b) et de rayon $\sqrt{S}$ si $S > 0$;
- **le point** de coordonnées (a ; b) si $S = 0$;
- **l'ensemble vide si $S < 0$.**

Démonstration rédigée p. 272

Exemples

- $(x+6)^2+(y-3)^2=5$ est une équation du cercle de centre A(–6 ; 3) et de rayon $\sqrt{5}$.
- L'ensemble des points vérifiant l'équation $(x-1)^2+y^2=0$ est réduit au seul point de coordonnées (1 ; 0).
- L'ensemble des points vérifiant l'équation $(x+1)^2+(y-2)^2=-3$ est l'ensemble vide.
- L'ensemble des points vérifiant l'équation $x^2+y^2-10y+21=0$ est le cercle de centre B(0 ; 5) et de rayon 2.

On peut montrer que cette équation équivaut à l'équation : $x^2+(y-5)^2=4$.

Propriété

A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points distincts du plan.
Une **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est :

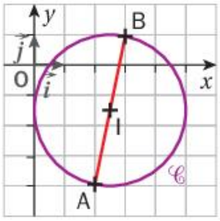
$$\boldsymbol{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}.$$

Démonstration : exercice 102 p. 273

Exemple

Sur la figure ci-contre, A(2 ; –4) et B(3 ; 1) sont deux points du plan.
Une équation du cercle de diamètre [AB] est :

$$(x-2)(x-3)+(y+4)(y-1)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-5x+3y+2=0.$$



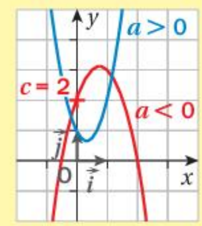
On peut utiliser une autre méthode pour obtenir l'équation de ce cercle : calculer le rayon IA et les coordonnées du centre I du cercle.

OBJECTIF 3 Étudier les propriétés des paraboles

Savoir-faire 5 p. 261

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;\vec{i},\vec{j}\right)$.
a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.
f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Le nombre réel c est l'ordonnée du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.



• Le signe de a indique l'orientation de la parabole.

Définition

La courbe représentative de la fonction polynôme du second degré f est appelée **parabole** d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Exemple

m est un nombre réel. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto (3m-2)x^2 + 4x + 1$ est une parabole lorsque $3m - 2 \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $m \neq \frac{2}{3}$.

Propriété

Pour tout nombre réel x, $f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right)$.

Démonstration : exercice 103 p. 273

Exemple

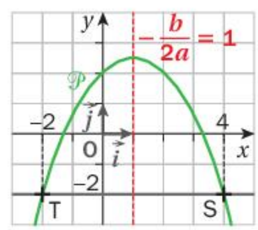
Pour la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$, on a $a = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ et $b = 1$.

Ainsi, $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times (-0{,}5)} = 1$.

En choisissant $x = 3$, on a :

$$f(1 + 3) = f(1 - 3) \Leftrightarrow f(4) = f(-2).$$

Les points S et T de la parabole d'abscisses respectives 4 et –2 ont donc la même ordonnée : –2.



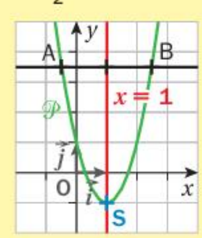
Propriété

▸ La parabole représentant la fonction polynôme du second degré f admet un **axe de symétrie**, parallèle à l'axe des ordonnées.

Une équation de cet axe est $x = -\frac{b}{2a}$.

▸ L'intersection de cet axe de symétrie avec la parabole est un point **S**, appelé le **sommet de la parabole**. Ses coordonnées sont $\left(-\frac{b}{2a}~;f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Lorsque deux points A d'abscisse a et B d'abscisse b ont la même image par la fonction f, une équation de l'axe de symétrie est $x = \frac{a+b}{2}$.



Exemple

La parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$.

Son sommet a pour coordonnées $(1~;-1)$ car $f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = -1$.

Propriété

Si la fonction f admet pour **forme canonique** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, alors l'axe de symétrie de sa parabole a pour équation $x = \alpha$ et son sommet a pour coordonnées $(\alpha~;\beta)$.

▸ Chapitre 3, p. 78.

Exemple

La parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x + 2)^2 + 1$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -2$.
Son sommet est le point S de coordonnées $(-2~;1)$.

1 Déterminer une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée

OBJECTIF 1
Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par le point A(2 ; –1) et perpendiculaire à la droite (d) d'équation :

$$3x - 2y + 4 = 0.$$

2. M(3 ; –1), N(–1 ; 2) et P(3 ; 4) sont trois points du plan. Déterminer :

a. une équation cartésienne de la hauteur (h) du triangle MNP issue de P ;

b. une équation cartésienne de la médiatrice (m) du segment [MN].

Solution

1. Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Comme (d) et (d') sont perpendiculaires, $\vec{u}$ est un vecteur normal à (d').

En notant $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (d'), on peut en déduire que $a = 2$ et $b = 3$. Donc (d') a pour équation $2x + 3y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

Comme A(2 ; –1) appartient à (d'), on a :

$$2 \times x_A + 3 \times y_A + c = 0 \Leftrightarrow 2 \times 2 + 3 \times (-1) + c = 0.$$

D'où $c = -4 + 3 = -1$, donc $\boxed{(d') : 2x + 3y - 1 = 0.}$

2. a. La hauteur issue du point P a pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - x_M\\y_N - y_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-3\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}.$$

Ainsi, son équation est de la forme $-4x + 3y + e = 0$ où e est un nombre réel à déterminer.

Comme $P \in (h)$, $-4 \times 3 + 3 \times 4 + e = 0$; d'où $e = 0$.

Ainsi $\boxed{(h) : -4x + 3y = 0.}$

b. La médiatrice (m) de [MN] a également pour vecteur normal $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

Son équation est de la forme $-4x + 3y + f = 0$ où f est un nombre réel à déterminer.

Le milieu I de [MN] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_M + x_N}{2}\,;\frac{y_M + y_N}{2}\right)$, donc $I\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.

Comme la droite (m) passe par I, on a $-4 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + f = 0$.

D'où $f = 2{,}5$. Ainsi $\boxed{(m) : -4x + 3y + 2{,}5 = 0.}$

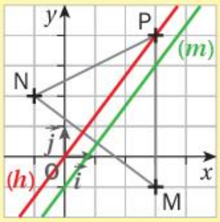
Un **vecteur directeur** à une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

A appartient à (d') donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Une **hauteur** passe par un sommet du triangle et est perpendiculaire au côté opposé.

Une **médiatrice** passe par le milieu d'un côté, et elle est perpendiculaire à ce côté.

Les droites (h) et (m) ont même vecteur normal ; elles sont donc parallèles.



Application

10 S(2 ; 3), T(4 ; –1) et U(–1 ; 4) sont trois points du plan. Déterminer :

a. une équation cartésienne de la droite (d') perpendiculaire à la droite (TU) passant par le point S ;

b. une équation de la hauteur issue de T dans STU ;

c. une équation de la médiatrice de [SU].

Les incontournables 36 à 38 p. 265

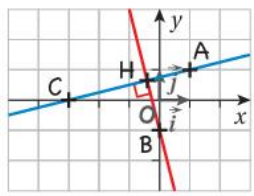
2 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

OBJECTIF 1
Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

A(1 ; 1), B(0 ; –1) et C(–3 ; 0) sont trois points du plan muni d'un repère orthonormé.

- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point B sur la droite (AC).

Solution



On pourra au préalable faire une figure pour vérifier ensuite la cohérence des résultats.

Le **projeté orthogonal** est le point d'intersection de la droite (AC) et de la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Étape 1 : On détermine une équation de la droite (AC).

Un vecteur directeur de (AC) est $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de (AC) est donc $-x+4y+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.

Comme A ∈ (AC), ses coordonnées vérifient cette équation : $-1+4\times1+c=0$.

Donc $c=-3$ et **(AC) : $-x+4y-3=0$.**

Le projeté orthogonal est l'intersection de deux droites (AC) et (BH) dont on va déterminer des équations.

Étape 2 : On détermine une équation de la droite (BH).

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal à la droite (BH).

Donc une équation de (BH) est $-4x-y+d=0$ où d est un nombre réel à déterminer. Comme B ∈ (BH), ses coordonnées vérifient cette équation :

$$-4\times0-(-1)+d=0\text{, donc } d=-1.$$

Ainsi (BH) : $-4x-y-1=0$; donc **(BH) : $4x+y+1=0$.**

On multiplie les deux membres par (–1). Cela permet de se ramener à des coefficients positifs.

Étape 3 : Le point H se trouve à la fois sur les droites (BH) et (AC).

Ses coordonnées vérifient donc le système d'équations de ces droites.

On résout donc :

$$\begin{cases}-x+4y-3=0\\4x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+4y=3 & (L_1)\\4x+y=-1 & (L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+16y=12 & (4\times L_1)\\4x+y=-1 & (L_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}17y=11 & (L_1+L_2)\\4x=-1-y & (L_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{11}{17}\\4x=-1-\dfrac{11}{17}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{11}{17}\\x=\dfrac{-28}{17\times4}=\dfrac{-7}{17}\end{cases}$$

Donc $\boxed{H\left(\dfrac{-7}{17};\dfrac{11}{17}\right)}$.

On résout le système par la **méthode de combinaison**. On multiplie la première ligne par 4, puis on additionne les deux lignes pour obtenir une équation à une seule inconnue. Le système pourrait aussi se résoudre par la méthode de substitution.

Application

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

11 Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

a. A(9 ; –3) et (BC) : $3x+2y-8=0$.

b. A(–3 ; –1) et (BC) : $y=-x+2$.

c. A(–2 ; –1), B(4 ; 4) et C (–2 ; –2).

12 On définit un triangle STU par S(4 ; 4), T(0 ; 1) et U(6 ; –2).

a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de S sur (TU).

b. Calculer les longueurs SH et TU.

c. En déduire l'aire du triangle STU.

Les incontournables 39 et 40 p. 265

3 Déterminer une équation de cercle

OBJECTIF 2
Déterminer et reconnaître une équation de cercle

A(2 ; –3), B(4 ; 1), C(0 ; –3) et D(2 ; 1) sont des points du plan muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du cercle décrit.

a. $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre A et de rayon 7.
b. $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre B et passant par C.
c. $\mathscr{C}_3$ est le cercle de diamètre [CD].
d. $\mathscr{C}_4$ est le cercle circonscrit au triangle BCD.

Solution

a. Une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = 7^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49.}$$

M$(x ; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}_1 \Leftrightarrow \text{AM}^2 = 7^2$.

b. On détermine le rayon du cercle $\mathscr{C}_2$ qui est CB : $\text{CB} = \sqrt{(4-0)^2+(1+3)^2} = \sqrt{32}$.
Une équation de $\mathscr{C}_2$ est donc $\boxed{(x-4)^2 + (y-1)^2 = 32.}$

Dans un repère orthonormé, on a : $\text{CB} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_3 - y_C)^2}$.

c. Une équation du cercle $\mathscr{C}_3$ est :

$$(x - x_C)(x - x_D) + (y - y_C)(y - y_D) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + (y+3)(y-1) = 0.$$

En développant, on obtient $\boxed{x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0.}$

d. Par définition, le centre du cercle $\mathscr{C}_4$, que l'on note E, est le point d'intersection des médiatrices du triangle BCD.

Les **médiatrices** sont les droites perpendiculaires aux côtés du triangle et passant par leur milieu : on peut donc en trouver une équation.

Étape 1 : La médiatrice (d') du segment [BD] a pour vecteur normal $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4-2\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, une équation de (d') est $2x + 0y + e = 0$ où e est un nombre réel à déterminer.
On note M le milieu de [BD], on obtient M(3 ; 1) par le calcul.
En remplaçant les coordonnées de M dans l'équation, on a :

$$2 \times 3 + e = 0 \Leftrightarrow e = -6.$$

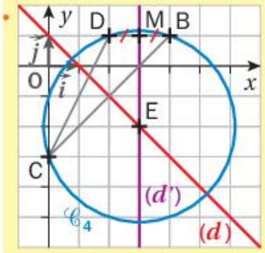
Une équation de (d') est $2x - 6 = 0$, c'est-à-dire $(d') : x = 3$.

Les **coordonnées du milieu** de [AB] sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Étape 2 : On détermine, de la même façon, une équation de la droite (d) médiatrice du segment [CB]. On obtient $(d) : x + y - 1 = 0$.

Étape 3 : Comme $\text{E} \in (d') \cap (d)$: $x_E = 3$ et $x_E + y_E - 1 = 0$.
Donc $3 + y_E - 1 = 0 \Leftrightarrow y_E = 1 - 3 = -2$.
On en conclut que les coordonnées de E sont (3 ; –2).

$(d) \cap (d')$ correspond à l'intersection des deux droites.



Étape 4 : On détermine le rayon du cercle $\mathscr{C}_4$: EB.
$\text{EB}^2 = (3-4)^2 + (-2-1)^2 = 10$.
Ainsi, une équation de $\mathscr{C}_4$ est $\boxed{(x-3)^2 + (y+2)^2 = 10.}$

Application

13 A(5 ; –1), B(2 ; 0), C(0 ; 2) et D(0 ; 0) sont des points du plan muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du cercle décrit.
a. $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre A et de rayon 4.
b. $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre A et passant par B.
c. $\mathscr{C}_3$ est le cercle de diamètre [AB].
d. $\mathscr{C}_4$ est le cercle circonscrit au triangle BCD.

14 Déterminer une équation du cercle passant par les points B(2 ; 5), C(4 ; –1) et D(0 ; 1).

Les incontournables 41 à 43 p. 265

Vidéo
Déterminer les caractéristiques d'un cercle
hatier-clic.fr/ma1260

OBJECTIF 2
Déterminer et reconnaître une équation de cercle

4 Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser le centre Ω et le rayon de ce cercle. Si non, préciser l'ensemble des points M(x ; y) obtenu.

a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$
b. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
d. $2x^2 + 2y^2 + x = 0$

Méthode
On écrit l'équation donnée sous la forme :
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = S$.
Il y a alors trois cas possibles : $S > 0$, $S = 0$ ou $S < 0$.

Solution

a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-(-2))^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-(-2))^2 = 25 = 5^2$

On retrouve une équation de cercle : le cercle de centre $\Omega(1 ; -2)$ et de rayon 5.

On regroupe les termes en x et les termes en y, puis on les écrit sous **forme canonique** :
$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$.

On fait apparaître un carré pour déterminer le rayon du cercle.

b. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle.
L'ensemble des points (x ; y) vérifiant l'équation $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ est réduit au seul point de coordonnées $(-2 ; 1)$.

La somme de deux carrés est nulle lorsque chacun des termes est nul.
▶ Démonstration rédigée, p. 272.

c. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = -9$

$-9 < 0$, donc ce n'est pas l'équation d'un cercle.
L'ensemble des points (x ; y) vérifiant l'équation $(x-1)^2 + (y+2)^2 = -9$ est l'ensemble vide.

La somme de deux carrés ne peut pas être négative.
En posant A(1 ; −2) et M(x ; y), l'équation équivaut à $AM^2 = -9$.

d. $2x^2 + 2y^2 + x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{x}{2} + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + (y-0)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Il s'agit d'une équation de cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{4} ; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{4}$.

Comme les coefficients devant x^2 et y^2 sont égaux mais différents de 1, on simplifie l'équation pour se ramener à $x^2 + y^2 + \ldots$

Application

15 Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon de ce cercle. Si non, préciser l'ensemble des points M(x ; y) obtenu.

a. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$
b. $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 4x - 5y + 30 = 0$
d. $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 4 = 0$
e. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
f. $2x^2 - 5x + 2y^2 + 6y = 1$

16 Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 8y + m = 0$ est une équation de cercle.

Les incontournables 44 à 46 p. 265

5 Déterminer les caractéristiques d'une parabole

OBJECTIF 3
Étudier les propriétés des paraboles

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les équations suivantes sont-elles des équations de parabole ? Si oui, préciser une équation de leur axe de symétrie et les coordonnées de leur sommet.

a. $y = 2x^2 - 8x + 3$ **b.** $y = 2(x + 1)^2 - 5$
c. $y = -2(x - 3)(x + 5)$ **d.** $2y = 6x^2 + 4x - 3$

Solution

a. $y = 2x^2 - 8x + 3 = ax^2 + bx + c = f(x)$ avec $a = 2$, $b = -8$ et $c = 3$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_1$ dont l'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2.}$

Les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}_1$ sont $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
avec $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$.
Le sommet de $\mathscr{P}_1$ est donc le point de coordonnées $\boxed{(2 ; -5).}$

On reconnaît ici la **forme développée** d'une fonction polynôme du second degré.
▶ Chapitre 3

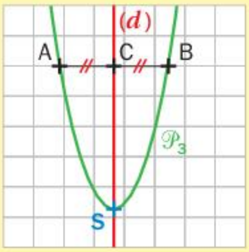
b. $y = 2(x + 1)^2 - 5 = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = -1$ et $\beta = -5$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_2$ dont l'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = \alpha = -1.}$
Les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}_2$ sont $(\alpha ; \beta)$, soit $\boxed{(-1 ; -5).}$

On reconnaît ici la **forme canonique** d'une fonction polynôme du second degré.

On reconnaît ici la **forme factorisée** d'une fonction polynôme du second degré.

c. $y = -2(x - 3)(x + 5) = a(x - x_1)(x - x_2) = f(x)$ avec $a = -2$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -5$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_3$.
Les racines de f sont 3 et -5, donc la parabole passe par les points A(3 ; 0) et B(-5 ; 0). L'axe de symétrie (d) de $\mathscr{P}_3$ passe par le milieu C du segment [AB] de coordonnées (-1 ; 0). Son équation est donc $\boxed{x = -1.}$
Le sommet S de la parabole est sur l'axe (d), donc $x_S = -1$ et
$y_S = f(x_S) = f(-1) = -2 \times (-1 - 3)(-1 + 5) = 32$.
Les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}_3$ sont $\boxed{(-1 ; 32).}$

Lorsque deux points A et B d'une parabole ont même ordonnée, alors on retrouve facilement son axe de symétrie qui est la médiatrice de [AB].



d. $2y = 6x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow y = 3x^2 + 2x - \frac{3}{2} = ax^2 + bx + c = f(x)$ avec $a = 3$,
$b = 2$ et $c = -\frac{3}{2}$. C'est une équation de la parabole $\mathscr{P}_4$ dont l'axe de symétrie a pour équation $\boxed{x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.}$
Les coordonnées de son sommet sont $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ avec
$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{6}$.
Donc le sommet de $\mathscr{P}_4$ est le point de coordonnées $\boxed{\left(-\frac{1}{3} ; -\frac{11}{6}\right).}$

On divise les deux membres de l'équation par le coefficient devant y afin de se ramener à une équation du type : $y = ax^2 + bx + c$: forme développée d'une fonction polynôme du second degré.

Application

17 Les équations suivantes sont-elles des équations de parabole ? Si oui, préciser une équation de leur axe de symétrie et les coordonnées de leur sommet.

a. $y = -5x^2 - 6x - 8$ **b.** $y = -3(x - 2)^2 + 4$ **c.** $y = 4(x + 3)(x - 8)$ **d.** $12x^2 + 4y + 8x + 1 = 0$

Les incontournables 47 et 48 p. 265

RETENIR L'ESSENTIEL...

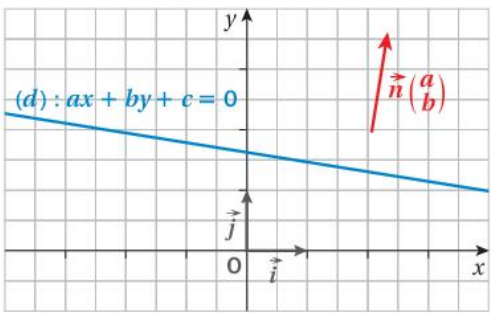
Fiche de cours

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Droites

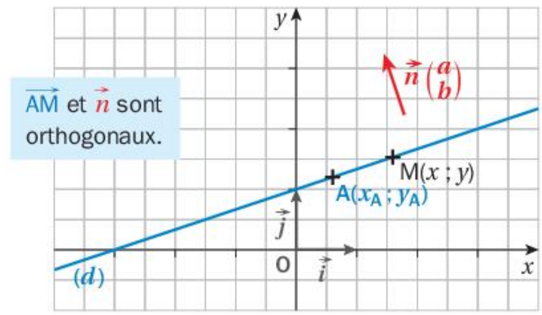
a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

$ax + by + c = 0$
est une **équation cartésienne** de la droite (d)
$\Leftrightarrow$
le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul est **normal à** (d)



Équation de la **droite** (d)
passant par A de **vecteur normal** $\vec{n}$

$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$

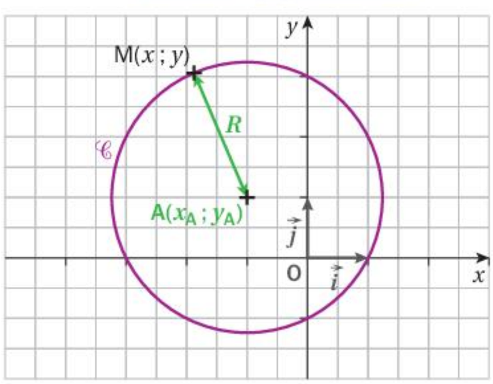


▶ Cours 1 p. 254

Cercles

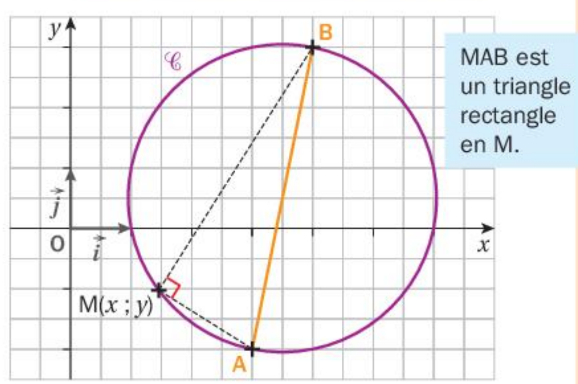
Équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon R

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM^2 = R^2$
$\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$



Équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$
$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$



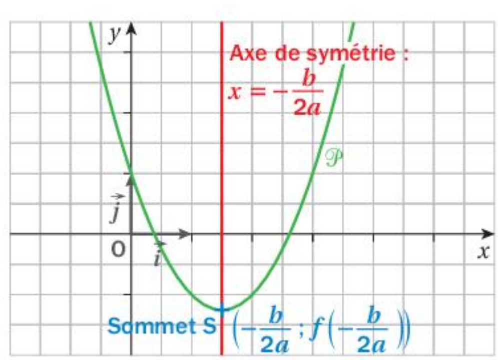
▶ Cours 2 p. 255

Paraboles

a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.
La **parabole** $\mathscr{P}$ qui représente la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet :

– un **axe de symétrie** d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$;

– un **sommet S** de coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$.



▶ Cours 3 p. 256

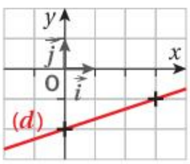
... ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

	A	B	C	D
18 Un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est :	$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\vec{w}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$	$\vec{z}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$	$\vec{p}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$
19 Un vecteur normal à la droite (d) ci-dessous est : 	$\vec{r}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$	$\vec{s}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{t}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
20 Un vecteur normal à la droite (d) d'équation $5x-2y+3=0$ est :	$\vec{r}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$	$\vec{s}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$	$\vec{t}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$
21 La droite d'équation $7x+3y-1=0$ est perpendiculaire à :	la droite (d_1) d'équation $3y+7x-1=0$.	la droite (d_2) d'équation $3x+7y+4=0$.	la droite (d_3) d'équation $7y-3x-9=0$.	la droite (d_4) d'équation $3x-7y+5=0$.
22 Le cercle de centre A$(-3\ ;5)$ et de rayon 2 a pour équation :	$(x-3)^2+(y+5)^2=4$	$(x+3)^2+(y-5)^2=4$	$(x+3)^2+(y-5)^2=2$	$(x-3)^2+(y+5)^2=2$
23 L'ensemble des points M$(x\ ;y)$ vérifiant l'équation $x^2+y^2-2x+10=0$ est :	le cercle de centre $\Omega(1\ ;2)$ et de rayon 3.	le cercle de centre $\Omega(1\ ;0)$ et de rayon 3.	un point.	l'ensemble vide.
24 Le cercle de diamètre [AB] avec A$(1\ ;2)$ et B$(-2\ ;3)$ a pour équation :	$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-3)^2$	$(x-1)(x-2)+(y+2)(y-3)=0$	$(x-1)(x+2)+(y-3)(y-2)=0$	$x^2+y^2+x-5y+4=0$
25 L'ensemble des points M$(x\ ;y)$ vérifiant l'équation $y^2=-x^2+4x+1$ est :	un cercle.	une parabole.	une droite.	un point.
26 Le point $(2\ ;3)$ est le sommet de la parabole d'équation :	$y=-5x^2+20x-17$	$y=4(x+2)^2+3$	$y=8(x-2)^2+3$	$y=3x^2-12x+16$
27 La droite d'équation $x=-5$ est l'axe de symétrie de la parabole d'équation :	$y=3(x+5)^2+1$	$y=(x-5)^2+2$	$y=2x^2-20x+7$	$y=5x^2-5$
28 Si f est une fonction représentée par une parabole dont la droite d'équation $x=-3$ est l'axe de symétrie, on a :	$f(-3)=f(3)$	$f(-1)=f(2)$	$f(-3)=0$	$f(-7)=f(1)$
29 L'ensemble des points M$(x\ ;y)$ vérifiant l'équation $x^2+2x+y=3$ est :	un cercle.	une parabole.	une droite.	un point.

Corrigés p. 368

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

30 Parlons stratégies ! À l'oral

Dans chaque cas, déterminer une équation de la droite (d') passant par le point A(1 ; –2) et perpendiculaire à la droite (d). Expliquer la **stratégie** choisie.

a. (d) est la droite qui passe par le point B(–3 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

b. (d) est la droite qui passe par les points C(4 ; 1) et D(–3 ; 3).

c. (d) est la droite qui passe par le point E(–2 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

d. Une équation de la droite (d) est $3x + 5y - 7 = 0$.

Différentes stratégies pour déterminer une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée

Stratégie 1
J'utilise un vecteur directeur de (d) comme vecteur normal à (d').

Stratégie 2
J'utilise un vecteur normal à (d) comme vecteur directeur de (d').

Stratégie 3
J'utilise la propriété sur les équations de droites perpendiculaires.

J'ai une **autre stratégie** !

31 Parlons méthode ! À l'oral

Parmi les équations ci-dessous, on trouve, entre autres, des équations de droites, de cercles et de paraboles.
Déterminer, si possible, la figure associée à chacune d'elles. On pourra utiliser les **méthodes** ci-contre.

a. $y = -x^2 + 9$

b. $y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0$

c. $y^2 + x^2 + 4y - 5 = 0$

d. $y - 4 = -3x$

e. $x^2 + y^2 + 2x + 6 = 0$

f. $3x^2 - 4x - 2y = 0$

g. $2x^2 + 2y^2 - 9 = 0$

h. $y^2 = -x^2 + 4y - 4$

Méthodes pour reconnaître la figure associée à une équation

a, b, c, α et β sont des nombres réels.

Si je peux écrire l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$, alors il s'agit d'une **droite**.

Si je peux écrire l'équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors il s'agit d'une **parabole**.

Si je peux écrire l'équation sous la forme $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R$ avec $R > 0$, alors il s'agit d'un **cercle**.

32 En moins d'une minute !

1. Déterminer une équation de la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par le point A.

a. A(1 ; –1) et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. **b.** A(2 ; 5) et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

2. Déterminer une équation de la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point B.

a. B(2 ; –3) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. **b.** B(1 ; –2) et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

33 Une méthode appropriée à la description

Déterminer une équation du cercle décrit.

a. Le cercle est de centre I(2 ; 5) et passe par le point H(1 ; –1).

b. Le cercle a pour diamètre [JK] avec J(2 ; –3) et K(3 ; 5).

c. Le cercle passe par les points M(4 ; 1), N(0 ; 6) et P(–10 ; –2).

34 En moins d'une minute ! À l'oral

Déterminer la nature de la figure décrite par l'ensemble des points M$(x\,;\,y)$ tels que :

a. $-8x^2 + 5x + y = 0$

b. $3x + y = -5$

c. $y^2 + (x-7)^2 - 9 = 0$

d. $y^2 + x^2 + 6x + 9 = 0$

35 Chacun sa méthode

Déterminer une équation de la parabole en utilisant dans chaque cas une méthode différente.

a. La parabole est de sommet S(–4 ; –2) et passe par le point R(–3 ; 1).

b. La parabole passe par les points J(0 ; 3), K(3 ; 4,5) et L(–2 ; 7).

c. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse –2 et 0,5 et passe par le point M(0 ; –2).

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Déterminer une équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée

36 Déterminer un vecteur normal à chacune des droites définies ci-dessous.

a. (d) passe par le point A(3 ; –4) et a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$.

b. (d) est la droite passant par les deux points B(–2 ; 4) et C(0 ; 1).

c. (d) est la droite d'équation $x - 3y - 11 = 0$.

d. (d) est la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x + 2$.

37 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par K(2 ; –5) et perpendiculaire à la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$.

38 A(–1 ; 3), B(2 ; 1) et C(–2 ; 2) sont trois points du plan.

1. Déterminer une équation de la médiatrice :

a. du segment [AB] ;

b. du segment [AC].

2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

39 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A(1 ; 4) sur la droite (d) d'équation :

$$x + 3y - 7 = 0.$$

40 On définit un triangle DEF tel que D(–1 ; 4), E(2 ; 1) et F(–2 ; 1).

a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de F sur (DE).

b. Calculer la longueur FH.

c. En déduire l'aire du triangle DEF.

Déterminer une équation de cercle

41 Dans chaque cas, déterminer une équation du cercle défini par les conditions données.

a. Le cercle de centre $\Omega(1 ; -7)$ de rayon 5.

b. Le cercle de centre $\Omega(-2 ; -1)$ et passant par le point A(1 ; 3).

c. Le cercle de diamètre [BC] avec B(3 ; 5) et C(–8 ; 6).

42 D(–6 ; –6), E(9 ; 3) et F(6 ; 8) sont trois points du plan.

a. Démontrer que le triangle DEF est rectangle.

b. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle DEF.

43 G(5 ; 1), H(–3 ; 1) et I(0 ; 6) sont trois points du plan.

• Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle GHI.

Déterminer les caractéristiques d'un cercle

44 Dans chaque cas, indiquer le centre et le rayon du cercle défini par l'équation donnée.

a. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$ **b.** $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

c. $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ **d.** $x^2 + (y + 2)^2 = 3$

e. $x^2 + y^2 - 8 = 0$ **f.** $4x^2 + 4(y - 2)^2 = 9$

45 Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui, préciser les caractéristiques du cercle.

a. $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$

b. $x^2 + 5x + y^2 - 10y = -8$

c. $x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

d. $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$

e. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

f. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$

46 Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$ est une équation de cercle.

Déterminer les caractéristiques d'une parabole

47 Dans chaque cas, indiquer les coordonnées du sommet de la parabole définie par l'équation donnée.

a. $y = 3x^2 - 2x + 1$ **b.** $y = 4(x + 5)^2 - 1$

c. $y = (x - 2)(x + 4)$ **d.** $y = -2x(x - 1) - 7$

48 Dans chaque cas, indiquer si la droite d'équation $x = -3$ est l'axe de symétrie de la parabole définie par l'équation donnée.

a. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$ **b.** $y = (x - 3)^2 + 4$

c. $y = -2(x + 3) + x^2$ **d.** $y = -2(x + 1)^2 - 3$

Corrigés p. 368

OBJECTIF 1 Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

Savoir-faire 1 et 2 p. 257-258

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Questions FLASH

49 QCM

La droite (d) d'équation cartésienne $2x - 3y + 2 = 0$ admet pour vecteur normal :

a. $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

d. $\vec{n_4}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ **e.** $\vec{n_5}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ **f.** $\vec{n_6}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

50 Vrai ou faux ?

(d_1) et (d_2) sont deux droites perpendiculaires du plan.

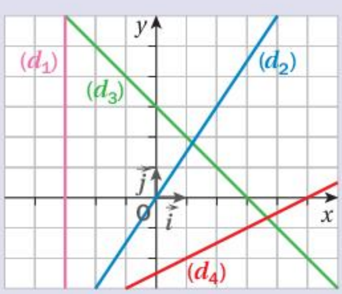
a. « Tout vecteur normal à la droite (d_1) est normal à la droite (d_2). »

b. « Il existe un vecteur qui est normal à la droite (d_1) et à la droite (d_2). »

c. « Tout vecteur directeur de la droite (d_1) est normal à la droite (d_2). »

d. « Il existe une droite (d_3) qui admet un même vecteur normal que la droite (d_1). »

51 Déterminer un vecteur normal à chacune des droites tracées ci-dessous.



52 Dans chaque cas, indiquer si les droites (d) et (d') sont parallèles, perpendiculaires, ou sécantes non perpendiculaires.

a. $(d) : 2x + 3y - 5 = 0$ et $(d') : -3x + 2y + 14 = 0$.

b. $(d) : -4x + 3y + 1 = 0$ et $(d') : 8x - 6y + 5 = 0$.

53 Vrai ou faux ?

A(2 ; 3), B(−3 ; 1), C(−1 ; 5) et D(−2 ; −3) sont des points du plan.

a. « Les droites (CB) et (AC) sont perpendiculaires. »

b. « Les droites (AC) et (AD) sont perpendiculaires. »

54 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point A.

a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et A(1 ; 2). **b.** $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et A(3 ; 1).

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et A(−5 ; 2). **d.** $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et A(−1 ; 0).

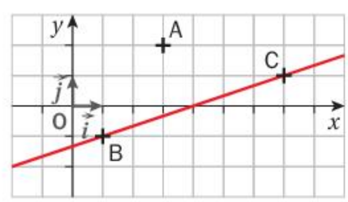
55 $-2x + 5y + 12 = 0$ est une équation de la droite (d) et A(3 ; −7) est un point du plan.

a. Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) et un vecteur normal à la droite (d).

b. Déterminer une équation de la droite (d') perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (d').

56 A, B et C sont trois points du plan, définis par la figure ci-dessous.



a. Déterminer un vecteur normal à la droite (BC).

b. Déterminer une équation de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A.

c. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite (BC).

d. Calculer la longueur AH.

57 Médiatrice d'un segment

A(3 ; 2) et B(5 ; 6) sont deux points du plan.

- Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

58 Hauteurs dans un triangle

A(1 ; 1), B(−1 ; 5) et C(4 ; 1) sont trois points du plan.

a. Déterminer une équation de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B du triangle ABC.

b. En déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

Info

L'**orthocentre** est le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 62, 64 et 65
Manuel numérique enseignant

★★

59 De la réponse à la question (et vice-versa)

Cléo a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

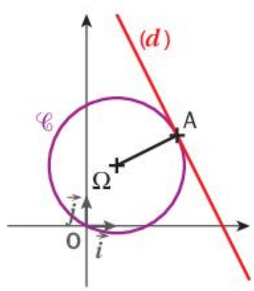
Le vecteur directeur de la droite (d) est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$,
c'est donc $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et donc ce vecteur est le vecteur
normal à la droite (d').
L'équation de la droite (d') est $-4x + 3y + c = 0$.
Comme A appartient à la droite (d'), on a
$-4 \times 2 + 3 \times (-1) + c = 0$, donc $c = 8 + 6 = 14$.
L'équation de (d') est donc $-4x + 3y + 14 = 0$.

a. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Cléo.
b. Identifier toutes les erreurs commises par Cléo.

Maths à l'oral
Expliquez et corrigez chacune des erreurs identifiées.

60 Tangente à un cercle

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre $\Omega(1 ; 2)$ et passe par le point $A(3 ; 3)$.



• Déterminer une équation de la droite (d) tangente au cercle au point A.

Aide Une tangente est perpendiculaire au rayon issu du point de tangence.

61 Lieu de points

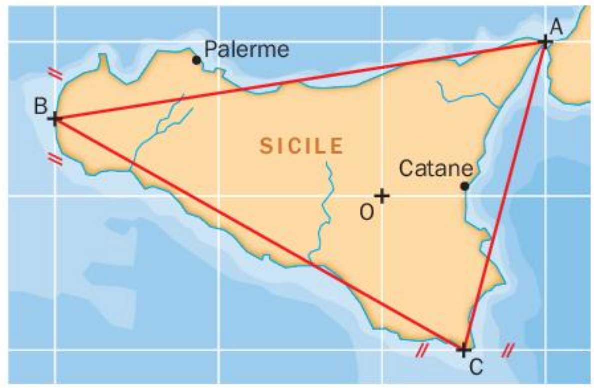
$A(-4 ; 2)$ et $B(-1 ; 3)$ sont deux points du plan.
a. Déterminer un vecteur normal à la droite (AB).
b. On pose $M(x ; y)$. Calculer, en fonction de x et de y, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
c. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 5$ est une droite perpendiculaire à (AB).

62 IN ENGLISH ▸ p. 381

$A(2 ; 5)$ and $B(1 ; 2)$ are two points on a x-y plane.
1. Find the equation satisfied by the point $M(x ; y)$ such that $MA^2 - MB^2 = 3$ (E).
2. TICE **a.** Plot the points A, B and the locus (E) with graphing tools.
b. What do you notice about (E) and the line (AB)?
c. Validate or correct your conjecture.

63 Superficie de la Sicile

Pour calculer la superficie de la Sicile, on la modélise par un triangle ABC.
Un point O est placé sur la carte ci-dessous, sur laquelle la longueur de chaque côté d'un carreau est 95 km.



a. En se plaçant dans un repère orthonormé d'origine O, déterminer les coordonnées des points A, B et C.
b. Déterminer une équation de la droite (AB).
c. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB).
d. Calculer AB et CH, puis en déduire une valeur approchée de la superficie de la Sicile au km^2 près.

64 PROGRAMMATION python

1. Écrire un algorithme qui précise la position relative de deux droites (d) et (d') connaissant les coefficients de l'une de leur équation cartésienne.
2. Programmer cet algorithme en Python.

Aide Un équation cartésienne $ax + by + c = 0$ pourra être représentée par la `liste[a,b,c]`.

3. Tester ce programme dans les cas suivants.
a. $(d) : 5x + 3y - 1 = 0$ et $(d') : -2x + 3y + 4 = 0$.
b. $(d) : -2x + 6y + 3 = 0$ et $(d') : x - 3y + 1 = 0$.
c. $(d) : 4x + 6y + 1 = 0$ et $(d') : 3x - 2y - 2 = 0$.

65

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Ewen est situé au point $E(4 ; 6)$ dans la forêt et souhaite rejoindre l'une des deux routes proches de sa position.
On modélise la première route par la droite (d) d'équation $x + y - 16 = 0$ et la seconde route par la droite (d') d'équation $-x + 2y + 2 = 0$. On cherche à savoir de quelle route Ewen est le plus éloigné.
a. TICE Représenter la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis conjecturer une réponse à la question posée.
b. Valider ou corriger cette conjecture.

Aide On pourra déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux du point E sur les droites (d) et (d').

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Déterminer et reconnaître une équation de cercle

Savoir-faire 3 et 4 p. 259-260

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

66 QCM

L'ensemble des points M$(x ; y)$ tels que :

$$(x+8)^2 + y^2 = 9$$

est :

a. le cercle de centre $\Omega(8 ; 0)$ et de rayon 9.
b. le cercle de centre $\Omega(-8 ; 0)$ et de rayon 9.
c. le cercle de centre $\Omega(8 ; 0)$ et de rayon 3.
d. le cercle de centre $\Omega(-8 ; 0)$ et de rayon 3.

67 Vrai ou faux ?

« L'ensemble des points M$(x ; y)$ tels que :

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5 = 0$$

est le cercle de centre $\Omega(2 ; -3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. »

68 QCM

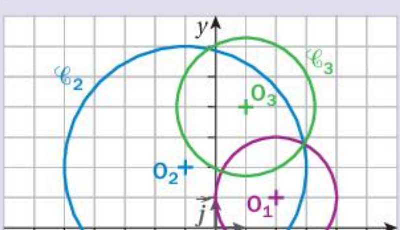
L'ensemble des points M$(x ; y)$ tels que :

$$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29 = 0$$

est :

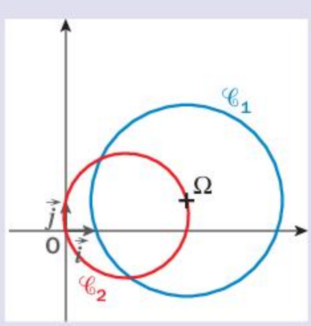
a. le cercle de centre $\Omega(5 ; -2)$ et de rayon $\sqrt{58}$.
b. le point $(5 ; -2)$.
c. le point $(-5 ; 2)$.
d. l'ensemble vide.

69 Déterminer une équation de chacun des cercles ci-dessous.



70 Une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ ci-dessous de centre Ω est $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.

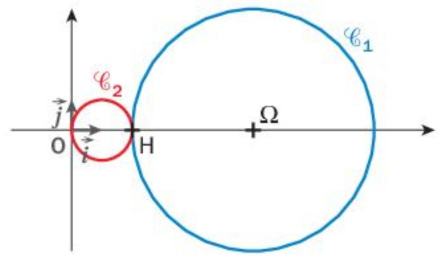
• Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[O\Omega]$.



★

71 Une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ ci-dessous est :

$$(x-6)^2 + y^2 = 16.$$



• Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}_2$ tangent à $\mathscr{C}_1$ en H et à l'axe des ordonnées en O.

72 Le cercle $\mathscr{C}$ a pour diamètre [OA] et A(3 ; 7).

a. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
b. Déterminer l'abscisse de l'autre point d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses.

73 On appelle (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0 \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

a. Si $k = 5$, montrer que l'ensemble (E) est un cercle dont on déterminera les caractéristiques.
b. Dans le cas général, préciser, selon les valeurs du réel k, la nature de l'ensemble (E).

74 Une équation d'un cercle $\mathscr{C}$ est :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

a. Donner les coordonnées du centre de $\mathscr{C}$ et son rayon.
b. Montrer que le point A(4 ; 2) appartient à $\mathscr{C}$.
c. Soit (d) la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.
Déterminer une équation de la droite (d).

75 Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre A(–3 ; –2) et passe par le point C(6 ; –5).

a. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
b. Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées.

76 A(1 ; 2) et B(2 ; –1) sont deux points du plan.
On cherche à déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant $\frac{MB}{MA} = 2$.

a. Démontrer que M ∈ (E) si et seulement si :

$$MB^2 - 4MA^2 = 0.$$

b. Démontrer que les coordonnées de M$(x ; y)$ vérifient alors l'équation $3x^2 + 3y^2 - 18y - 4x + 15 = 0$.
c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cet ensemble (E).

Fichier Python
Ex. 80
Manuel numérique enseignant

★★

77 Copie à la loupe LOGIQUE

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre A(5 ; – 1) et pour rayon 3.
Yanis doit montrer que :

$$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 2y + 17 = 0.$$

Voici sa réponse.

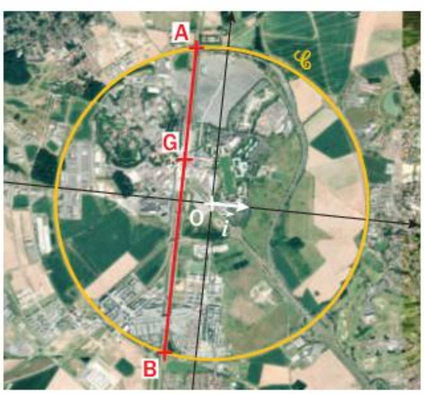
$$\begin{aligned} M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow AM = R \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 3^2 \\ &\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 + 2y + 17 = 0 \end{aligned}$$

- Qu'en pensez-vous ?

Maths à l'oral
Discutez de l'utilisation à bon escient du symbole $\Leftrightarrow$.

78

Afin de permettre une bonne accessibilité à un parc d'attraction, on a créé, autour du parc, un grand boulevard qui forme un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 325 m. De plus, une gare G dessert le parc.



On cherche à calculer la longueur du chemin de fer qui se trouve à l'intérieur du parc, sur le segment [AB]. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ est normal à la droite (AB). L'unité est le mètre. Dans ce repère, on modélise les rails en rouge par la droite d'équation $x = -480$.

a. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

b. Déterminer les coordonnées des points A et B.

c. En déduire la longueur AB.

79

A(3 ; –2) et B(1 ; 4) sont deux points du plan. On note (E) l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 92$.

a. Démontrer que C(1 ; 7) n'appartient pas à (E).

b. Déterminer la nature de l'ensemble (E) et ses caractéristiques.

Aide On pourra écrire une équation vérifiée par les coordonnées de M.

80 PROGRAMMATION python

Un ensemble (E) de points de coordonnées (x ; y) est défini par l'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres entiers.

1. Recopier et compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la nature de l'ensemble (E).

```
import math

def ensemble(a,b,c):
    d=...**2+...**2-4*...
    if d...0:
        return "..."
    if d...0:
        return "..."
    if d...0:
        return "..."
```

2. Programmer cette fonction et la tester pour l'ensemble (E) défini par l'équation :

a. $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 37 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = 0$

3. Remplacer chaque chaîne de caractères renvoyée par la fonction par une liste contenant la nature de l'ensemble, éventuellement accompagnée de ses caractéristiques (coordonnées, rayon, etc.).

81

Une route à double sens traverse un tunnel semi-circulaire qui mesure 5 m de hauteur en son point supérieur. Chaque voie de circulation mesure 4 m de largeur.

a. En prenant le point O, situé sur la ligne en pointillés, comme origine d'un repère, déterminer une équation du cercle complet.

b. En déduire la hauteur du tunnel à la limite de chaque voie.

82 IN ENGLISH ▸ p. 381

The equation of the line (d) in a x-y plane is:

$$x - 4y + 20 = 0.$$

- Find an equation of the circle passing through by A(4;9) and B(6;5); the centre of which Ω is on the line (d).

Hint If the circle passes through by A and B then Ω is on the perpendicular bisector.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Étudier les propriétés des paraboles

Savoir-faire 5 p. 261

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

83 Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole :

a. $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = 2x^2 - 4x + 5$?

b. $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = 8(x-6)^2 + 7$?

84 **QCM**

Parmi les équations ci-dessous, quelles sont celles qui correspondent à une parabole ?
Indiquer alors une équation de l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet de cette parabole.

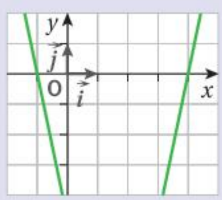
a. $y = 5(x-2)^2 + 3$

b. $y = x^2 + 6x - 1$

c. $y = x^2 + 3x + 2y^2 + 2$

d. $5x + y = -4$

85 La courbe d'une fonction polynôme du second degré f est représentée ci-contre.



a. Déterminer graphiquement les racines de f.

b. En déduire une équation de l'axe de symétrie de la parabole.

86 Le tableau de valeurs ci-dessous est associé à une fonction polynôme du second degré f.

x	–2,5	–1,3	–0,7	0	0,7	1,3	2,5
$f(x)$	21,75	2,55	–1,65	–2	2,55	10,35	36,75

• Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant f.

87 Déterminer mentalement une équation de l'axe de symétrie de chacune des paraboles suivantes.

a. $\mathcal{P}_1$ d'équation $y = 2x^2 - 6x + 5$.

b. $\mathcal{P}_2$ d'équation $y = -5(x-2)^2 + 4$.

c. $\mathcal{P}_3$ d'équation $y = -2(x-1)(x+3)$.

88 **Vrai ou faux ?**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet est le point S de coordonnées (2 ; 4).

a. « $f(2) = 4$. »

b. « $f(3) < 4$. »

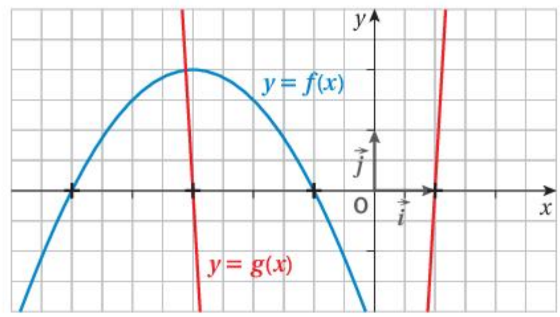
c. « $f(-1) = f(5)$. »

d. « $f(x) = (x-2)^2 + 4$. »

e. « La droite d'équation $y = 4$ est un axe de symétrie de la parabole. »

★

89 On a représenté en bleu et en rouge les courbes respectives des fonctions polynômes du second degré f et g.



Recopier et compléter par un nombre réel.

a. $f(-2) = f(\ldots)$

b. $f(50) = f(\ldots)$

c. $g(-3) = g(\ldots)$

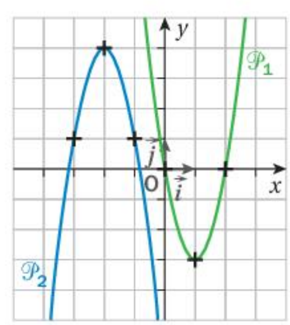
d. $g(50) = g(\ldots)$

90 f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 - 19x + 5$.
$\mathcal{P}$ est la parabole représentant f.

a. Calculer les coordonnées du sommet de $\mathcal{P}$.

b. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B, et l'axe des ordonnées au point C.
Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

91 Déterminer une équation des paraboles ci-dessous.



92 A(1 ; 2) et S(2 ; –3) sont des points du plan.

a. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ qui passe par le point A et de sommet S.

Aide Utiliser la forme canonique de la fonction polynôme du second degré associée à $\mathcal{P}$.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.

Fichiers Python et logiciel
Ex. 97 et 98
Manuel numérique enseignant

93 Copie à la loupe

Julie a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

1. L'extremum de la fonction f représentée par la parabole $\mathscr{P}$ est le point S de coordonnées $(-1\ ;\ 3)$.
2. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -4$.

a. Identifier les erreurs de vocabulaire commises à la question **1**.
b. Les racines obtenues dans la question **2** sont-elles correctes ?

Maths à l'oral
Corrigez toutes les erreurs identifiées.

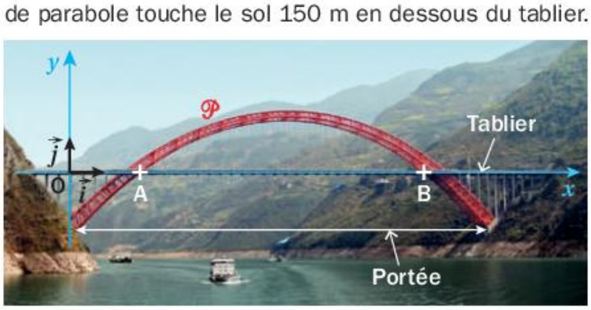
94 IN ENGLISH ▸ p. 381

A horse's jump is modelled by a parabolic trajectory. The horizontal length of his jump is 5 metres and the maximal height in relation to the ground is 1.4 metres.
● Can it jump an obstacle that measures 1.3 m in height and 80 centimetres in width?

Hint Draw a diagram about the situation.

95 Le pont de Wushan

Le pont de Wushan traverse le fleuve Yangzi Jiang en Chine. Il est soutenu par un arc de parabole $\mathscr{P}$ en acier. On souhaite renouveler le bitume sur une partie de ce pont dont la portée est de 450 m. La hauteur entre le tablier et le sommet de la parabole est de 120 m. L'arc de parabole touche le sol 150 m en dessous du tablier.



a. Déterminer une équation de la parabole dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
b. Calculer les coordonnées des points A et B.
c. En déduire la longueur AB de la route à rénover.

★★

96

m est un nombre réel. La courbe $\mathscr{C}$ est définie par :
$$y = (m^2 + 4m + 1)x^2 + (2 + m)x - 5.$$
a. Déterminer, selon les valeurs de m, sa nature.
b. Dans les cas où $\mathscr{C}$ est une parabole, existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles la droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de $\mathscr{C}$?

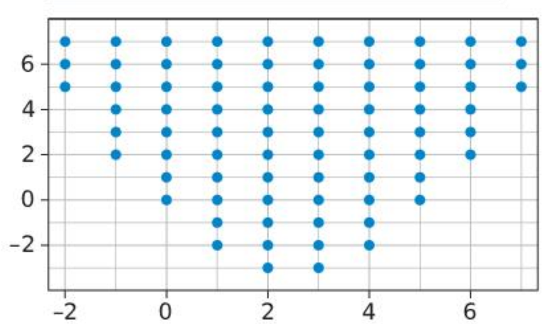
97 Lieu de l'orthocentre

On considère deux points A(6 ; 0) et B(−2 ; 0). La droite (d) admet comme équation $y = 2$. M est un point mobile sur la droite (d). Pour tout point M de (d), le point H est l'orthocentre du triangle ABM.
On souhaite déterminer le lieu des points H lorsque M décrit la droite (d).
1. TICE Faire une figure représentant la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Utiliser la trace du point H pour faire apparaître le lieu de points cherché, puis émettre une conjecture sur ce lieu.
2. a. On note $(m\ ;\ 2)$ les coordonnées du point M où m est un nombre réel. Déterminer une équation de la hauteur issue de M et de la hauteur issue de A dans le triangle ABM en fonction de m.
b. En déduire les coordonnées $(x_H\ ;\ y_H)$ du point H.
c. Montrer que $(x_H\ ;\ y_H)$ vérifient l'équation :
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.$$
d. En déduire la nature du lieu de points et ses caractéristiques.

98 PROGRAMMATION python

a. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il affiche le graphique ci-dessous.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
Lx=[]
Ly=[]
for x in range(...):
    for y in range(...):
        if 2*x*(x-5)<5*(y+1):
            Lx.append(x)
            Ly.append(y)
plt.plot(Lx,Ly,"o")
plt.grid()
plt.show()
```



b. Déterminer la forme obtenue et ses caractéristiques.
c. Modifier ce programme pour qu'il affiche un quart de cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 10.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : nature d'un ensemble de points définis par une équation
hatier-clic.fr/ma1272

La démonstration rédigée

Propriété Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
S étant un nombre réel, l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=S$ est :
- un cercle de centre $(a\ ;\ b)$ et de rayon $\sqrt{S}$ si $S>0$;
- le point de coordonnées $(a\ ;\ b)$ si $S=0$;
- l'ensemble vide si $S<0$.

OBJECTIF : on souhaite déterminer la nature d'un ensemble de points définis par une équation.

Démonstration

Pour déterminer l'ensemble des points qui vérifient l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=S$, on procède par disjonction des cas selon le signe de S (▶ Rabat VI, Raisonnements).

Si $S>0$, alors il existe un entier R strictement positif tel que $R=\sqrt{S}$.
Comme R et S sont positifs, $R=\sqrt{S} \Leftrightarrow R^2=S$.
Ainsi, l'équation est équivalente à $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
En considérant les points M et O de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(a\ ;\ b)$, l'équation équivaut à $OM^2=R^2$.
Étant donné que R et OM sont positifs, l'équation est équivalente à $OM=R$.
On retrouve ici la définition du cercle comme ensemble de points situés à une même distance R du centre O. ■

Si $S=0$, l'équation est équivalente à $(x-a)^2+(y-b)^2=0$.
On sait que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.
Supposons que l'un des deux carrés soit strictement positif : ici $(x-a)^2$; on aurait alors $(x-a)^2+(y-b)^2>(y-b)^2 \geqslant 0$.
Donc $(x-a)^2+(y-b)^2>0$, ce qui est **absurde**.
On peut donc affirmer la **négation** de l'affirmation « le premier carré **ou** le second carré est strictement positif », c'est-à-dire :
« le premier **et** le second carré sont nuls ».

L'équation équivaut donc à $\begin{cases}(x-a)^2=0\\(y-b)^2=0\end{cases}$.

Le carré d'un nombre est nul si et seulement si le nombre est nul,

d'où $\begin{cases}(x-a)^2=0\\(y-b)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-a=0\\y-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$.

L'ensemble cherché est donc réduit au point de coordonnées $(a\ ;\ b)$. ■

Si $S<0$, comme $(x-a)^2+(y-b)^2 \geqslant 0$, alors l'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=S$ n'a pas de solution.
L'ensemble cherché est donc l'ensemble vide. ■

Le principe

1 On commence par identifier les **différents cas possibles**.

2 Pour le **cas $S>0$** :
a. on utilise le fait que l'on peut toujours calculer la **racine carrée d'un nombre réel positif** ;
b. on peut ensuite **raisonner par équivalences** (▶ Rabat V, Logique) car les nombres sont de même signe ;
⚠ Dans le cas général, l'implication « $x=y$ » ⇒ « $x^2=y^2$ » **est vraie**, mais la réciproque est fausse (par exemple $(-3)^2=3^2$ mais $3 \neq -3$).
c. on utilise la **définition** du cercle.

3 Pour le **cas $S=0$** :
a. on utilise la **définition** du carré d'un nombre pour conduire un **raisonnement par l'absurde** (▶ Rabat VI, Raisonnements) ;
b. on énonce la **négation** (▶ Rabat IV, Logique) de l'assertion absurde : la négation d'une assertion du type « A **ou** B » est « non A **et** non B » ;
c. on utilise l'**équivalence** :
$x=0 \Leftrightarrow x \times x=0 \Leftrightarrow x^2=0$.

4 Pour le **cas $S<0$**, on utilise le fait qu'un nombre strictement négatif ne peut être égal à un nombre positif.

La démonstration à compléter

99 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de montrer que, dans le plan muni d'un repère orthonormé, une droite (d) admet un vecteur normal non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ si et seulement si une équation cartésienne de (d) est de la forme $ax + by + c = 0$; a, b et c étant trois nombres réels avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.

Démonstration

- On suppose que le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite (d).

On considère $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ un point de (d).
$\mathrm{M}(x\,;\,y)$ est un point de la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont ....

Or, les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $(\dots) \times \dots + (\dots) \times \dots = 0$.
En développant, cela équivaut à $\dots + \dots - \dots - \dots = 0$.
En posant $c = \dots$, une équation de la droite (d) est $ax + by + c = 0$.

- On suppose que la droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$. On sait que $(a\,;\,b) \neq (\dots\,;\,\dots)$.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = \dots \times \dots + \dots \times \dots = \dots .$$

On en conclut que $\vec{n}$ est .... ■

1 On montre d'abord que l'**implication directe** est vraie. Pour cela, on utilise :
a. la **définition du vecteur normal** à une droite ;
b. la formule des **coordonnées d'un vecteur** ;
c. le **produit scalaire** de deux vecteurs pour obtenir une équation de la droite (d).

2 On montre ensuite que la **réciproque** est vraie. Pour cela :
a. on détermine les **coordonnées d'un vecteur directeur** de (d) à partir d'une équation cartésienne de (d) ;
b. on utilise la **définition d'un vecteur normal** pour conclure.

Démonstrations Vers le BAC

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

100 LOGIQUE **1. a.** Préciser les coordonnées d'un vecteur normal à chacune des droites (d) et (d') définies respectivement par les équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
b. Déterminer une condition portant sur les nombres réels a, a', b et b' afin que les droites (d) et (d') soient perpendiculaires.
c. Énoncer une propriété, sous la forme d'une implication, à partir des questions précédentes.
d. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?
2. Les équations réduites des droites (d_1) et (d_2) sont respectivement $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Démontrer que (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

101 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ sont deux points distincts du plan. Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB] en utilisant deux méthodes différentes.
a. Méthode 1 : utiliser la notion d'équidistance.
b. Méthode 2 : utiliser les coordonnées du milieu de [AB] et un vecteur normal à la droite (AB).

102 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B})$ sont deux points distincts du plan, et $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB].
a. $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont orthogonaux.
b. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ en fonction de x et y.
c. Déduire des questions **a** et **b** une équation du cercle $\mathscr{C}$.

103 f est une fonction dont la représentation graphique est la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$; a, b et c étant des nombres réels, avec $a \neq 0$.
a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f\left(-\frac{b}{2a} - x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + x\right).$$

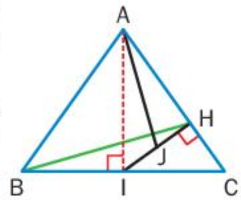
b. Recopier et compléter la phrase suivante.
« Pour tout nombre réel x, les nombres $-\frac{b}{2a} - x$ et $-\frac{b}{2a} + x$ ont même ... par la fonction f. »
Illustrer cette affirmation par un schéma.
c. En déduire une propriété de symétrie de la parabole.
d. Déterminer l'abscisse du sommet de la parabole, puis son ordonnée.

Problèmes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

104 Droites perpendiculaires

Raisonner | ABC est un triangle isocèle en A tel que AB = 5 cm et BC = 6 cm.
I est le milieu de [BC] et H est le projeté orthogonal de I sur la droite (AC). J est le milieu de [IH].



- En utilisant un repère bien choisi, démontrer que les droites (AJ) et (BH) sont perpendiculaires.

105 Distance d'un point à une droite

A(9 ; 2) est un point du plan et (d) une droite dont une équation cartésienne est $-x + 3y + 13 = 0$.

1. a. Déterminer une équation de la droite (d') passant par A et perpendiculaire à (d).

b. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).

c. En déduire la longueur AH.

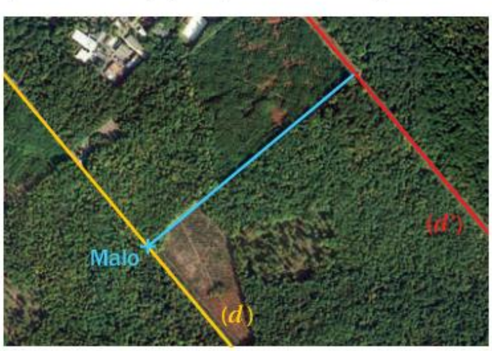
2. a. ALGORITHMIQUE Écrire un algorithme qui, une fois les coordonnées $(u ; v)$ d'un point et une équation $ax + by + c = 0$ d'une droite connues, calcule la distance entre ce point et cette droite.

b. Tester cet algorithme avec le point A et la droite (d) ci-dessus.

Programmer cet algorithme pourra vous être utile !

106 Balade en forêt

Modéliser | Malo se promène en vélo dans la forêt de Fontainebleau sur un chemin modélisé par la droite (d) d'équation $-18x - 15y - 210 = 0$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité est le mètre.
Malo souhaite retourner sur la route principale modélisée par la droite (d') d'équation $6x + 5y - 1089 = 0$.



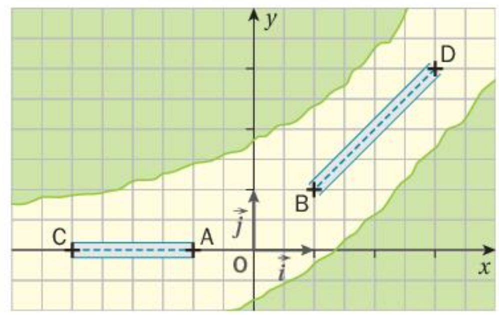
- Calculer une valeur, arrondie au mètre près, de la distance qu'il doit parcourir sur le chemin, perpendiculaire aux deux droites (d) et (d').

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Aide La distance entre les deux droites (d) et (d') reste la même où que l'on se trouve sur la droite (d).

107 Raccordement de deux routes

Modéliser | L'objet du problème est de relier par un arc de cercle les deux portions de routes ci-dessous, modélisées par des segments. Pour assurer un confort de conduite, on admet que les segments doivent être tangents en A et B au cercle $\mathscr{C}$ dont l'arc permet de relier les deux routes.
Pour mener à bien la construction, il est possible de démolir une partie de la route horizontale du côté de la jonction. Ainsi, dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on pose $A(a ; 0)$, B(1 ; 1), C(−3 ; 0) et D(3 ; 3) des points du plan avec a un nombre réel tel que $a \leqslant -1$.



On cherche à déterminer la valeur du réel a qui rend cette construction possible.

1. Déterminer une équation des droites (AC) et (BD).

2. Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$. Que peut-on dire des droites (ΩA) et (AC) ? des droites (ΩB) et (BD) ?

3. a. Déterminer une équation de la médiatrice (m) du segment [AB] en fonction de a.

b. En déduire que les coordonnées du point Ω vérifient l'équation $(1 - a)x + y + \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0$.

4. a. Déterminer une équation de la droite passant par B et perpendiculaire à (BD).

b. En déduire alors les coordonnées de Ω en fonction de a.

5. a. Déterminer, en fonction de a, une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (AC).

b. Conclure sur la valeur de a qui convient.

Info
Pour des raisons de sécurité, lorsque le virage est important, les raccordements circulaires sont impossibles ; on utilise alors des raccordements plus « progressifs » à l'aide de courbes complexes appelées clothoïdes.

108 Équation d'un cercle tangent à une droite

Calculer | A(2 ; 3) est un point du plan et (d) une droite dont une équation cartésienne est :

$$x + y + 1 = 0.$$

a. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).

b. Déterminer une équation du cercle de centre A tangent à la droite (d).

Fichier logiciel
Ex. 114
Manuel numérique enseignant

109 Lieu de points

A(–1 , 2), B(1 ; 3) et C(3 ; –1) sont trois points du plan et une équation de la droite (d) est :

$$x - y + 8 = 0.$$

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

c. Déterminer une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC). Déterminer la longueur AH.

e. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M$(x\ ;\ y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = 5$.

110 Lumière du phare — Approfondissement

Dans un repère orthonormé du plan, dont l'unité est le kilomètre, un navire suit une route représentée par une droite dont une équation est $x = 0$. Il avance à une vitesse de 25 km/h. Un phare situé au point de coordonnées (–6 ; –2) peut être aperçu de n'importe quel endroit dans un rayon de 10 km.

• **Modéliser** | Déterminer le temps pendant lequel le bateau pourra visualiser la lumière du phare.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

111 Tangente à un cercle

Calculer | Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, une équation du cercle $\mathscr{C}$ est :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

et une équation de la droite (d) est :

$$x - y - 8 = 0.$$

a. Déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son centre Ω.

b. Calculer les coordonnées des points A et B, points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (d).

c. Déterminer une équation des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ aux points A et B.

d. Montrer que ces tangentes sont perpendiculaires, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.

e. Déterminer une équation de la médiatrice (m) du segment [AB], puis montrer que le point E appartient à la droite (m).

112 Cercles passant par trois points

Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, le cercle $\mathscr{C}$ passe par les points A(3 ; –3), B(8 ; 2) et C(0 ; –2).

1. a. Déterminer une équation de la médiatrice des segments [AB] et [AC].

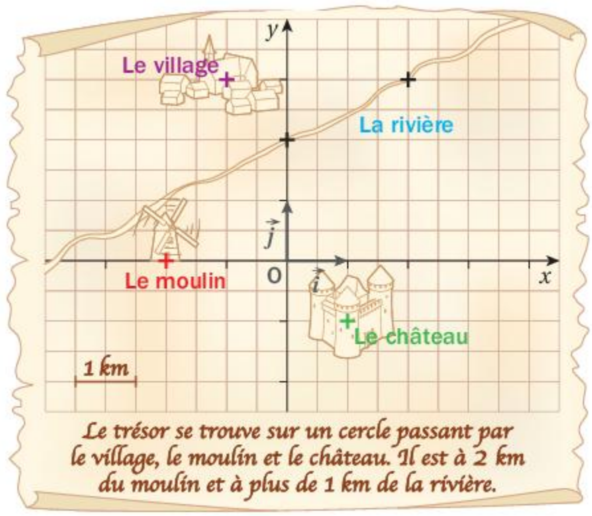
b. Déterminer les coordonnées du centre I du cercle $\mathscr{C}$, puis une équation de ce cercle.

2. a. Déterminer la nature du triangle ABI.

b. En déduire une équation du cercle circonscrit au triangle ABI.

113 À la recherche du trésor

Amy a trouvé un vieux parchemin qui donne des informations concernant un trésor enfoui.



• Donner à Amy les coordonnées du point sous lequel elle doit creuser pour récupérer le trésor.

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Aide Pour déterminer les points d'intersection de deux cercles, on pourra utiliser un logiciel de calcul formel selon le modèle ci-dessous.

Résoudre$(\{x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0, x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0\}, \{x, y\})$

114 Famille de cercles passant par deux points — Vers le BAC

Voici des équations de deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ du plan dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$:

- $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$;
- $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 6x - 5y + 9 = 0$.

1. Déterminer le centre et le rayon des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

2. Montrer que ces deux cercles sont tangents à l'axe des abscisses.

3. Montrer que les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.

4. TICE Vérifier la réponse obtenue à la question **3** à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

5. On considère l'ensemble (E) des cercles passant par A et B.

a. Raisonner | Montrer que les coordonnées $(a\ ;\ b)$ du centre Ω de l'un de ces cercles vérifient l'équation $a - 2b + 8 = 0$.

b. Écrire la forme développée d'une équation d'un cercle de (E) en fonction de a.

c. Comment faut-il choisir le réel a pour que le cercle de (E) correspondant coupe l'axe des abscisses ?

d. TICE Vérifier la réponse obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Fichier logiciel
Ex. 120
Manuel numérique enseignant

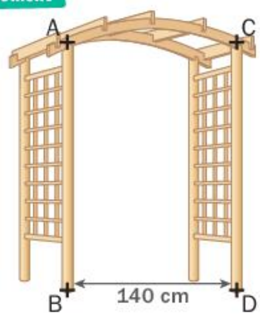
115 m est un nombre réel.
Une équation de la courbe $\mathscr{C}$ est :
$$y = (2m+1)x^2 + 2(m+2)x - 1 = 0.$$
a. Déterminer, en fonction de m, la nature de la courbe $\mathscr{C}$.
b. Déterminer, en fonction de m, le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

116 IN ENGLISH ▶ p. 381
In a cartesian plane, the equation of the parabola with vertex P is $y = 6x - x^2$.
It intersects the line (d): $y = x$ at the origin O and at the point Q.
a. Find the coordinates of these two points P and Q.
b. Find the coordinates of H, the perpendicular projection of the point P into the line (d).
c. Calculate the lenghts |OQ| and |PH|.
d. Now find the area of the triangle OPQ.

117 Famille de paraboles
a. Justifier que, pour tout nombre réel m, l'équation $y = 3x^2 - 5mx + 10m$ est une équation de parabole.
On note $\mathscr{P}_m$ la parabole définie par cette équation.
b. Communiquer | Expliquer pourquoi toutes les paraboles $\mathscr{P}_m$ ont un point en commun dont on précisera les coordonnées.

Aide On pourra commencer par émettre une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

118 Une pergola — Approfondissement
La largeur entre les deux piliers d'une pergola est de 140 cm. Cette pergola peut être assimilée à un arc $\overset{\frown}{AC}$ de parabole $\mathscr{P}$ soutenu par deux segments [AB] et [CD].
Dans un repère orthonormé, une équation de la parabole $\mathscr{P}$ est $y = -0{,}02x^2 - 5x - 290$.

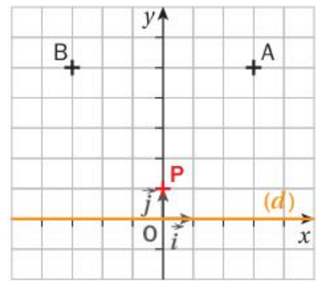


a. Modéliser | Déterminer, dans ce repère, une équation des droites (AB) et (CD).
b. On sait que la hauteur maximale de la pergola est de 2,50 m. Calculer la hauteur AB et CD des panneaux.

119 Intersections d'une parabole et d'une droite
Dans un repère orthonormé du plan, une équation de la parabole $\mathscr{P}$ est $y = 1{,}5x^2$. Une équation de la droite (d) est $y = 2x + b$ où b est un nombre réel.
- Lorsque b varie dans $\mathbb{R}$, déterminer le lieu des milieux des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ et de la droite (d).

Info
Quand on coupe une parabole par une droite de direction donnée, les milieux des points d'intersection sont toujours alignés.

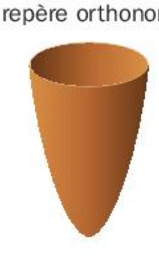
120 Trajet d'un bateau — Approfondissement
Modéliser | Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, un bateau se trouve au point B(–3 ; 5) et doit se rendre au point A(3 ; 5). Pendant son trajet, le bateau doit toujours rester à égale distance du phare P(0 ; 1) et de la côte modélisée par la droite (d) d'équation $y = 0$.

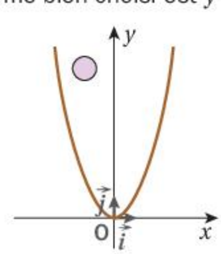


1. Comment peut-on obtenir, pour une position donnée, la distance du bateau à la côte ?
2. Justifier que le point C(–1,5 ; 1,5) n'est pas situé sur la route du bateau.
3. TICE **a.** Représenter la figure avec un logiciel de géométrie dynamique, puis construire le point où se trouve le bateau lorsqu'il sera à égale distance du phare et du point E(–2 ; 0).
b. En plaçant un point mobile sur la droite (d), afficher la route du bateau (on pourra utiliser le mode « Trace » du point).
4. a. Soit M(x ; y) un point situé sur la route du bateau. Justifier que $x^2 + (y-1)^2 = y^2$.
b. En déduire la nature de la courbe parcourue par le bateau.

Info
On effectue ici un tracé point par point d'une parabole : c'est l'ensemble des points situés à égale distance d'un point fixe (son foyer : P) et d'une droite (sa directrice : (d)).

121 Des billes dans l'urne
Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 5 cm. La section de ce paraboloïde, par un plan passant par son axe, est la parabole dont une équation dans un repère orthonormé bien choisi est $y = x^2$.





a. Modéliser | On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1 cm. La bille va-t-elle toucher le fond de l'urne ?
b. On y fait tomber une seconde bille B' de rayon 1 cm. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

D'après Olympiades Grenoble, 2007.

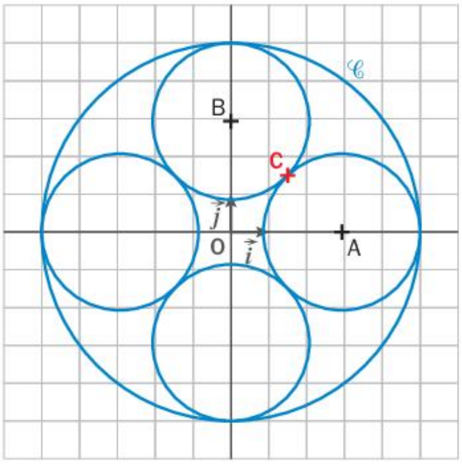
Fichier logiciel
Ex. 123
Manuel numérique enseignant

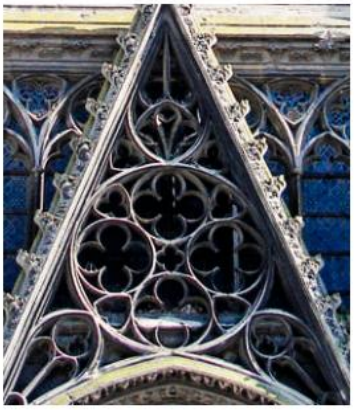
Arts

122 Une rosace

La photo ci-contre montre une partie de la façade de l'église Saint-Pierre à Caen. On souhaite reproduire le motif constitué d'un grand cercle $\mathscr{C}$ de diamètre 1 m, dans lequel se trouvent quatre petits cercles de même rayon tangents à $\mathscr{C}$.

On a placé sur la figure un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel l'unité correspond à 1 dm.





1. Déterminer des équations des axes de symétrie du motif, et expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude au quart de plan dans lequel les ordonnées et les abscisses sont positives.

2. a est un nombre réel.
On note A(a ; 0) les coordonnées du centre du petit cercle situé à droite dans le motif. On cherche la valeur de a qui convient.

a. Dans quel intervalle varie a ?

b. Déterminer le rayon du petit cercle de centre A en fonction de a.

c. En déduire une équation de ce cercle en fonction de a.

3. a. Déterminer, en fonction de a, les coordonnées du point de tangence C entre les deux cercles de centre A et B.

b. En déduire que le réel a vérifie l'équation $a^2 - 20a + 50 = 0$.

c. Conclure.

Fiche métier
Ingénieur·e Arts et Métiers
hatier-clic.fr/ma1277a

Physique-Chimie

123 Les miroirs paraboliques — À l'oral

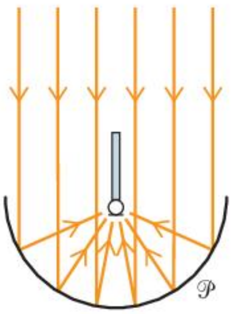
Pour faire fonctionner des fours solaires, des miroirs orientables réfléchissent les rayons du Soleil pour les envoyer sur une deuxième série de miroirs de forme parabolique. On va montrer que, de là, ils convergent vers une cible située au sommet d'une tour centrale.
Pour étudier le phénomène, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan dans lequel on considère le cas particulier de la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction $f(x) = 0{,}5x^2$. On admet que les rayons sont envoyés parallèlement à l'axe des ordonnées.

1. a. (d) est un rayon modélisé par la droite d'équation $x = 2$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (d) et de $\mathscr{P}$.

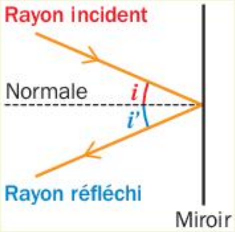
b. Déterminer une équation de la tangente en A à la parabole, puis de la normale en A à cette parabole.

c. Déterminer une équation de la droite (d') représentant le rayon réfléchi.

d. En déduire les coordonnées du point d'intersection F de (d') et de l'axe de symétrie de la parabole.



Aide Rappel de la 1re loi de Snell-Descartes : $i = i'$.



2. TICE En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, construire différents rayons parallèles à l'axe des ordonnées, puis les rayons réfléchis par la parabole. Émettre une conjecture.

3. On se place dans le cas général du rayon qui suit la direction de la droite d'équation $x = a$ où a est un nombre réel. Montrer que, quel que soit a, les rayons réfléchis passent tous par F.

Fiche métier
Ingénieur·e en génie électrique
hatier-clic.fr/ma1277b

Recherches mathématiques

Défis

124 Lieu des sommets d'une famille de paraboles

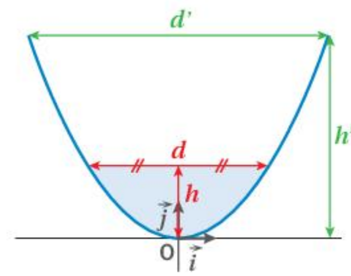
Pour tout nombre réel $m \neq 3$, on définit la fonction polynôme du second degré p_m sur $\mathbb{R}$ par :

$p_m(x) = (m-3)x^2 - 2(m+2)x + m - 5$.

On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et on note S_m son sommet.

- Déterminer le lieu des points S_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

125 La coupe de fruits



La coupe ci-contre est modélisée par un arc de parabole de sommet O dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ indiqué.

Elle est remplie d'eau jusqu'à une hauteur h de 2 cm. On a alors $d = 5$ cm.

Si on remplit la coupe d'eau jusqu'en haut, la longueur d' sera égale à 10 cm.

- Déterminer la hauteur h' de cette coupe.

126 Sangaku

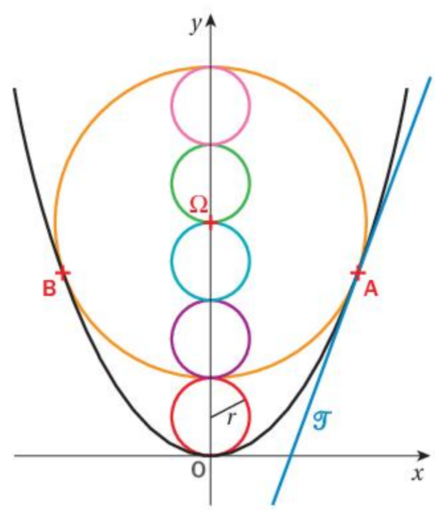
Déterminer le rayon r d'un petit cercle, puis reproduire cette énigme géométrique japonaise, appelée sangaku, sachant que :

– une équation de la parabole est $y = 2x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O ;

– les petits cercles ont tous le même rayon r et sont tangents entre eux ; leurs centres sont alignés sur l'axe de la parabole ;

– le petit cercle rouge est tangent à la parabole en O ;

– le grand cercle de centre Ω est tangent à la parabole en deux points A et B.



Aide On pourra déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la parabole en A qui est aussi la tangente au grand cercle en A, puis exprimer les coordonnées du point Ω de deux manières différentes.

Maths à l'oral

Présentez à la classe votre méthode de construction en faisant le lien avec le dessin ci-contre.

Questions ouvertes

127 Création d'une zone d'activités

Pour développer une zone d'activités commerciales, une commune de Haute-Loire a besoin d'un terrain d'au moins 20 hectares, facilement accessible.

Elle pense pour cela utiliser le terrain coloré en bleu sur la figure ci-contre et délimitée par trois rues. En se plaçant dans le plan muni d'un repère orthonormé, avec comme unité le mètre :

– la route de Monestrol, en rouge, est modélisée par la parabole d'équation $y = -0{,}0008x^2$;

– l'avenue Saint-Roch, en jaune, est modélisée par la droite d'équation $3x + 5y + 2\,500 = 0$;

– la rue du Prege, en orange, est modélisée par la droite d'équation $x = 0$.

- Ce terrain peut-il être envisagé pour la construction de la zone d'activités ?

Partie D

Probabilités et statistiques

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Mathématicien et magistrat français

Certains voient dans les travaux de ce savant universel les premiers pas du calcul infinitésimal. **Sa correspondance avec Blaise Pascal (1623-1662), en 1654, jette les bases du calcul des probabilités.**

Siméon Denis Poisson
(1781-1840)

Mathématicien et physicien français

Il apporte des contributions majeures en physique, dans l'étude de l'électricité et du magnétisme, et en mathématiques, à propos notamment des séries de Fourier. En probabilités, il a laissé son nom à la loi de Poisson.

Abraham de Moivre
(1667-1754)

Mathématicien français

Protestant exilé à Londres, il est l'auteur en 1718 de *The Doctrine of Chances* (*La Théorie du hasard*). Il donne, dans cet ouvrage, la première définition de l'**indépendance statistique** (▶ Chapitre 10) et s'intéresse à de nombreux problèmes. Il étudie également les statistiques de mortalité et établit les bases de la théorie des annuités.

Jacques Bernoulli
(1654-1705)

Mathématicien suisse

Dans son *Ars Conjectandi* (1713), il consolide et enrichit la théorie des probabilités et donne une première preuve de la **loi des grands nombres** (▶ page suivante et Chapitre 11).

Andreï Kolmogorov
(1903-1987)

Mathématicien russe

En 1933, il publie en allemand ses *Fondements de la théorie des probabilités*, ouvrage dans lequel il expose une version axiomatisée du calcul des probabilités.

Pierre-Simon de Laplace
(1749-1827)

Mathématicien et physicien français

Savant majeur de la période napoléonienne, il démontre mathématiquement la stabilité dynamique du système solaire. Les probabilités sont son autre domaine de prédilection, dans lequel il s'illustre par sa *Théorie analytique des probabilités* (1812).

La loi des grands nombres

▲ Page de couverture de l'*Ars Conjectandi*, Jacques Bernoulli, 1713.

La loi des grands nombres joue un rôle important dans le domaine des probabilités et statistiques. Elle fonde notamment les relations entre fréquences et probabilités (▶ Chapitre 11). Historiquement, elle apparaît pour la première fois en 1690 dans l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1654-1705). Cet ouvrage, publié en 1713 après la mort de l'auteur, devient rapidement un texte de référence dans ce domaine.
La loi des grands nombres exprime le fait que les caractéristiques d'un échantillon se rapprochent des caractéristiques de la population dont il est extrait lorsque la taille de cet échantillon augmente. C'est la raison pour laquelle un sondage est plus fiable si les sondés sont plus nombreux. Mais cette loi a d'autres applications : elle permet aussi d'estimer expérimentalement la probabilité de certains événements dont on ne pourrait connaître la probabilité autrement. Comme le disent M. Serres et N. Farouki, dans *Le Trésor, Dictionnaire des sciences* (1997), « De façon apparemment paradoxale, l'accumulation d'événements au hasard aboutit à une répartition parfaitement prévisible des résultats possibles. Le hasard n'est capricieux qu'au coup par coup. »

La recherche d'un « multiplicateur universel »

Dès le XVI^e siècle, pour des raisons fiscales et militaires, la démographie du pays devient une préoccupation importante des dirigeants français. Mais à l'époque, les recensements de la population sont des opérations impopulaires et difficiles à mener. Au début du XVIII^e siècle, les savants introduisent une méthode empruntée à leurs confrères allemands, s'appuyant sur les recensements des baptêmes faits par les évêques dans leur diocèse. Il s'agit de **définir un rapport entre le nombre des baptêmes de plusieurs paroisses et des recensements partiels de celles-ci. C'est le « multiplicateur universel »** dont Voltaire (1694-1778) discute la valeur dans l'extrait ci-dessous.

C'est à Breslau, à Londres, et à Dordrecht, qu'on commença, il y a environ trente ans, à supputer le nombre des habitants par celui des baptêmes. On multiplia, dans Londres, le nombre des baptêmes par 35, à Breslau, par 33 [...]

▲ Extrait d'une lettre de Voltaire à M. de la Michodière, intendant d'Auvergne, datée de 1757, *Œuvres complètes de Voltaire*, tome 39.

Une fois ce coefficient déterminé, on peut l'appliquer à d'autres zones, plus ou moins étendues, afin d'obtenir une estimation de la population par une simple multiplication du nombre de baptêmes. Bien entendu, les résultats obtenus sont approximatifs et se heurtent au problème de la représentativité de l'échantillon de départ et au fait que le dynamisme démographique peut être très variable d'une ville à l'autre...

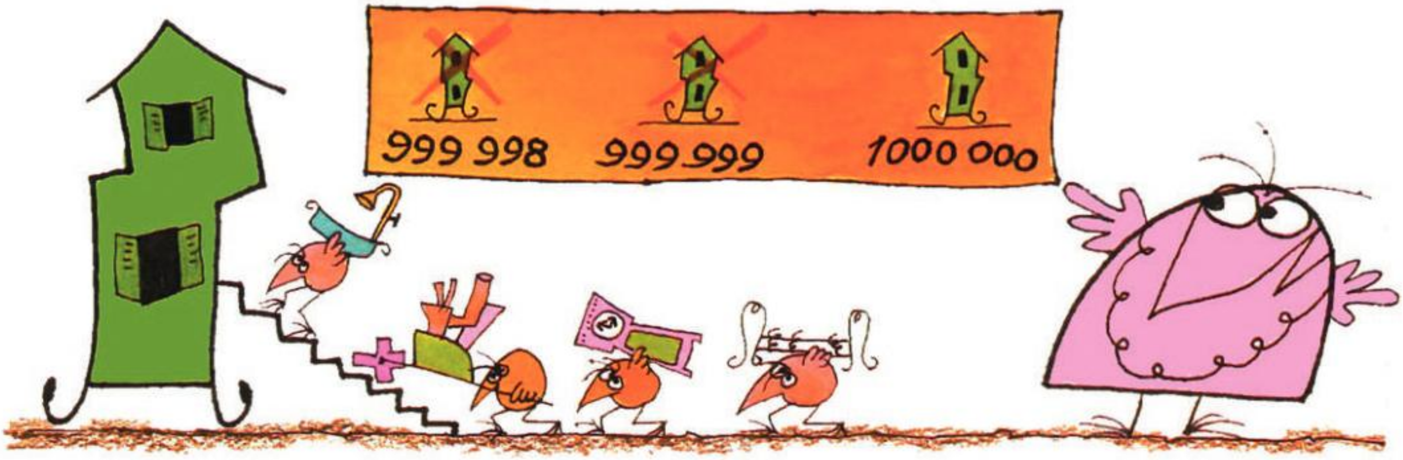
Zoom sur...

Nicole El Karoui

Mathématicienne française, Nicole El Karoui (née en 1944) est une **spécialiste reconnue de la modélisation de l'incertain appliquée à la finance**. Impliquée dans la création de plusieurs formations dans ce domaine dans des écoles prestigieuses, elle devient, dès la fin des années 1980, **une des pionnières du développement des mathématiques financières**.

CHAPITRE 10

Probabilités conditionnelles



La fusée des Shadoks ayant une chance sur un million de fonctionner, les Shadoks ont décidé de se dépêcher de rater les 999 999 premiers essais pour réussir enfin à la lancer, d'où leur devise.
De même, on pourrait penser que plus on joue à un jeu de hasard, plus on a de chances de gagner, alors que ce n'est pas le cas en raison du principe d'indépendance.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Définir une probabilité conditionnelle

- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 13 à 16
- Les incontournables 29 et 30
- Entraînement 37 à 52

OBJECTIF 2

Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

- Activités 2 et 3
- Cours 2
- Savoir-faire 2 et 3
- Quiz 17 à 20
- Les incontournables 31 à 33
- Entraînement 53 à 69

OBJECTIF 3

Caractériser l'indépendance

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 4 et 5
- Quiz 21 à 23
- Les incontournables 34 à 36
- Entraînement 70 à 88

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

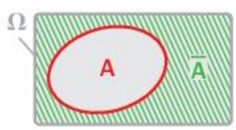
Expliquer les termes ou expressions suivants.

univers ÉVÈNEMENTS INCOMPATIBLES **évènements disjoints** évènement contraire *équiprobabilité* ensemble vide

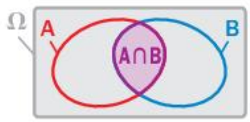
Rappels

Évènements, intersection et réunion

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues dépendent du hasard. L'ensemble de toutes les issues est appelé **univers**, souvent noté Ω.
- Un **évènement** est une partie de l'univers.
- Un **évènement élémentaire** est un évènement qui ne contient qu'une seule issue.
- L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues de Ω n'appartenant pas à A.



- L'intersection des évènements A et B est l'évènement **A** et **B**, noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »).
- La réunion des évènements A et B est l'évènement **A** ou **B**, noté $A \cup B$ (qui se lit « A union B »).



- Si deux évènements A et B n'ont pas d'élément commun, c'est-à-dire si l'intersection de A et B est vide (**$A \cap B = \varnothing$**), alors on dit que A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.

Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on observe si elle donne « pile » (p) ou « face » (f).

- On a alors $\Omega = \{(p, p)\ ;\ (p, f)\ ;\ (f, p)\ ;\ (f, f)\}$.
- On note :

– A l'évènement « avoir pile au premier lancer » : $A = \{(p, p)\ ;\ (p, f)\}$;

– B l'évènement « avoir deux fois le même résultat » : $B = \{(p, p)\ ;\ (f, f)\}$.

- $\overline{A}$ est l'évènement « ne pas avoir pile au premier lancer » : $\overline{A} = \{(f, f)\ ;\ (f, p)\}$.
- $A \cap B$ est l'évènement « avoir pile aux deux lancers » : $A \cap B = \{(p, p)\}$.
- $A \cup B$ est l'évènement « avoir pile au premier lancer ou deux fois le même résultat » :

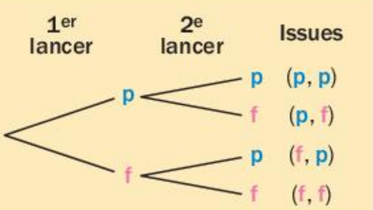
$$A \cup B = \{(p, p)\ ;\ (p, f)\ ;\ (f, f)\}.$$

Arbre des possibles, équiprobabilité et calculs

- On appelle **probabilité** sur un univers fini Ω une fonction P à valeurs dans $[0\ ;\ 1]$, telle que $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.
- Si A est un évènement de Ω, alors **P(A) est la somme des probabilités des évènements élémentaires** contenus dans A. On a alors $\mathbf{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$. On a aussi $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$ et $\mathbf{P(\overline{A}) + P(A) = 1}$.
- Si toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ; la probabilité d'un évènement A est alors $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}}$.
- Si B est un évènement de Ω, alors $\mathbf{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)}$.

Exemple

On peut représenter la situation de l'exemple ci-dessus à l'aide d'un **arbre des possibles**. Il y a quatre issues équiprobables.



- $P(A) = P(\{(p, p)\ ;\ (p, f)\}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = P(\{(p, p)\ ;\ (f, f)\}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
- $P(A \cap B) = P(\{(p, p)\}) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(\overline{A}) = P(\{(f, f)\ ;\ (f, p)\}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{1}{2}$.
- $P(A \cup B) = P(\{(p, p)\ ;\ (p, f)\ ;\ (f, f)\}) = \dfrac{3}{4}$ ou $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Exercices en ligne
Réactivation
variations.kwyk.fr/1re

Réactivation

Évènements, intersection et réunion

Pour les exercices 1 à 3
On considère une urne contenant des boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes numérotées de 1 à 4 et six boules rouges numérotées de 5 à 10. On tire au hasard une boule.

1 On note V l'évènement « tirer une boule verte » et I l'évènement « tirer une boule avec un numéro impair ».
a. À l'aide d'une phrase, décrire les évènements $\overline{V}$, $\overline{I}$, $V \cap I$ et $V \cup I$.
b. Déterminer le nombre d'issues relatives à chacun des évènements précédents.

2 **a.** Proposer un évènement élémentaire.
b. Proposer des évènements incompatibles.

3 QCM TICE
On souhaite simuler le tirage d'une boule dans l'urne à l'aide d'un tableur par le tirage aléatoire d'un nombre entier entre 1 et 10.
Quelle(s) instruction(s) tableur peut-on utiliser ?
a. =ALEA(1;10) **b.** =ALEA.ENTRE.BORNES(1;10)
c. =ENT(10*ALEA()+1) **d.** =10*ALEA()

▶ TICE – Utilisation du tableur p. 367

Arbre des possibles, équiprobabilité et calculs

4 Lors d'une offre promotionnelle, une patinoire propose à ses clients de faire tourner une roue pour gagner un bon de réduction sur la location de patins. On suppose qu'il y a équiprobabilité, c'est-à-dire qu'il y a autant de chances de gagner un bon de réduction que de ne pas en gagner.
On interroge au hasard trois clients.
1. À l'aide d'un arbre des possibles, représenter cette situation.
2. Déterminer la probabilité que :
a. les trois clients aient obtenu un bon de réduction ; **b.** au moins un client ait obtenu un bon de réduction.

5 Des sorties culturelles facultatives sont proposées aux 30 élèves d'une classe : une visite d'exposition et une pièce de théâtre. On regroupe une partie du bilan des inscriptions dans le tableau ci-dessous.

	Nombre d'élèves inscrits à la visite de l'exposition	Nombre d'élèves non inscrits à la visite de l'exposition	Total
Nombre d'élèves inscrits à la pièce de théâtre	18		25
Nombre d'élèves non inscrits à la pièce de théâtre			
Total		11	30

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2. On interroge au hasard un élève sur ses choix.
a. Quelle est la probabilité que cet élève participe aux deux sorties ? ne participe à aucune sortie ?
b. Quelle est la probabilité que cet élève soit inscrit à la visite de l'exposition ? ne le soit pas ?

6 On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on tire une carte au hasard.
On note F l'évènement « obtenir une figure (c'est-à-dire un valet, une dame ou un roi) ».
On note C l'évènement « obtenir du carreau ».
1. a. Décrire à l'aide d'une phrase les évènements $\overline{C}$, $\overline{F}$, $F \cap C$ et $F \cup C$.
b. Déterminer la probabilité de chacun des évènements précédents.
2. On suppose qu'on tire l'as de trêfle, qu'on ne le remet pas dans le paquet, et qu'on tire à nouveau une carte. Calculer la probabilité que la deuxième carte tirée soit :
a. encore un as ; **b.** un pique.

Corrigés p. 368

Activités

OBJECTIF 1
Définir une probabilité conditionnelle

1 Probabilités au pays des merveilles

Dans une assemblée de 150 personnes, 45 personnes ont lu le livre *Les Aventures d'Alice au pays des merveilles* de Lewis Carroll.
On sait que 12 personnes de cette assemblée ont leur anniversaire en janvier (comme Lewis Carroll) et que parmi elles 7 ont lu le livre.

1. On choisit une personne au hasard dans l'assemblée. On note :
– L l'évènement « la personne choisie a lu le livre » ;
– A l'évènement « la personne choisie a son anniversaire en janvier » ;
– N l'évènement « la personne choisie n'a pas son anniversaire en janvier ».

a. Que peut-on dire des évènements A et N ?
b. Recopier et compléter le tableau suivant.

	A	N	TOTAL
L			45
$\overline{L}$			
TOTAL			150

2. a. Interpréter à l'aide d'une phrase les évènements $N \cap L$ et $N \cup L$.
b. Calculer les probabilités des évènements $N \cap L$ et $N \cup L$.

3. a. On choisit dans l'assemblée Marianne qui est née en novembre.
Quelle est la probabilité qu'elle ait lu le livre ?
b. Calculer $\dfrac{P(N \cap L)}{P(N)}$, noté $P_N(L)$, et comparer ce résultat au résultat précédent.
c. On sait que dans l'assemblée, Renée a lu le livre. Quelle est la probabilité qu'elle soit née en novembre ? Comment pourrait-on noter cette probabilité ?

4. Rédiger une courte biographie de Lewis Carroll, en indiquant quelques-uns de ses travaux de recherches mathématiques et en précisant notamment ce que l'on appelle le *diagramme de Carroll*.

OBJECTIF 2
Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

2 Partition et danse

Une école de danse propose six cours de danse : un cours de danse classique et un cours de danse modern jazz, chacun à un niveau débutant, intermédiaire ou avancé. On suppose qu'un élève ne suit pas de cours de niveaux différents pour le même style de danse, et qu'il y a des élèves inscrits dans tous les cours.
On choisit au hasard un élève de l'école et on lui demande ce qu'il suit comme cours. On note :
– C l'évènement « l'élève suit un cours de classique » ;
– M l'évènement « l'élève suit un cours de modern jazz » ;
– D l'évènement « l'élève suit un cours de niveau débutant » ;
– I l'évènement « l'élève suit un cours de niveau intermédiaire » ;
– A l'évènement « l'élève suit un cours de niveau avancé ».

1. a. Que peut-on dire des évènements D, I et A, pris deux par deux ?
b. Justifier que les évènements D, I et A ne sont pas vides et que $D \cup I \cup A = \Omega$, où Ω est l'univers de toutes les issues.

2. a. Que peut-on dire des évènements $C \cap D$, $C \cap I$ et $C \cap A$, pris deux par deux ?
b. Justifier qu'on a $(C \cap D) \cup (C \cap I) \cup (C \cap A) = C$.
c. En déduire que $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap I) + P(C \cap A)$.

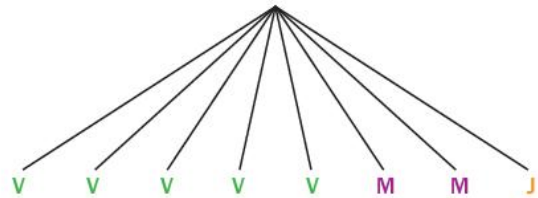
Fichier logiciel
Activité 4
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 2
Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

3 Des arbres à choux-fleurs

Un maraîcher prépare des cageots de huit choux-fleurs de couleurs diverses : cinq sont verts (V), deux sont mauves (M) et un est jaune (J). On choisit un chou-fleur au hasard dans le cageot et on s'intéresse à la couleur du chou-fleur.

1. L'arbre des possibles illustrant le choix d'un chou-fleur selon sa couleur est le suivant.

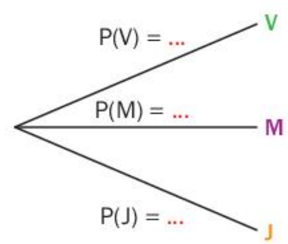


Préciser les valeurs de P(V), P(M) et P(J).

2. On veut réduire la taille de l'arbre, en ne gardant que trois branches, correspondant chacune à une couleur. Par exemple, les cinq branches correspondant à un chou-fleur vert sont remplacées par une seule branche associée à la probabilité P(V).

La branche est alors dite « **pondérée** ».

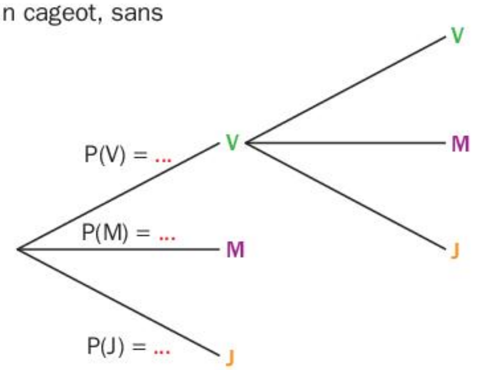
Recopier et compléter le nouvel arbre ci-contre.



3. On choisit au hasard un premier chou-fleur dans un cageot, sans le remettre dedans, puis un second.

a. On suppose que le premier chou-fleur est vert.
Préciser la probabilité que le second chou-fleur soit aussi vert, c'est-à-dire $P_V(V)$.
De même, préciser $P_V(M)$ et $P_V(J)$.

b. Recopier et compléter l'arbre ci-contre pour qu'il illustre les deux tirages successifs, en pondérant toutes les branches.



OBJECTIF 3
Caractériser l'indépendance

4 Jouons à « pile » ou « face » OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

On dispose d'une pièce parfaitement équilibrée et on la lance n fois de suite (n étant un nombre entier supérieur ou égal à 2).
On note :
– A l'évènement « obtenir au moins une fois "pile" et au moins une fois "face" » ;
– B l'évènement « obtenir "pile" une fois au maximum ».

a. Justifier que :

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad P(B) = \frac{n+1}{2^n} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}.$$

b. TICE Pour quelle(s) valeur(s), à conjecturer, du nombre entier n, a-t-on :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \ ?$$

Maths à l'oral
Expliquez votre démarche à l'oral.

Cours

OBJECTIF 1 Définir une probabilité conditionnelle

Savoir-faire 1 p. 289

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P sur Ω.
A, B et C sont trois évènements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues de cette expérience.

Définition La probabilité de l'évènement **B sachant que l'évènement A est réalisé** est le nombre $\mathbf{P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}}$.

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

La probabilité de « B sachant A » (sous-entendu que A est réalisé) correspond à $\dfrac{\text{probabilité de l'intersection}}{\text{probabilité de la condition}}$

Exemple

Un sac contient quatre boules noires numérotées de 1 à 4 et six boules blanches numérotées de 1 à 6, toutes indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule dans le sac.

Ω = {❶ ; ❷ ; ❸ ; ❹ ; ① ; ② ; ③ ; ④ ; ⑤ ; ⑥}.

On note : – A l'évènement « la boule porte un numéro 3 » ;
– B l'évènement « la boule est blanche ».

On a A = {③ ; ❸}, B = {① ; ② ; ③ ; ④ ; ⑤ ; ⑥} et $B \cap A$ = {③}.

Par suite, $P(A) = \dfrac{2}{10} \neq 0$ et $P(B \cap A) = \dfrac{1}{10}$.

La probabilité d'extraire une boule blanche sachant qu'elle porte un numéro 3 est égale à $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$.

$P(B \cap A)$ correspond à la probabilité de prélever du sac une boule blanche portant le numéro 3.

Théorème La fonction $\mathbf{P_A}$, définie sur Ω, est une loi de probabilité appelée **loi de probabilité conditionnelle sachant A**. Autrement dit, elle vérifie :

- $P_A(\Omega) = 1$ et $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$;
- si B et C sont *disjoints*, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

Démonstration rédigée p. 304

Des évènements disjoints sont dits aussi **incompatibles** :
$B \cap C = \varnothing$.

Propriétés

- $\mathbf{P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)}$
- $\mathbf{P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A)}$
- Si $P(B) \neq 0$, alors $\mathbf{P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)}$.

Démonstration : exercice 90 p. 305

On a aussi :
- $P_A(A) = 1$;
- $P_A(\varnothing) = 0$;
- Si $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple

Un centre de vacances propose des séjours à la semaine avec deux options : l'espace nautique (option A) ou la salle multisport (option B).
Le fichier des résidents, une semaine donnée, indique la répartition suivante.

	Avec l'option A	Sans l'option A	Total
Avec l'option B	48	22	**70**
Sans l'option B	39	16	**55**
Total	**87**	**38**	125

On interroge au hasard l'un des résidents. On note A l'évènement « le résident a pris l'option A » et B l'évènement « le résident a pris l'option B ».

$P(A) = \dfrac{87}{125} \neq 0$, $P_A(B) = \dfrac{48}{87}$ et $P_A(\overline{B}) = \dfrac{39}{87}$.

$P(B) = \dfrac{70}{125} \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{48}{70}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{48}{125}$.

- Les résultats sont obtenus par lecture du tableau.
- On peut aussi retrouver $P_A(\overline{B})$ par la formule :
$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$,
soit $P_A(\overline{B}) = 1 - \dfrac{48}{87}$.
- On a aussi :
$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$
soit :
$P(A \cap B) = \dfrac{48}{70} \times \dfrac{70}{125}$.

OBJECTIF 2 Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

Savoir-faire 2 et 3 p. 290-291

P est une probabilité définie sur un univers Ω et k est un nombre entier naturel non nul.

Définition Les évènements $A_1, A_2, \dots, A_k$ de Ω forment une **partition** d'un univers Ω si et seulement si :

- ces évènements sont tous non vides ;
- ces évènements sont deux à deux disjoints ;
- leur réunion $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ est l'univers Ω.

Une partition se nomme aussi un **système complet d'évènements**.

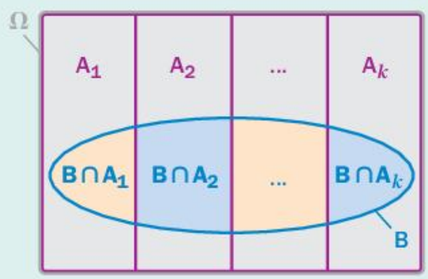
Cas particulier

Si $0 < P(A) < 1$, alors les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.

Propriété **Formule des probabilités totales**

Si les évènements $A_1, \dots, A_k$ forment une partition d'un univers Ω alors, pour tout évènement B de Ω :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_k).$$



Démonstration à compléter : exercice 89 p. 304

Cas particulier

Si A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, alors $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$.

Modélisation

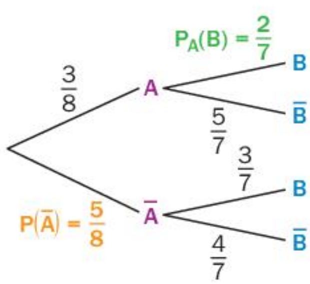
Un **arbre pondéré** est un arbre dont chaque branche est marquée d'une probabilité. Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre pondéré qui est construit selon les règles suivantes.

- **Règle de la somme :** la somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- **Règle du produit :** la probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.
- **Application de la formule des probabilités totales :** la probabilité d'un évènement E inscrit aux extrémités de plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à E.

Le nombre d'évènements formant une partition donne le nombre de branches issues du premier nœud d'un arbre.

Exemple

Un sac contient huit jetons dont trois sont blancs. Arnaud prend au hasard un jeton qu'il conserve dans le sac, puis, à son tour, Benoît prend au hasard un jeton dans ce sac. On note A l'évènement « le jeton d'Arnaud est blanc » et B l'évènement « le jeton de Benoît est blanc ». Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'arbre ci-contre.



A et $\overline{A}$ forment une partition.

- La probabilité qu'Arnaud et Benoît prennent chacun un jeton blanc est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}.$$

On applique la règle du produit.

- La probabilité que Benoît prenne un jeton blanc est :

$$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B \cap A) + P_{\overline{A}}(B) \times P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{28} + \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

On applique la **formule des probabilités totales.**

OBJECTIF 3 Caractériser l'indépendance

Savoir-faire 4 et 5 p. 292-293

P est une probabilité définie sur un univers Ω, et A et B sont deux évènements de Ω.

Définition

Les évènements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Pour tout évènement A, Ω et A sont indépendants, et $\varnothing$ et A sont indépendants.

Exemple

Dans les **deux situations** suivantes, on prend au hasard un nombre dans l'univers Ω, et on note D l'évènement « le nombre est un multiple de deux » et T l'évènement « le nombre est un multiple de trois ».

Situation 1 On considère l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
On a $D = \{2 ; 4 ; 6\}$, $T = \{3 ; 6\}$ et $D \cap T = \{6\}$.
Donc $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(D \cap T) = \frac{1}{6}$.
$P(D) \times P(T) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
On trouve bien $P(D \cap T) = P(D) \times P(T)$, donc les évènements D et T sont indépendants.

Situation 2 On considère l'univers $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$.
On a $D = \{2 ; 4 ; 6\}$, $T = \{3 ; 6\}$ et $D \cap T = \{6\}$.
On a $P(D) = \frac{3}{7}$, $P(T) = \frac{2}{7}$ et $P(D \cap T) = \frac{1}{7}$.
$P(D) \times P(T) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$.
On trouve $P(D \cap T) \neq P(D) \times P(T)$, donc les évènements D et T ne sont pas indépendants.

Propriété

A est un évènement de probabilité non nulle.
A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration : exercice 91 p. 305

La réalisation de l'évènement A **n'influe pas** sur la réalisation de l'évènement B.

De même, si $P(B) \neq 0$, alors « A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ».

Répétition de deux épreuves indépendantes

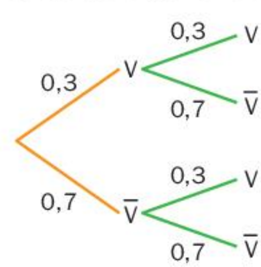
Un sac contient dix jetons dont trois sont verts.
On note V le fait de piocher au hasard un jeton vert : $P(V) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
On s'intéresse à l'expérience où Marc pioche au hasard, deux fois de suite, un jeton dans le sac et le remet.
Cette expérience aléatoire peut être représentée des deux façons suivantes.

Chaque pioche est une épreuve. **Les deux épreuves sont indépendantes** car Marc remet le premier jeton dans le sac avant de piocher le second. On a la même probabilité d'avoir un jeton vert au premier et au second tirage.

Représentation par un tableau

		1re pioche		
		V	$\overline{V}$	Total
2de pioche	V	$0{,}3 \times 0{,}3$	$0{,}7 \times 0{,}3$	0,3
	$\overline{V}$	$0{,}3 \times 0{,}7$	$0{,}7 \times 0{,}7$	0,7
	Total	0,3	0,7	1

Représentation par un arbre



Les épreuves étant indépendantes, la probabilité que Marc pioche deux jetons verts est égale à $P(V) \times P(V) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$.

1 Calculer une probabilité conditionnelle

OBJECTIF 1
Définir une probabilité conditionnelle

On interroge les 32 élèves d'une classe de Seconde sur leur choix de spécialités pour la classe de Première. On s'intéresse en particulier au fait qu'ils choisissent ou non les spécialités mathématiques et physique-chimie. On relève qu'un seul élève ne choisit aucune des deux spécialités, que 28 élèves choisissent la spécialité mathématiques (évènement noté M) et 23 la spécialité physique-chimie (évènement noté S).

1. Recopier le tableau ci-contre et le compléter à l'aide des données de l'énoncé.

	M	$\overline{M}$	Total
S			
$\overline{S}$			
Total			

2. On interroge au hasard un élève sur ses choix.

a. Quelle est la probabilité que l'élève ait choisi les deux spécialités ?

b. Préciser P(M) et P(S).

c. Calculer $P_M(S)$; en interpréter le résultat et en proposer un autre mode de calcul.

Solution

1.

	M	$\overline{M}$	Total
S	20	3	23
$\overline{S}$	8	1	9
Total	28	4	32

D'après l'énoncé, on peut remplir quatre cellules du tableau.

À partir de ces données, on en déduit les autres et on peut compléter le tableau.

Ensuite, on complète le tableau en calculant le nombre d'élèves ne choisissant pas une spécialité donnée : $32 - 28 = 4$ et $32 - 23 = 9$.

Puis on calcule le nombre d'élèves ne choisissant qu'une des deux spécialités : $4 - 1 = 3$ et $9 - 1 = 8$.

Enfin, on calcule le nombre d'élèves choisissant les deux spécialités : $28 - 8 = 20$.

Dans le tableau, on lit que 20 élèves ont choisi les deux spécialités.

2. a. $M \cap S$ est « l'élève a choisi les deux spécialités » et $P(M \cap S) = \frac{20}{32} = 0{,}625$.

La probabilité que l'élève ait choisi les deux spécialités est égale à $\boxed{0{,}625}$.

b. $\boxed{P(M) = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} = 0{,}875}$ et $\boxed{P(S) = \frac{23}{32} = 0{,}718\,75}$.

On utilise la définition d'une probabilité conditionnelle.

c. $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0{,}625}{0{,}875} = \frac{5}{7}$.

La probabilité que l'élève ait choisi la spécialité physique-chimie sachant qu'il a choisi la spécialité mathématiques est égale à $\boxed{\frac{5}{7}}$.

On peut retrouver cette probabilité en regardant dans le tableau le nombre d'élèves ayant choisi la spécialité physique-chimie parmi ceux qui ont choisi la spécialité mathématiques : $P_M(S) = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$.

Il y a 28 élèves qui ont choisi la spécialité mathématiques, et parmi eux 20 ont choisi la spécialité physique-chimie.

Application

7 Une commerçante vend des cycles de marque « Cabe » et « Race », électrifiés ou non.

D'après ses factures de l'année 2018, sur un total de 75 ventes, elle a vendu 31 vélos « Cabe » dont 7 électrifiés. Elle a également vendu 9 vélos « Race » électrifiés.

1. Résumer les données de l'énoncé dans un tableau et le compléter entièrement.

2. On prend au hasard une facture de l'année 2018.

a. Quelle est la probabilité qu'elle concerne un vélo « Cabe » non électrifié ?

b. La facture concerne un vélo « Race ».
Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas électrifié ?

c. La facture concerne un vélo non électrifié.
Quelle est la probabilité que ce soit un « Race » ?

Les incontournables 29 et 30 p. 297

2 Illustrer une situation à l'aide d'un arbre pondéré

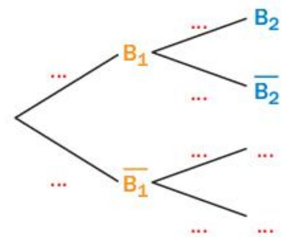
OBJECTIF 2
Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

Un sac et une urne contiennent chacun deux jetons blancs et trois jetons rouges.
On extrait au hasard un jeton du sac, on note sa couleur et on le place dans l'urne.
Puis on extrait au hasard un jeton de l'urne.
On note B_1 l'évènement « le jeton extrait du sac est blanc » et B_2 l'évènement « le jeton extrait de l'urne est blanc ».

1. a. Calculer $P(B_1)$, $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{\overline{B_1}}(B_2)$.

b. Recopier l'arbre pondéré ci-contre et le compléter afin d'illustrer les deux tirages successifs.

2. Calculer la probabilité d'extraire un jeton blanc du sac puis un jeton blanc de l'urne.



Solution

1. a. Dans le sac, il y a deux jetons blancs parmi les cinq : $\boxed{P(B_1) = \frac{2}{5}}$.

L'évènement B_2 est conditionné par l'évènement B_1 :

$$\boxed{P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}} \text{ et } \boxed{P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}.$$

Si on extrait un jeton blanc du sac, au deuxième tirage, il y a dans l'urne 3 jetons blancs et 3 jetons rouges.

Si on extrait un jeton rouge du sac, au deuxième tirage, il y a dans l'urne 2 jetons blancs et 4 jetons rouges.

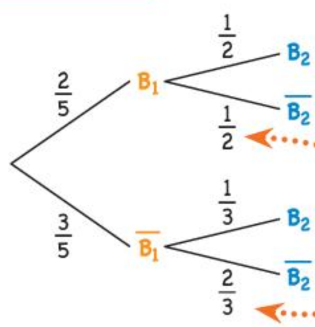
b. On pondère l'arbre avec les probabilités calculées en **a**. Il reste à déterminer :

$P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$;

$P_{B_1}(\overline{B_2}) = 1 - P_{B_1}(B_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = 1 - P_{\overline{B_1}}(B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

On obtient l'arbre pondéré ci-contre.



On utilise **la règle de la somme**.

2. La probabilité d'extraire un jeton blanc du sac puis un jeton blanc de l'urne est $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}}$.

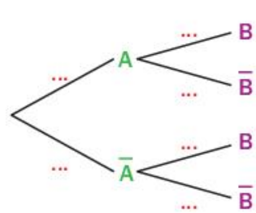
On utilise **la règle du produit**.

Application

8 A et B sont deux évènements d'un univers Ω tels que $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}4$.

a. Recopier et compléter entièrement l'arbre ci-contre.

b. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.



9 76 % des clients d'une station de carburant utilisent les pompes en libre-service et 72 % d'entre eux prennent du gazole. Parmi les clients qui utilisent les autres pompes, 58 % prennent aussi du gazole.
On interroge au hasard un client qui se fournit en carburant dans cette station.
On note L l'évènement « le client utilise une pompe en libre-service » et G l'évènement « le client achète du gazole ».

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs $P(L)$, $P_L(G)$ et $P_{\overline{L}}(G)$.

b. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

c. Donner la signification de l'évènement $G \cap L$ et calculer sa probabilité.

d. Quelle est la probabilité que le client ne se serve pas à une pompe en libre-service et ne prenne pas du gazole ?

Les incontournables 31 et 32 p. 297

Vidéo
Utiliser la formule des probabilités totales
hatier-clic.fr/ma1291

3 Utiliser la formule des probabilités totales

OBJECTIF 2
Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

À l'issue d'une campagne de vaccination contre la grippe, 52 % des individus d'une population sont vaccinés. À la fin de la période hivernale, on fait un bilan : 30 % des non vaccinés ont été malades de la grippe, ainsi que 2 % des vaccinés.
On choisit une personne au hasard dans la population à la fin de la période hivernale.
On note V l'évènement « la personne s'est faite vacciner » et G l'évènement « la personne a été atteinte de la grippe ».

1. Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

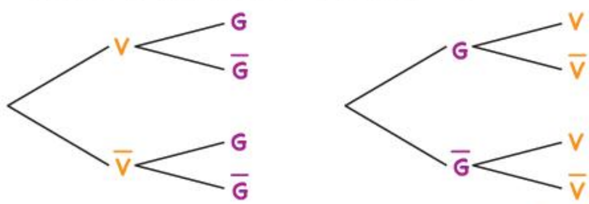
2. a. Calculer $P(V \cap G)$ et $P(\overline{V} \cap G)$.

b. En déduire la probabilité que la personne ait été atteinte de la grippe.

c. Déterminer la probabilité que la personne ait été vaccinée sachant qu'elle a pourtant été atteinte de la grippe, sous forme exacte, puis arrondie au millième.

Solution

1. • On peut a priori envisager les deux arbres suivants :



On crée un arbre en utilisant les deux évènements et leurs évènements contraires.

D'après l'énoncé, $P(V) = 0{,}52$; $P_{\overline{V}}(G) = 0{,}3$ et $P_V(G) = 0{,}02$.

L'énoncé fournit déjà certaines des pondérations.

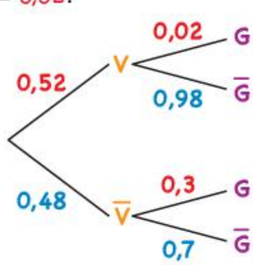
L'arbre que l'on peut pondérer à l'aide de ces résultats est celui de gauche.

• On finit de compléter les pondérations :

$P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

$P_V(\overline{G}) = 1 - P_V(G) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

$P_{\overline{V}}(\overline{G}) = 1 - P_{\overline{V}}(G) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$



On complète l'arbre en calculant les pondérations manquantes, à l'aide de **la règle de la somme**.

2. a. $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0{,}52 \times 0{,}02 = 0{,}010\,4$.

$P(\overline{V} \cap G) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(G) = 0{,}48 \times 0{,}3 = 0{,}144$.

On utilise **la règle du produit**.

b. L'ensemble $\{V, \overline{V}\}$ forme une partition de l'univers, car $0 < P(V) < 1$.
Alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G) = 0{,}0104 + 0{,}144 = 0{,}1544.$$

La probabilité que la personne ait été atteinte de la grippe vaut 0,1544.

c. $P_G(V) = \dfrac{P(G \cap V)}{P(G)} = \dfrac{0{,}010\,4}{0{,}154\,4} = \dfrac{13}{193} \approx 0{,}067.$

On utilise **la formule des probabilités conditionnelles**.

La probabilité que la personne ait été vaccinée sachant qu'elle a été atteinte de la grippe vaut environ 0,067.

Application

10 Dans un lycée, 80 % des élèves déjeunent à la cantine. Parmi les élèves qui déjeunent à la cantine, 45 % sont des filles. Parmi les élèves qui ne déjeunent pas à la cantine, 60 % sont des filles. On choisit au hasard un élève de ce lycée. On note F l'évènement « l'élève est une fille » et D l'évènement « l'élève déjeune à la cantine ».

1. a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Déterminer $P(D \cap F)$ et $P(\overline{D} \cap F)$, puis en déduire $P(F)$.

2. L'élève choisi est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle ne déjeune pas à la cantine ?

Les incontournables 33 p. 297

4 Étudier l'indépendance de deux évènements

OBJECTIF 3
Caractériser l'indépendance

1. A, B et C sont trois évènements d'un univers Ω tels que :

$P(A) = 0{,}4$, $P(\overline{B}) = 0{,}25$, $P(C) = 0{,}35$, $P(A \cap B) = 0{,}3$ et $P(A \cup C) = 0{,}64$.

a. Les évènements A et B, d'une part, et les évènements A et C, d'autre part, sont-ils indépendants ?

b. Quelle doit-être la valeur de $P(B \cap C)$ pour que les évènements B et C soient indépendants ?

2. Dans un sac, il y a cinq jetons verts numérotés de 1 à 5, six jetons blancs numérotés de 1 à 6 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.

On prend au hasard un jeton dans le sac.

On note U l'évènement « le jeton est numéroté 1 », V l'évènement « le jeton est vert » et B l'évènement « le jeton est blanc ».

a. Les évènements U et V sont-ils indépendants ?

b. Les évènements U et B sont-ils indépendants ?

Solution

1. a. • $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3 = P(A \cap B)$.

On en déduit que les évènements A et B sont indépendants.

• $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0{,}4 + 0{,}35 - 0{,}64 = 0{,}11$.

$P(A) \times P(C) = 0{,}4 \times 0{,}35 = 0{,}14 \neq P(A \cap C)$.

On en déduit que les évènements A et C ne sont pas indépendants.

b. $P(B) \times P(C) = 0{,}75 \times 0{,}35 = 0{,}262\ 5$.

On en déduit que les évènements B et C sont indépendants si et seulement si $P(B \cap C) = 0{,}262\ 5$.

2. a. • Dans le sac, il y a $5 + 6 + 4 = 15$ jetons au total.

On calcule la probabilité de chacun des évènements U, V et B.

Il y a 3 jetons numérotés 1, donc $P(U) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Il y a 5 jetons verts, donc $P(V) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Il y a 6 jetons blancs, donc $P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

• Il y a un jeton vert numéroté 1, donc $P(U \cap V) = \frac{1}{15}$.

Or $P(U) \times P(V) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15} = P(U \cap V)$. Donc U et V sont indépendants.

b. Il y a un jeton blanc numéroté 1, donc $P(U \cap B) = \frac{1}{15}$.

Or $P(U) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \neq P(U \cap B)$. Donc U et B ne sont pas indépendants.

On calcule la probabilité de l'évènement contraire.

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$. L'égalité est bien vérifiée.

On utilise la formule : $P(A \cup C) + P(A \cap C) = P(A) + P(C)$

B et C indépendants $\Leftrightarrow$ $P(B) \times P(C) = P(B \cap C)$.

Chaque jeton a la même probabilité d'être pris ; chaque issue est donc équiprobable.

Application

11 On dispose d'un dé équilibré à 12 faces (dodécaèdre) numérotées de 1 à 12. On lance ce dé.
On note les évènements suivants : A « obtenir un nombre pair », B « obtenir un multiple de cinq » et C « obtenir un multiple de trois ».

a. Décrire les évènements $A \cap B$ et $A \cap C$.

b. Les évènements A et B, d'une part, et les évènements A et C, d'autre part, sont-ils indépendants ?

c. Les évènements B et C sont-ils indépendants ?

Les incontournables 34 et 35 p. 297

5 Étudier une répétition de deux épreuves indépendantes

OBJECTIF 3
Caractériser l'indépendance

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 3 rouges, 5 vertes et 2 jaunes.
On tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule.
On note R_1 l'évènement « tirer une boule rouge au premier tirage » (respectivement R_2 au second tirage).
On note V_1 l'évènement « tirer une boule verte au premier tirage » (respectivement V_2 au second tirage).
On note J_1 l'évènement « tirer une boule jaune au premier tirage » (respectivement J_2 au second tirage).

1. a. Comparer $P(R_1)$ et $P_{R_1}(R_2)$ sans les calculer.
b. Comparer, d'une part, $P(V_1)$ et $P_{R_1}(V_2)$ et, d'autre part, $P(J_1)$ et $P_{R_1}(J_2)$, sans les calculer.
c. Que peut-on en déduire sur les deux tirages ?
2. a. Illustrer la situation à l'aide d'un tableau à double entrée, afin de donner les probabilités de tous les tirages possibles.
b. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. On réalise désormais n fois (avec n un nombre entier naturel non nul) l'épreuve du tirage avec remise. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules rouges ?

Solution

1. a. Le premier tirage se fait avec remise, donc le second tirage se fait dans les mêmes conditions que le premier : $P(R_1) = P_{R_1}(R_2)$.

Le résultat du premier tirage n'a pas d'influence sur celui du second.

b. De même $P(V_1) = P_{R_1}(V_2)$ et $P(J_1) = P_{R_1}(J_2)$.

Le fait d'avoir pris une première boule rouge n'influe pas sur la probabilité de la couleur de la seconde boule.

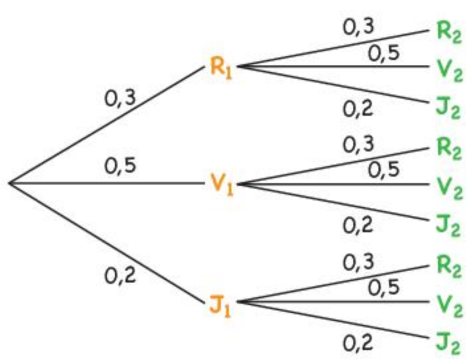
c. On en déduit que les deux tirages constituent des épreuves indépendantes.

2. a.

		2nd tirage			
		R_2	V_2	J_2	TOTAL
1er tirage	R_1	$P(R_1 \cap R_2) = 0{,}09$	$P(R_1 \cap V_2) = 0{,}15$	$P(R_1 \cap J_2) = 0{,}06$	$P(R_1) = 0{,}3$
	V_1	$P(V_1 \cap R_2) = 0{,}15$	$P(V_1 \cap V_2) = 0{,}25$	$P(V_1 \cap J_2) = 0{,}1$	$P(V_1) = 0{,}5$
	J_1	$P(J_1 \cap R_2) = 0{,}06$	$P(J_1 \cap V_2) = 0{,}1$	$P(J_1 \cap J_2) = 0{,}04$	$P(J_1) = 0{,}2$
	TOTAL	$P(R_2) = 0{,}3$	$P(V_2) = 0{,}5$	$P(J_2) = 0{,}2$	1

On complète le tableau à l'aide de la règle du produit et de la règle de la somme. Par exemple, $P(R_1 \cap R_2) = 0{,}3 \times 0{,}3$.

b. On construit l'arbre ci-contre.



3. Pour $n = 1$, $P(R_1) = 0{,}3$.
Pour $n = 2$,
$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = 0{,}3^2$.
Plus généralement, pour un nombre entier $n \geqslant 1$,
$P(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n)$
$= P(R_1) \times P(R_2) \times \ldots \times P(R_n)$
$= 0{,}3^n$.

Application

12 On dispose d'un dé cubique parfaitement équilibré qui a deux faces opposées noires et les autres faces blanches. On lance ce dé deux fois de suite.
a. Justifier que les deux lancers constituent deux épreuves indépendantes.
b. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
c. Déterminer la probabilité d'obtenir consécutivement deux faces noires.
d. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois une face blanche.

Les incontournables 36 p. 297

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P définie sur Ω.
A, B et C sont trois évènements de Ω. On suppose que $P(A) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

La **probabilité de « B sachant A »** (sous-entendu que A est réalisé) **est :**

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P_A(B) = \frac{\text{probabilité de l'intersection}}{\text{probabilité de la condition}}$$

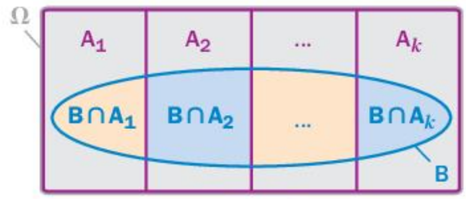
- $P_A(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$
- Si $B \cap C = \varnothing$, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$
- Si $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Cours 1 p. 286

Partition et formule des probabilités totales

Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) forment une **partition** de l'univers Ω si et seulement si :

- $A_1 \neq \varnothing, A_2 \neq \varnothing, \ldots, A_k \neq \varnothing$;
- si i et j sont dans $\{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$.



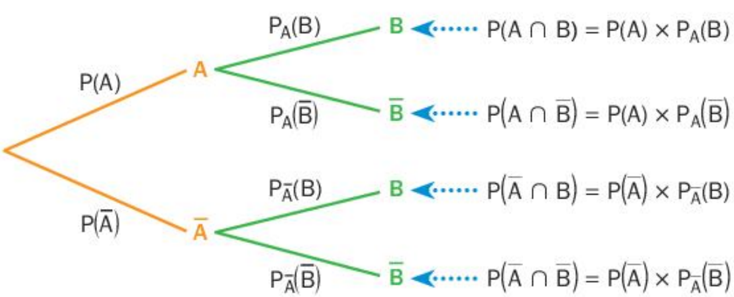
Formule des probabilités totales :
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$

Formule des probabilités totales, avec le cas particulier de la partition $\{A, \overline{A}\}$: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

Cours 2 p. 287

Arbre pondéré

Représentation de la **succession de deux épreuves**



On peut aussi représenter cette situation à l'aide d'un tableau.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Règle de la somme
La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

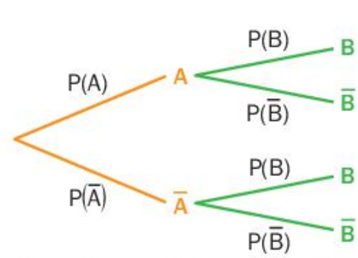
Règle du produit
La probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Cours 2 p. 287

Indépendance

- **A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**
- **Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P_A(B) = P(B)$.**

La réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B.
Dans ce cas, la situation peut être illustrée par l'arbre ci-contre.



Cours 3 p. 288

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

Pour les questions 13 à 16

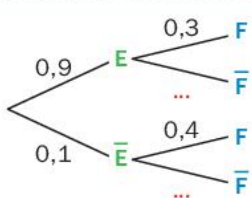
Une boulangerie propose des brioches pouvant être recouvertes de grains de sucre (S) ou contenir des grains de raisin (R). Le tableau ci-contre donne la répartition incomplète des quatre types de brioche un jour donné. On prend une brioche au hasard.
On note S l'évènement « la brioche est recouverte de grains de sucre » et R l'évènement « la brioche contient des grains de raisin ».

	S	$\overline{S}$	TOTAL
R	20		25
$\overline{R}$			
TOTAL	30		50

	A	B	C	D
13 La probabilité qu'une brioche soit recouverte de grains de sucre et contienne des grains de raisin est :	$P_R(S)$	$P(S \cap R)$	0,4	1,1
14 $P_S(\overline{R})$ représente la probabilité qu'une brioche :	soit recouverte de grains de sucre et contienne des grains de raisin.	soit recouverte de grains de sucre et ne contienne pas de grains de raisin.	soit recouverte de grains de sucre sachant qu'elle ne contient pas de grains de raisin.	ne contienne pas de grains de raisin sachant qu'elle est recouverte de grains de sucre.
15 La probabilité qu'une brioche soit recouverte de grains de sucre sachant qu'elle contient des grains de raisin est :	$P_R(S)$	$P(S \cap R)$	$P_S(R)$	$P_R(\overline{S})$
16 La probabilité qu'une brioche contienne des grains de raisin sachant qu'elle est recouverte de grains de sucre est :	0,4	0,66	$\frac{2}{3}$	0,6

Pour les questions 17 à 21

E et F sont deux évènements d'un univers Ω.
On donne l'arbre pondéré incomplet ci-contre.



	A	B	C	D
17 $P_E(F) = \dots$	0,3	$0,9 \times 0,3$	$0,9 + 0,3$	$1 - 0,3$
18 $P(E \cap F) = \dots$	0,3	$0,9 \times 0,3$	$0,9 + 0,3$	$1 - 0,3$
19 $P(F) = \dots$	$0,9 \times 0,3$	$0,1 \times 0,4$	$0,9 \times 0,3 + 0,1 \times 0,4$	$0,3 + 0,4$
20 $P_F(E) = \dots$	0,3	$0,9 \times 0,3$	$\frac{27}{31}$	$\frac{4}{31}$
21 E et F sont :	indépendants.	non indépendants.	incompatibles.	non disjoints.

Pour les questions 22 et 23

U et V sont deux évènements indépendants d'un univers Ω tels que $P(U) = 0,26$ et $P_U(V) = 0,56$.

	A	B	C	D
22 $P(V) = \dots$	0,56	$0,56 - 0,26$	$1 - 0,56$	$0,26 \times 0,56$
23 $P(U \cap V) = \dots$	0	$0,26 + 0,56$	$1 - (0,26 + 0,56)$	$0,26 \times 0,56$

Corrigés p. 368

Les bons réflexes — Adoptez la bonne stratégie !

24 **Parlons stratégies !** À l'oral

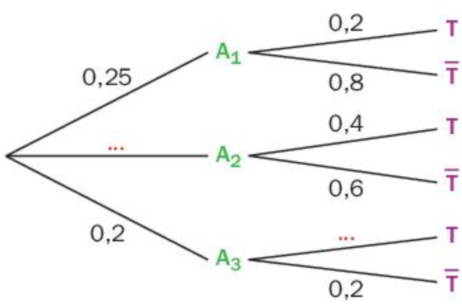
A, B et C sont trois évènements d'un univers Ω. $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap C) = 0{,}3$.
Calculer chacune des probabilités suivantes en expliquant la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $P_A(C)$ **b.** $P(B \cap A)$ **c.** $P_A(\overline{B})$ **d.** $P_A(\overline{C})$

25 **Parlons stratégies !** À l'oral

A_1, A_2, A_3 et T sont quatre évènements d'un univers Ω.
À l'aide de l'arbre pondéré ci-contre, calculer chacune des probabilités suivantes en expliquant la **stratégie** choisie dans chaque cas.

a. $P(A_1 \cap T)$ **b.** $P(A_2)$ **c.** $P_{A_3}(T)$
d. $P(T)$ **e.** $P(\overline{T})$ **f.** $P(A_2 \cap \overline{T})$



26 **En moins de trois minutes !**

A et B sont deux évènements d'un univers Ω. On donne le tableau incomplet de probabilités ci-dessous.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,18	0,42	
$\overline{B}$			
Total	0,4		1

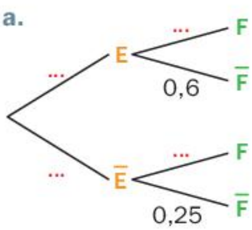
Déterminer chacune des probabilités suivantes.

a. $P(\overline{A})$ **b.** $P(A \cap \overline{B})$ **c.** $P(\overline{B})$
d. $P_A(B)$ **e.** $P_B(A)$ **f.** $P(A \cup B)$

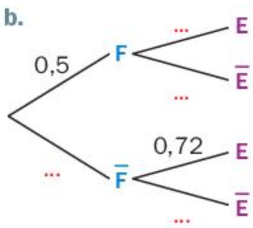
27 **En moins de deux minutes !**

E et F sont deux évènements d'un univers Ω.
Dans chaque cas, sachant que $P(E) = 0{,}6$, compléter entièrement l'arbre pondéré et calculer $P(E \cap F)$.

a.



b.



28 **En moins de quatre minutes !**

On lance deux fois de suite une pièce qui donne « face » (F) avec une probabilité égale à 0,4.
Illustrer cette situation à l'aide :

a. d'un arbre pondéré ;

b. d'un tableau à double entrée.

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Calculer une probabilité conditionnelle

29 On donne deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cup B) = 0,4$.

1. a. Calculer $P(A \cap B)$.

b. Recopier le tableau ci-contre et le compléter à l'aide des données de l'énoncé.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			

2. a. Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$.

b. Rédiger une phrase d'interprétation pour chacune des probabilités précédentes.

30 Lors du déménagement d'un CDI, des ouvrages de mathématiques et de SVT, de deux types, manuels scolaires ou annales de baccalauréat, ont été mis en vrac dans un carton. Le logiciel de recherche du CDI indique que parmi les 65 manuels scolaires placés dans le carton, 35 sont des manuels de mathématiques et que, parmi les 25 annales, il y en a 10 de SVT.

1. Résumer les données de l'énoncé dans un tableau à compléter entièrement.

2. On prend au hasard un ouvrage dans le carton.

a. Quelle est la probabilité que ce soit un manuel scolaire de mathématiques ?

b. Si l'ouvrage est un manuel scolaire, quelle est alors la probabilité qu'il traite de mathématiques ?

c. Si l'ouvrage concerne les SVT, quelle est alors la probabilité qu'il s'agisse d'annales ?

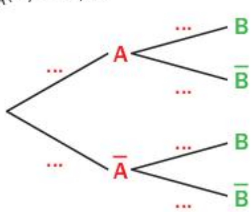
Illustrer une situation à l'aide d'un arbre pondéré

31 A et B sont deux évènements d'un univers Ω tels que $P(\overline{A}) = 0,6$, $P_A(\overline{B}) = 0,2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,7$.

a. Recopier et compléter entièrement l'arbre ci-contre.

b. Donner les valeurs de $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

c. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(A \cap \overline{B})$.



32 16 % des clients d'un magasin d'aquariophilie achètent des poissons d'eau de mer et parmi eux 45 % achètent des poissons-clowns. Parmi les clients qui achètent des poissons d'eau douce, 78 % achètent des poissons rouges.

On interroge au hasard un client de ce magasin.

• Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

Utiliser la formule des probabilités totales

33 Au rayon des guirlandes lumineuses d'un magasin de décoration, 66 % des guirlandes fonctionnent sur secteur et les autres avec des piles. Parmi les guirlandes fonctionnant avec des piles, 42 % ont l'option minuteur et parmi celles qui fonctionnent sur secteur, 38 % ont cette option.

On choisit au hasard une guirlande dans le rayon. On note S l'évènement « la guirlande fonctionne sur secteur » et M l'évènement « la guirlande a l'option minuteur ».

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Calculer $P(S \cap M)$ et $P(\overline{S} \cap M)$.

c. En déduire $P(M)$, puis $P_M(S)$.

d. Rédiger une phrase d'interprétation des deux probabilités précédentes.

Étudier l'indépendance de deux évènements

34 A et B sont deux évènements d'un univers Ω.
Dans chacun des cas suivants, justifier si les évènements A et B sont indépendants ou non.

a. $P(A) = 0,21$, $P(B) = 0,79$ et $P(A \cap B) = 0,17$.

b. $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cup B) = 0,84$.

c. $P(A) = 0,19$, $P(B) = 0,81$ et $P_A(B) = 0,1539$.

35 A et B sont deux évènements indépendants d'un univers Ω tels que $P(A) = 0,18$ et $P_A(B) = 0,48$.

• Déterminer $P(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Étudier une répétition de deux épreuves indépendantes

36 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire deux fois de suite une carte avec remise. On note R_1 l'évènement « obtenir une carte rouge au premier tirage » et N_2 l'évènement « obtenir une carte noire au second tirage ».

1. a. Justifier que les deux tirages constituent deux épreuves indépendantes.

b. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité de tirer :

a. deux cartes noires ;

b. au plus une carte rouge.

Corrigés p. 368

Entraînement

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Définir une probabilité conditionnelle

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

37 Vrai ou faux ?
On donne deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.

a. « $P_A(B) = 0{,}38$. » b. « $P_A(B) = \frac{3}{8}$. »

c. « $P_B(A) = 0{,}6$. » d. « $P_B(A) = 0{,}1$. »

38 Vrai ou faux ?
On note A et B deux évènements de probabilités non nulles.
a. « $P(A \cap B) = P_A(B) \times P_B(A)$. »
b. « $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$. »
c. « $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$. »
d. « $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$. »

39 QCM
On donne deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}18$ et $P_A(B) = 0{,}22$. Alors $P(A \cap B) = \ldots$:
a. 0,4 b. $\frac{9}{11}$ c. $\frac{99}{2\,500}$

Pour les exercices 40 et 41
On donne le tableau de probabilités ci-dessous, relatif à deux évènements A et B.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,12	0,28	0,4
$\overline{B}$	0,1	0,5	0,6
Total	0,22	0,78	1

40 QCM
a. $P_A(B) = 0{,}12$ b. $P_A(B) \approx 0{,}55$ c. $P_A(B) = 0{,}22$

41 QCM
a. $P_B(A) = 0{,}12$ b. $P_B(A) \approx 0{,}55$ c. $P_B(A) = 0{,}3$

42 QCM
On note A et B deux évènements, avec $P(B) \neq 0$.
$P_B(A)$ est la probabilité que :
a. A et B soient réalisés.
b. B soit réalisé sachant que A est réalisé.
c. A soit réalisé sachant que B est réalisé.

43 QCM
On note A et B deux évènements, avec $P(\overline{A}) \neq 0$.
$P_{\overline{A}}(\overline{B})$ est la probabilité que :
a. A et B ne soient pas réalisés.
b. B ne soit pas réalisé alors que A est réalisé.
c. B ne soit pas réalisé sachant que A n'est pas réalisé.

Savoir-faire 1 p. 289

44 On donne deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}6$.
a. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$.
b. En déduire les valeurs de $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_B(\overline{A})$ et $P_{\overline{A}}(B)$.

45 On donne le tableau de probabilités ci-dessous, relatif à deux évènements A et B.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			

a. Sachant que $P(A) = 0{,}64$, $P(B) = 0{,}32$ et $P_A(B) = 0{,}2$, recopier et compléter le tableau.
b. Calculer $P_B(A)$ et $P_B(\overline{A})$.

46 On note A et B deux évènements.
On suppose $P_A(B) = 0{,}47$ et $P(A \cap B) = 0{,}74$.
a. Calculer P(A). Que peut-on constater ?
b. Proposer une modification de l'énoncé pour corriger le problème constaté.
c. Plus généralement, quelle condition doit-on avoir sur $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$ pour que P(A) existe bien ?

47 A et B sont deux évènements qui vérifient $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}4$.
1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. a. Calculer $P(A \cup B)$ et en déduire une incohérence.
b. Proposer une correction de l'énoncé pour lever cette incohérence.

48 Lors des journées d'intégration du lycée, le club de rugby voisin propose une initiation aux filles de Seconde. À la fin du premier trimestre, on fait le bilan des inscriptions à l'UNSS Rugby. On interroge une fille de Seconde au hasard et on note les évènements I « la fille a participé à l'initiation » et U « la fille est inscrite à l'UNSS rugby ».

a. Traduire à l'aide de phrases les probabilités $P(I \cap U)$, $P_I(U)$ et $P_{\overline{U}}(\overline{I})$.
b. Traduire à l'aide de notations mathématiques l'évènement « la fille est inscrite à l'UNSS rugby et n'a pas participé à l'initiation ».

Fichier Python
Ex. 52
Manuel numérique enseignant

49 Copies à la loupe

Lorelei et Susana ont résolu l'exercice suivant.

« Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule dans l'urne sans la remettre, puis on en tire une deuxième.

On note les évènements B_1 « avoir une boule blanche au premier tirage » et B_2 « avoir une boule blanche au deuxième tirage ».

Déterminer les probabilités suivantes et rédiger une phrase d'interprétation : $P_{B_1}(B_2)$ et $P_{\overline{B_1}}(B_2)$. »

Voici leurs réponses.

Lorelei

$P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{5}$ est la probabilité que la première et la deuxième boule tirées soient blanches.

$P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{3}{5}$ est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche et une boule noire.

Susana

$P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{4}$ est la probabilité que la deuxième boule soit blanche.

$P_{\overline{B_1}}(B_2) = 1 - P_{B_1}(B_2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ est la probabilité que la deuxième boule soit blanche sachant que la première ne l'est pas.

- Leurs réponses sont-elles correctes ? Expliquer les erreurs trouvées et les corriger.

Maths à l'oral
Exposez à la classe votre solution à l'exercice traité par Lorelei et Susana.

50 Un centre de vacances pour adolescents propose deux activités : équitation et tir à l'arc. Les adolescents peuvent s'inscrire à une, deux ou aucune activité(s). 73 % choisissent de s'inscrire à l'équitation, 66 % au tir à l'arc et, parmi ces derniers, 75 % se sont inscrits aux deux activités. On choisit un adolescent au hasard et on note les évènements E « l'adolescent fait de l'équitation » et T « l'adolescent fait du tir à l'arc ».

a. À l'aide de notations mathématiques, traduire en probabilités, avec les évènements E et T, les informations données dans l'énoncé.

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en pourcentages.

	E	$\overline{E}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			100

c. Jeanne est inscrite à l'équitation. Quelle est la probabilité qu'elle ne fasse pas de tir à l'arc ?

d. Riadh n'est pas inscrit à l'équitation. Quelle est la probabilité qu'il fasse du tir à l'arc ?

★★

51 Avant de partir en congé, un chapelier étourdi a rangé les 80 chapeaux de sa boutique dans des cartons pour les protéger de la poussière, mais en oubliant de les étiqueter. 65 % des chapeaux sont en paille (évènement noté L) et les trois quarts d'entre eux sont ornés de fleurs ; par ailleurs, la moitié des chapeaux ne comportent pas de fleurs (évènement noté $\overline{F}$).

1. Regrouper ces informations dans un tableau d'effectifs à double entrée.

Aide Attention aux pourcentages.

2. On ouvre au hasard un carton à chapeau.

a. Quelle est la probabilité que ce chapeau soit orné de fleurs ? Même question, sachant qu'il est en paille.

b. Quelle est la probabilité que ce chapeau ne soit pas en paille et ne comporte pas de fleurs ?

c. Quelle est la probabilité que ce chapeau soit en paille sachant qu'il est orné de fleurs ?

52 ALGORITHMIQUE On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et de deux urnes : l'urne A contient 2 boules rouges et 3 vertes, et l'urne B contient 1 boule rouge et 2 vertes. On lance le dé et si le résultat est 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne A, sinon on tire une boule dans l'urne B.

On considère que la partie est gagnante si on tire une boule rouge. On note les évènements S « le dé donne 1 ou 2 » et R « on tire une boule rouge ».

a. À l'aide des informations de l'énoncé, donner les valeurs de P(S), $P_S(R)$ et $P_{\overline{S}}(R)$.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il simule une partie.

```
D ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 6
Si D ⩽ 2 alors
    U ← un nombre entier aléatoire entre ...
    Si U ⩽ ... alors afficher « gagné »
    Sinon afficher « perdu »
    Fin Si
Sinon
    U ← ...
    Si U ⩽ 1 alors afficher « ... »
    Sinon afficher « ... »
    Fin Si
Fin Si
```

c. Modifier cet algorithme pour simuler n parties (où n est un nombre entier naturel non nul) et pour qu'il compte le nombre de parties gagnées.

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

Savoir-faire 2 et 3 p. 290-291

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

53 Vrai ou faux ?

Un sac contient 5 jetons bleus, 6 jetons verts et 7 jetons rouges. On extrait au hasard un jeton du sac. On note respectivement B, V et R les évènements « le jeton est bleu », « le jeton est vert » et « le jeton est rouge ».

a. « B et V forment une partition de l'univers. »

b. « $B \cup V \cup R$ est l'univers. »

c. « B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers. »

d. « B, V et R forment une partition de l'univers. »

54 Vrai ou faux ?

A et B sont deux évènements incompatibles d'un univers Ω tels que $P(A) = 0{,}45$ et $P(B) = 0{,}55$.

a. « A et B forment une partition de Ω. »

b. « $A \cup B = \Omega$. »

c. « A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω. »

d. « A et B sont disjoints. »

55 QCM

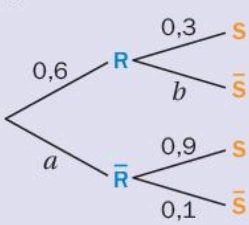
On a $P(A) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}5$.

La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. 0,9 **b.** 0,2 **c.** 0,78 **d.** 0,28

Pour les exercices 56 à 59

On utilise l'arbre pondéré ci-dessous.



56 QCM

Le nombre a est égal à :

a. $P(\overline{R})$ **b.** $-P(R)$ **c.** $1 - 0{,}6$ **d.** $0{,}6 - 1$

57 QCM

Le nombre b est égal à :

a. 0,3 **b.** 0,7 **c.** $P_R(\overline{S})$ **d.** $P_{\overline{S}}(R)$

58 QCM

La probabilité de l'évènement $R \cap S$ est égale à :

a. $0{,}6 + 0{,}3$ **b.** $0{,}6 \times 0{,}3$

c. $P_R(S) \times P(R)$ **d.** $P_S(R) \times P(S)$

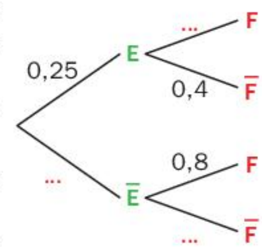
59 QCM

La probabilité de l'évènement S est égale à :

a. $0{,}3 + 0{,}9$ **b.** $0{,}18 + 0{,}9a$

c. $0{,}18 + 0{,}36$ **d.** $0{,}3 \times 0{,}6 \times 0{,}9 \times a$

60 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

b. Déterminer les probabilités de $F \cap E$ et $F \cap \overline{E}$.

c. En déduire la probabilité de l'évènement F.

d. Calculer la probabilité de l'évènement E, sachant que l'évènement F est réalisé.

61 Dans un jeu de 32 cartes, qui compte 12 figures, on extrait au hasard successivement et sans remise deux fois une carte. On note F_1 l'évènement « la première carte extraite est une figure » et F_2 l'évènement « la seconde carte extraite est une figure ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Déterminer la probabilité que les deux cartes extraites soient des figures.

c. Justifier que la probabilité que la deuxième carte extraite soit une figure est égale à 0,375.

d. En déduire la probabilité que la première carte extraite soit une figure, sachant que la seconde est une figure.

62 Dans un collège donné, on sait que 46 % des élèves sont des garçons. De plus, 82 % des garçons et 74 % des filles déjeunent à la cantine.

On interroge au hasard un élève de ce collège.

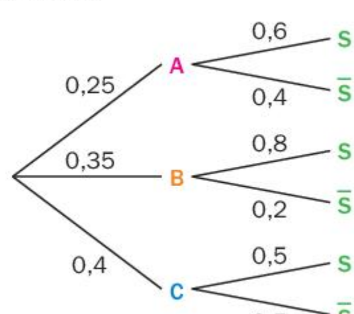
a. Quelle est la probabilité que l'élève soit une fille ?

b. Quelle est la probabilité que l'élève soit une fille et qu'elle déjeune à la cantine ?

c. Quelle est la probabilité que l'élève déjeune à la cantine ?

d. Sachant que l'élève déjeune à la cantine, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (Arrondir au centième.)

63 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



• Justifier que $P(S) = 0{,}63$.

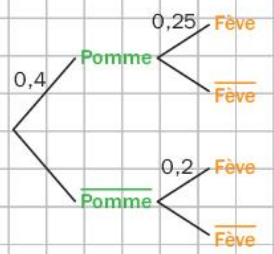
Fichier Python
Ex. 67
Manuel numérique enseignant

★★

64 De la réponse à la question (et vice-versa)

Yuto a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

a. Arbre pondéré de la situation :



b. P(« Pomme » et « Fève ») = 0,1.

c. P(« Fève ») = 0,1 + 0,12 = 0,22.

d. $P_{\text{« Fève »}}$(« Pomme ») $= \dfrac{0{,}1}{0{,}22} = \dfrac{5}{11}$.

1. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Yuto.

2. Proposer des améliorations dans les réponses de Yuto.

Maths à l'oral
Expliquez les modifications apportées aux réponses de Yuto.

65 Dans une entreprise, on sait que parmi les salariés, les hommes représentent 65 % du personnel. D'autre part, 90 % des hommes travaillent à temps complet et 30 % des femmes travaillent à temps partiel.
On choisit au hasard un nom dans la liste des salariés de cette entreprise.
On considère les évènements H « le salarié est un homme » et C « le salarié travaille à temps complet ».

a. Traduire par une phrase l'évènement $C \cap H$ et calculer sa probabilité.

b. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.

c. Justifier que P(C) est égale à 0,83.

d. Calculer $P_C(\overline{H})$.

e. Si le nom choisi est celui d'un salarié à temps partiel, quelle est la probabilité que ce soit celui d'un homme ?

66 IN ENGLISH ▶ p. 381

An email system includes a module designed to filter out undesirable messages.
A new message arrives. It is estimated that the probability of the message being undesirable is 8%. The module eliminates 96% of undesirable messages but also eliminates 1% of welcome messages.

a. Construct a probability tree diagram.

b. What are the percentage probabilities of the message being accepted and being eliminated?

c. Prove that the probability of the message being eliminated is equal to 0.086.

d. What is the probability, if the message is eliminated, that it is welcome?

67 PROGRAMMATION python

On considère le programme en Python suivant.

```python
import random
D=random.randint(1,100)
if D<=68:
    A="gagné"
    E=random.randint(1,20)
    if E<=7:
        B="gagné"
    else:
        B="perdu"
else:
    A="perdu"
    E=random.randint(1,10)
    if E<=7:
        B="gagné"
    else:
        B="perdu"
```

1. Quelle est la probabilité que :

a. la variable A contienne « gagné » ?

b. les variables A et B contiennent « gagné » ?

2. a. Traduire le programme par un arbre pondéré.

b. Justifier que la probabilité que la variable B contienne « gagné » est égale à 0,462.

3. Si la variable B contient « gagné », quelle est la probabilité que la variable A contienne « gagné » ?

68 Un jeu vidéo commence par deux combats successifs, le premier contre Ping et le second contre Pong. La probabilité de gagner contre Ping est de 0,80 et celle de gagner contre Pong est de 0,60. Si un joueur gagne contre Ping, alors la probabilité qu'il gagne contre Pong est de 0,65. Si un joueur perd contre Ping, alors la probabilité qu'il gagne contre Pong est notée p.
Paula débute une partie. On note G_1 et G_2 les évènements respectifs « Paula gagne le premier combat » et « Paula gagne le second combat ».

a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Exprimer $P(G_2)$ en fonction du nombre p et en déduire la valeur de p.

c. Quelle est la probabilité que Paula ne gagne qu'un seul des deux combats ?

69 On a à disposition trois seaux de balles de tennis, notés S_1, S_2 et S_3. Le seau S_1 contient 25 balles dont 10 sont neuves. Le seau S_2 en contient 20 dont 12 sont neuves, et le seau S_3 en contient 30 dont 25 sont neuves. On choisit un seau au hasard et on y prend une balle au hasard.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la balle soit neuve et prise dans le seau S_2.

c. Vérifier que la probabilité que la balle soit neuve est égale à $\dfrac{11}{18}$.

d. La balle prélevée est neuve. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du seau S_3 ?

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Caractériser l'indépendance

Savoir-faire 4 et 5 p. 292-293

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

Pour les exercices 70 à 73

A, B et C sont trois évènements d'un univers Ω.

70 Vrai ou faux ?

$P(A) = 0{,}25$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cap C) = 0{,}12$ et $P(B \cap C) = 0{,}2$.

a. « A et B sont indépendants. »

b. « A et C sont indépendants. »

c. « B et C sont indépendants. »

71 QCM

$P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$, et A et B sont indépendants. $P(A \cap B)$ est égale à :

a. 0,8 b. 0,08

c. 0,6 d. $P(A) \times P(B)$

72 Vrai ou faux ?

$P(A) = 0{,}25$, $P_A(B) = 0{,}4$ et $P_B(A) = 0{,}25$.

a. « A et B sont indépendants. »

b. « $P(A \cap B) = 0{,}1$. »

c. « $P(B) = 0{,}25$. »

73 Vrai ou faux ?

$P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}6$.

a. « $P(A \cap B) = 0{,}1$. »

b. « $P(A \cap B) = 0{,}2$. »

c. « A et B sont indépendants. »

d. « $P_A(B) = 1$. »

74 Vrai ou faux ?

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10.

On pioche au hasard un jeton. On note A l'évènement « le jeton porte un nombre pair » et B l'évènement « le jeton porte un nombre multiple de trois ».

a. « $P(A) = \frac{1}{2}$. » b. « $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. »

c. « A et B sont indépendants. »

75 Vrai ou faux ?

On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Dans cette expérience aléatoire :

a. « les deux lancers sont indépendants. »

b. « le résultat du deuxième lancer dépend du résultat du premier lancer. »

c. « la probabilité d'obtenir deux fois de suite le résultat 1 est égale à $\frac{1}{12}$. »

76 Une urne contient 13 boules numérotées de 1 à 13. On prend au hasard une boule. On note A l'évènement « la boule porte un nombre pair » et B l'évènement « la boule porte un nombre multiple de cinq ».

a. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

b. Qu'en est-il si on enlève de l'urne la boule qui porte le numéro 1 ?

77 Un jeu de 32 cartes est composé de 12 figures. On prend au hasard une carte. On note T l'évènement « obtenir un trèfle », A l'évènement « obtenir un as » et F l'évènement « obtenir une figure ».

a. Déterminer P(T), P(A) et P(F).

b. Décrire les évènements $T \cap A$, $A \cap F$ et $T \cap F$.

c. Les évènements T et A sont-ils indépendants ?

d. Les évènements A et F sont-ils indépendants ?

e. Les évènements T et F sont-ils indépendants ?

78 Un seau de balles de ping-pong contient 60 balles : 25 sont blanches et les autres sont jaunes.

On prend au hasard une balle dans le seau et on note B_1 l'évènement « la première balle est blanche ». On prend une deuxième balle dans le seau et on note B_2 l'évènement « la seconde balle est blanche ».

Dans chacune des situations suivantes, les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

a. **Situation 1 :** on ne remet pas la première balle dans le seau avant de prendre la seconde.

b. **Situation 2 :** on remet la première balle dans le seau avant de prendre la seconde.

79 A et B sont deux évènements d'un univers Ω.

On dispose du tableau de probabilités ci-dessous.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B			0,35
$\overline{B}$	0,26		
TOTAL		0,6	1

a. Interpréter les nombres 0,26 et 0,35 du tableau.

b. Reproduire et compléter le tableau précédent.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

d. Les évènements A et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?

80 A et B sont deux évènements d'un univers Ω tels que $P(A) = 0{,}35$ et $P(A \cup B) = 0{,}87$.

a. Quelle doit être la valeur de P(B) pour que A et B soient indépendants ?

b. Quelle doit être la valeur de P(B) pour que A et B soient incompatibles ?

Fichier logiciel
Ex. 87
Manuel numérique enseignant

★★

81 De la réponse à la question (et vice-versa)

Katell a rédigé la réponse suivante sur son cahier.

55 % des élèves sont des filles dont 11 % sont gauchères, donc 55 % × 11 % = 6 %.
55% – 6 % = 49% : il y a 49 % de filles droitières.
Il y a 12 % de gauchers, donc 88 % sont droitiers.
55 % × 88 % = 48,4 % ≠ 49 %.
Donc les évènements « être une fille » et « être droitier » ne sont pas indépendants.

a. Proposer un énoncé possible de l'exercice traité par Katell.

b. Expliquer la démarche conduite par Katell pour résoudre l'exercice.

c. Proposer des améliorations dans la réponse de Katell.

Maths à l'oral
Expliquez les modifications apportées à la réponse de Katell.

82 En option

Dans un lycée, 200 élèves de Seconde ont choisi une, et une seule, des options suivantes : italien ou EPS ou arts. On donne ci-dessous leur répartition en fonction de leur première langue vivante (anglais ou allemand).

	Italien	EPS	Arts
Anglais	32	72	40
Allemand	8	28	20

On interroge au hasard l'un de ces élèves.

a. Les évènements I « étudier l'italien » et A « étudier l'anglais » sont-ils indépendants ?

b. Les évènements E « pratiquer l'EPS en option » et B « étudier l'allemand » sont-ils indépendants ?

83 IN ENGLISH ▶ p. 381

A leisure centre is offering two trips of a week in duration (two different weeks), one in Scotland and the other in Andalusia.
There are 140 children who wish to travel. Of this number, 92 opt for Scotland trip and 105 for Andalusia's one. One randomly takes 1 of the 140 application forms.
One marks A the event "signed up for the Andalusian trip" and E the event "signed up for the Scottish trip".

- Are events A and E independent of one another?

84

On lance trois fois de suite un dé tétraédrique parfaitement équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

a. Déterminer la probabilité que la face cachée ne soit jamais la face numérotée 4.

b. Déterminer la probabilité que la face cachée soit au moins une fois la face numérotée 4.

85 ALGORITHMIQUE

L'algorithme suivant simule une expérience aléatoire.

$n \leftarrow$ un nombre entier aléatoire entre 1 et 12
Si $n \geqslant 5$ **alors** $a \leftarrow$ "réalisé"
Sinon $a \leftarrow$ "non réalisé"
Fin Si
Si $n \leqslant 9$ **alors** $b \leftarrow$ "réalisé"
Sinon $b \leftarrow$ "non réalisé"
Fin Si

On exécute cet algorithme.
On note A l'évènement « a contient "réalisé" » et B l'évènement « b contient "réalisé" ».

- Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

86

Une enquête réalisée dans un centre de formation a permis d'établir que 80 % des apprentis possèdent un ordinateur parmi lesquels 75 % ont le permis de conduire. On sait également que 70 % des apprentis ont le permis de conduire. On choisit au hasard un apprenti de ce centre de formation.

- Les évènements « l'apprenti possède un ordinateur » et « l'apprenti a le permis de conduire » sont-ils indépendants ?

87 TICE

Un sac contient 100 jetons : 15 ont une face blanche et l'autre noire, 20 sont verts, n sont blancs et les autres sont noirs. On extrait au hasard un jeton du sac. On souhaite déterminer les valeurs possibles du nombre entier naturel n telles que les évènements A « le jeton a au moins une face blanche » et B « le jeton a au moins une face noire » soient indépendants.
Pour cela, on utilise la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de jetons blancs et noirs		15	Nombre de jetons verts		20
2	Nombre de jetons blancs	Nombre de jetons noirs	P(A)	P(B)	P(A) × P(B)	A et B indépendants
3	1	64	0,16	0,79	0,1264	NON
4	2	63	0,17	0,78	0,1326	NON

Le nombre de jetons blancs est saisi en colonne A.

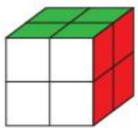
a. Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir en B3 ?

b. Quelles formules, à recopier vers le bas, peut-on saisir en C3, D3 et E3 ?

c. Recopier et compléter la formule suivante saisie en F3 : =SI(E3=0,15 ;" … " ;" … ").

d. À l'aide d'un tableur, répondre au problème posé.

88



Un cube a une face rouge, une face verte et les autres faces sont blanches. On découpe ce cube en huit cubes de même taille. On prend au hasard un des huit petits cubes ; on note R l'événement « le cube a une face rouge » et B l'événement « le cube a deux faces blanches ».

- Les événements R et B sont-ils indépendants ?

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : loi de probabilité conditionnelle
hatier-clic.fr/ma1304

La démonstration rédigée

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P sur Ω.
A, B et C sont trois évènements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

Théorème La fonction P_A, définie sur Ω, est une loi de probabilité appelée **loi de probabilité conditionnelle sachant A**. Autrement dit, elle vérifie :
- $P_A(\Omega) = 1$;
- $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$;
- si B et C sont disjoints, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

OBJECTIF : on souhaite vérifier les conditions définissant une loi de probabilité.

Démonstration

On a $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

- $A \subset \Omega$ donc $A \cap \Omega = A$. Ainsi, $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$. ■

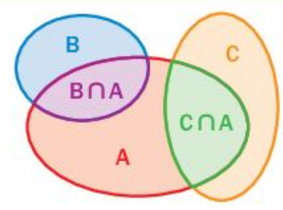
- Comme P est une probabilité sur Ω, $P(A) > 0$ et $P(B \cap A) \geqslant 0$.
  Donc $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \geqslant 0$.
  De plus, $(B \cap A) \subset A$ donc $P(B \cap A) \leqslant P(A)$,
  d'où $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \leqslant 1$. ■

- $(B \cap A) \subset B$ et $(C \cap A) \subset C$.
  Or B et C sont disjoints, donc $(B \cap A)$ et $(C \cap A)$ sont aussi disjoints.
  De plus, $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.
  D'où $P_A(B \cup C) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)}$
  $= \dfrac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} + \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)}$
  $= P_A(B) + P_A(C)$. ■

Le principe

1. On utilise la **définition de l'univers** : Ω contient tous les évènements.

2. On utilise le fait qu'une **probabilité est toujours positive**.

3. 

On utilise le fait que **B ∩ A et C ∩ A sont des évènements disjoints, donc** $P((B \cap A) \cup (C \cap A)) = P(B \cap A) + P(C \cap A)$.

La démonstration à compléter

89 En s'aidant des **étapes** décrites, recopier et compléter la démonstration suivante permettant d'établir la **formule des probabilités totales**.

Démonstration

- $A_1, A_2, \dots, A_k$ forment une partition de l'univers Ω, donc ces évènements sont deux à deux ... et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \dots$.
  Alors $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = B \cap \dots = \dots$.
  De plus, $(B \cap A_1) \subset A_1$, $(B \cap A_2) \subset \dots, \dots, (B \cap A_k) \subset \dots$.
  Or $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont deux à deux disjoints,
  donc $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_k$ sont également ... .
- $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = (B \cap A_1) \cup (B \cap \dots) \cup \dots \cup \dots$.
- Alors $P(B) = P(\dots \cup \dots \cup \dots \cup \dots) = P(B \cap A_1) + P(\dots) + \dots + P(\dots)$. ■

1. On rappelle les **propriétés d'une partition** et on les utilise avec B.
2. **On décompose B selon ses intersections** avec $A_1, A_2, \dots, A_k$.
3. On utilise le fait que **si E et F sont des évènements disjoints, alors $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$**.

Démontrer et raisonner Vers le BAC

▶ Rabats IV-V, Logique, et VI, Raisonnements

Pour les exercices 90 à 99
On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P sur Ω.
A et B sont deux évènements de Ω.

90 On suppose que $P(A) \neq 0$.

1. a. Que peut-on dire de $B \cap \overline{B}$?
b. À quoi correspond $B \cup \overline{B}$?
c. En déduire que $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

2. Justifier que $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

3. On suppose aussi $P(B) \neq 0$. Définir alors $P_B(A)$ et en déduire une autre expression de $P(A \cap B)$.

91 On suppose que $P(A) \neq 0$.

1. On suppose que A et B sont indépendants.
a. Écrire la relation reliant P(A), P(B) et $P(A \cap B)$.
b. En déduire que $P_A(B) = P(B)$.

2. On suppose que $P_A(B) = P(B)$.
a. Définir $P_A(B)$; en déduire que $P(B \cap A) = P(B) \times P(A)$.
b. Conclure.

92 On suppose que A et B sont indépendants.

1. a. À l'aide de la formule des probabilités totales, écrire $P(\overline{A} \cap B)$ en fonction de P(A) et P(B).
b. En déduire que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$.
c. Que peut-on en déduire sur les évènements $\overline{A}$ et B ?

2. Démontrer, de même, l'indépendance des évènements A et $\overline{B}$, et des évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

93 LOGIQUE On suppose que $P(A) \neq 0$ et $A \subset B$.

1. a. À quoi est égal $A \cap B$?
b. En déduire que $P_A(B) = 1$.

2. Réciproquement, si $P_A(B) = 1$, a-t-on nécessairement $A \subset B$?

94 LOGIQUE On suppose que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

a. Démontrer la propriété suivante :

« Si $P(A) = P(B)$, alors $P_B(A) = P_A(B)$. »

b. Énoncer la proposition réciproque de la propriété précédente.
c. Cette proposition réciproque est-elle vraie ?

95 On suppose que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

a. Déterminer la valeur de $P_A(\overline{A})$.
b. Exprimer $P_{\overline{A}}(B)$ en fonction de P(B), P(A) et $P_B(A)$.

96 On suppose que A et B sont indépendants.

- Démontrer que $P(A \cup B) = P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$.

97 On suppose que A et B sont incompatibles, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

a. Démontrer que $P_A(B) = P_B(A)$.
b. Les évènements A et B peuvent-ils être indépendants ?

98 On suppose que A et B sont indépendants et incompatibles et que $P(A) \neq 0$.

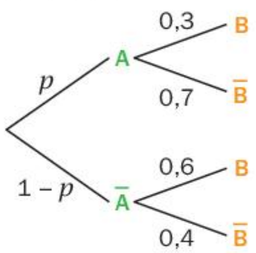
- Démontrer que $P(B) = 0$.

99 A et B sont deux évènements indépendants.
On note $a = P(A)$ et $b = P(B)$.

- Recopier et compléter le tableau ci-dessous en fonction de a et b.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B			
$\overline{B}$			
TOTAL			1

100 LOGIQUE Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré suivant.



On considère la propriété suivante :

« Si $p = 0,5$ alors $P(B) = 0,45$. »

a. Démontrer que cette propriété est vraie.
b. Énoncer la proposition réciproque de cette propriété.
c. Cette proposition réciproque est-elle vraie ?

101 Un sac contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 et k boules vertes ($k \in \mathbb{N}^*$) numérotées de 1 à k.
On extrait du sac une boule au hasard. On note V l'évènement « la boule est verte » et T l'évènement « la boule porte un numéro trois ».

a. Pour quelle(s) valeur(s) du nombre entier k, les évènements V et T sont-ils disjoints ?
b. Pour quelle(s) valeur(s) du nombre entier k, les évènements V et T sont-ils indépendants ?

Fichier Logiciel
Ex. 104
Manuel numérique enseignant

102 Politique et vérité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 48 % affirment vouloir voter pour le candidat A, les autres pour le candidat B. Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note A l'évènement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A », B l'évènement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » et V l'évènement « la personne interrogée dit la vérité ».

1. Modéliser | Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. Calculer | **a.** Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Raisonner | Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est 0,536.

D'après Bac S Liban, mai 2015.

103 Une entreprise spécialiste de la course à pied a réalisé des statistiques auprès de marathoniens qui ont permis d'établir les données suivantes.

Temps	Moins de 3 h	Entre 3 h et 4 h	Plus de 4 h
Coureurs	2 %	48 %	50 %
Chaussures de marque M	15 %	28 %	22 %

1. a. Au départ d'un marathon, on croise un coureur. Quelle est la probabilité qu'il utilise des chaussures de la marque M ?

b. Si le coureur utilise des chaussures de la marque M, quelle est la probabilité qu'il coure en moins de 3 heures ?

2. Communiquer | Rédiger une courte biographie d'Alan Turing (1912-1954), mathématicien et adepte du marathon.

104 Loto et EuroMillions TICE

1. Le jeu du loto consiste à choisir sur une grille cinq nombres entiers compris entre 1 et 49, et un numéro chance compris entre 1 et 10. On effectue un premier tirage de cinq boules parmi 49 boules numérotées de 1 à 49, puis un second tirage d'une boule parmi 10 boules numérotées de 1 à 10.

Avec n et k deux nombres entiers naturels, l'instruction tableur `COMBIN(n;k)` permet d'obtenir le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi n, sans tenir compte de l'ordre.

À l'aide d'un tableur, calculer :

a. la probabilité d'avoir les cinq bons numéros ;

b. la probabilité d'avoir le numéro chance ;

c. la probabilité d'avoir la grille gagnante, sachant que les deux tirages sont indépendants.

2. Le jeu de l'EuroMillions s'effectue en deux tirages ; il consiste à choisir cinq numéros parmi 50 pour le premier tirage, et deux numéros « étoiles » parmi 12 pour le second tirage.

À l'aide d'un tableur, calculer :

a. la probabilité d'avoir les cinq bons numéros ;

b. la probabilité d'avoir les deux numéros « étoiles » ;

c. la probabilité d'avoir la grille gagnante, sachant que les deux tirages sont indépendants.

105 Roulette première

Une roulette non truquée comporte 37 cases numérotées de 0 à 36, toutes équiprobables.

1. a. Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre premier ?

Rappel Un **nombre premier** est un nombre entier naturel, supérieur ou égal à 2, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

b. Raisonner | Les évènements « la boule lancée s'arrête sur un nombre premier » et « la boule lancée s'arrête sur un nombre impair » sont-ils indépendants ?

2. a. Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre premier sachant qu'elle s'est arrêtée sur un nombre impair ?

b. Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre impair sachant qu'elle s'est arrêtée sur un nombre premier ?

D'après Concours Kangourou, 2006.

Fichier Python
Ex. 109
Manuel numérique enseignant

106 Contrôle qualité

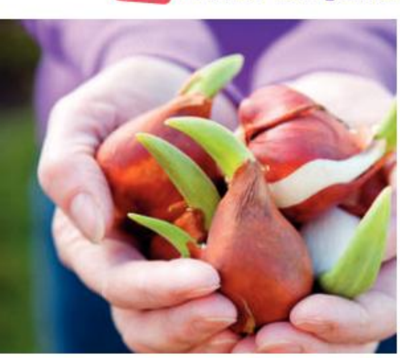
Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.
L'un d'eux consiste à vérifier à la livraison le taux d'humidité des fèves de cacao, qui doit être de 7 % pour que les fèves soient considérées conformes.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
– le fournisseur 1 procure la moitié du stock de fèves et 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ;
– le fournisseur 2 procure 30 % du stock et 90 % de sa production est conforme ;
– le fournisseur 3, moins cher, fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève du stock et on note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i » pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3 ; et on note C l'évènement « la fève est conforme ».

a. Modéliser | À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme (arrondir au centième).

b. Chercher | Le fournisseur 3 ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite qu'au moins 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves peut-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

D'après Bac S, Amérique du Nord, juin 2015.

107 Couleur indépendante ?



Un jardinier dispose d'un lot de bulbes de tulipes : 40 % sont à fleur rouge, 30 % à fleur jaune et le reste est à fleur blanche. D'autre part, 85 % des bulbes à fleur rouge, 90 % des bulbes à fleur jaune et 80 % des bulbes à fleur blanche donnent une fleur une fois plantés.
On choisit un bulbe au hasard dans ce lot.
On note R l'évènement « le bulbe est à fleur rouge », J l'évènement « le bulbe est à fleur jaune » et F l'évènement « le bulbe fleurit ».

1. a. Modéliser | Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer | Justifier que la probabilité que le bulbe fleurisse une fois planté est égale à 0,85.

2. a. Raisonner | Sans calcul, justifier que les évènements R et F sont indépendants.

b. Les évènements J et R sont-ils indépendants ?

108 Naissances — Approfondissement

On estime que 51 % des nouveau-nés sont des garçons et on considère que les naissances sont indépendantes.
On étudie des familles avec trois enfants. On choisit une famille au hasard et on note F_k l'évènement « le k-ième enfant est une fille », où k est un nombre entier compris entre 1 et 3. On arrondira les résultats au dix-millième.

1. Modéliser | Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. Quelle est la probabilité que la famille ait trois garçons ? ait au moins une fille ?

3. a. Quelle est la probabilité que le benjamin de la famille soit un garçon ?

b. En déduire la probabilité que l'aînée soit une fille, sachant que le benjamin est un garçon.

109 PROGRAMMATION python

Une urne contient deux jetons bleus et trois jetons rouges. On en extrait au hasard deux jetons.

1. Dans chacune des situations décrites ci-dessous, déterminer la probabilité d'extraire deux jetons de la même couleur.

a. Situation 1 : on extrait successivement et sans remise deux fois un jeton.

b. Situation 2 : on extrait successivement et avec remise deux fois un jeton.

2. Pour estimer chacune des probabilités calculées, on utilise les deux fonctions en Python ci-dessous.

Fonction 1

```
import random
def f1(n):
    compteur=0
    for i in range(n):
        urne=["bleu","bleu","rouge",
                        "rouge","rouge"]
        A=random.choice(urne)
        urne.remove(A)
        B=random.choice(urne)
        if A==B:
            compteur=compteur+1
    return compteur/n
```

Fonction 2

```
import random
def f2(n):
    urne=["bleu","bleu","rouge","rouge","rouge"]
    compteur=0
    for i in range(n):
        A=random.choice(urne)
        B=random.choice(urne)
        if A==B:
            compteur=compteur+1
    return compteur/n
```

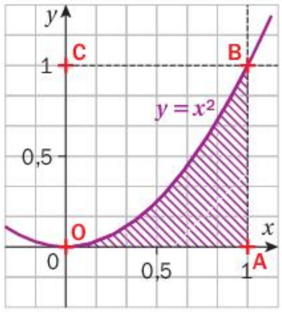
- Associer chaque fonction à la situation correspondante.

Aide L'instruction « `random.choice(urne)` » choisit de façon équiprobable un élément de la liste `urne`.

Fichier Python
Ex. 110 et 112
Manuel numérique enseignant

110 Méthode de Monte Carlo ALGORITHMIQUE

On a représenté ci-contre un carré OABC et la fonction carré. On a hachuré la partie du carré située sous la parabole.



1. On prend au hasard un point M(x ; y) dans le carré OABC, d'aire une unité.

a. À quel intervalle appartiennent les nombres réels x et y ?

b. Quelle condition doivent vérifier x et y pour que le point M soit situé dans la partie hachurée ?

2. On souhaite estimer l'aire de la partie hachurée. Pour y parvenir, on prend au hasard 1 000 points dans le carré OABC et on détermine la proportion des points appartenant à la partie hachurée.

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer cette proportion P.

```
C ← 0
Pour k allant de 1 à …
    x ← un nombre réel compris entre …
    y ← un nombre réel compris entre …
    Si … alors C ← C + 1
    Fin Si
Fin Pour
P ← …
```

b. Programmer l'algorithme et donner une estimation de l'aire de la partie hachurée.

c. Comment obtenir une meilleure estimation ?

3. On considère le quart de disque de centre O et de rayon 1, situé dans le carré OABC, noté D.

a. Quelle est l'aire du quart de disque D ?

b. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Recopier et compléter la phrase :

« Un point M(x ; y) appartient au quart de disque D si et seulement si $x^2 + y^2$ … 1. »

c. Rédiger un algorithme qui permet d'obtenir une estimation du nombre π.

Aide On pourra s'inspirer de l'algorithme précédent.

Info

Historiquement, cette méthode a été utilisée par le comte de Buffon (1707-1788) pour approcher le nombre π, en jetant un grand nombre de fois une aiguille.

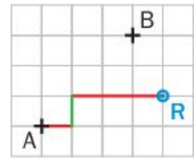
111 ALGORITHMIQUE

A et B sont deux évènements.

- Rédiger un algorithme qui, à partir des valeurs de P(A), P(B) et P(A ∩ B), indique si les évènements A et B sont indépendants ou non.

112 Marche aléatoire Approfondissement

Un robot, placé en A sur le quadrillage ci-contre, peut se déplacer soit vers la droite, soit vers le haut, de façon équiprobable. On a représenté un trajet de cinq pas : un à droite, puis un en haut et trois à droite.



1. a. Quel est le nombre de pas en haut nécessaires pour que le robot aille de A en B ?

b. Quel est le nombre de pas à droite nécessaires pour que le robot aille de A en B ?

2. ALGORITHMIQUE On souhaite déterminer une estimation E de la probabilité que le robot aille de A en B en six pas.

a. Recopier et compléter l'algorithme incomplet ci-dessous.

```
C ← …
Pour n allant de 1 à 10 000
    Droite ← …
    Pour k allant de 1 à …
        A ← un nombre entier aléatoire entre 0 et 1
        Si A = 1 alors Droite ← …
        Fin Si
    Fin Pour
    Si Droite = … alors C ← C + 1
    Fin Si
Fin Pour
E ← C ÷ …
```

b. Programmer l'algorithme complété et donner la valeur de E obtenue.

113 OuLiPo

L'écrivain français Raymond Queneau a réalisé un livre-objet, appelé *Cent mille milliards de poèmes*, dans lequel pour chaque vers d'un sonnet, il est possible de choisir entre dix phrases.

1. a. Décrire la composition d'un sonnet.

b. Sachant que le choix d'une phrase pour chacun des vers est indépendant de celui des autres, en déduire la probabilité d'obtenir chaque poème possible et faire le lien avec le titre de l'ouvrage.

2. Rédiger une courte biographie de Raymond Queneau et expliquer ce qu'est le groupe OuLiPo.

Maths à l'oral

Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

SVT

114 Étude génétique de la mucoviscidose

La mucoviscidose est une maladie génétique qui atteint en particulier les voies respiratoires. Elle est liée à la mutation d'un gène situé sur le chromosome nº 7.
L'allèle muté du gène, responsable de la maladie, est récessif. Par conséquent, si un seul des chromosomes de la paire nº 7 porte l'allèle récessif, la personne (hétérozygote) est dite « porteuse saine », et si les deux chromosomes de la paire nº 7 portent l'allèle récessif, la personne (homozygote) est alors atteinte de la maladie.
On désigne par N l'allèle fonctionnel du gène et par m l'allèle muté.
En France, on estime à 3 % la proportion de porteurs sains ($N//m$) dans la population et à une naissance pour 5 000 la proportion d'enfants atteints de la maladie ($m//m$).
On considère qu'à la fécondation, il y a la même probabilité qu'un chromosome ou l'autre soit transmis. De plus, on peut supposer que les génotypes des parents sont indépendants.
On choisit au hasard un couple de parents dans la population étudiée.

1. a. Quelle est la probabilité que les deux parents soient porteurs sains de la maladie ?

b. On suppose que les deux parents sont porteurs sains.
À l'aide d'un tableau, déterminer alors les probabilités qu'un de leurs enfants soit :
i. non porteur du gène de la maladie ; **ii.** porteur sain ; **iii.** atteint de la maladie.

c. Quelle est la probabilité que les deux parents soient porteurs sains et qu'un de leurs enfants soit atteint de la maladie ?

2. Depuis 2002, il existe un test néonatal (le test sanguin TIR) qui consiste en un dosage de la trypsine immuno-réactive dans le sang. On estime que ce test est positif pour 95 % des nouveau-nés atteints de la mucoviscidose et qu'il est négatif pour 99,5 % des nouveau-nés non atteints. On choisit au hasard un nouveau-né et on note A l'évènement « le nouveau-né est atteint de la mucoviscidose » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité d'avoir un « faux positif », c'est-à-dire que le nouveau-né ait un test positif alors qu'il n'est pas malade ? Même question pour un « faux négatif ».

c. Déterminer la probabilité que le test soit négatif et en déduire la probabilité qu'un nouveau-né dont le test est négatif ne soit effectivement pas atteint de la mucoviscidose.

Fiche métier
Technicien·ne d'analyses biomédicales
hatier-clic.fr/ma1309a

Physique-Chimie

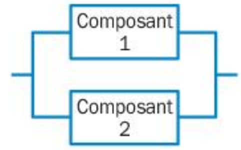
115 Circuit électrique

Un circuit électrique comporte deux composants identiques numérotés 1 et 2.
On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ». On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$.
Deux montages possibles, présentés ci-contre, sont envisagés.

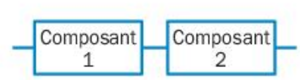
a. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps.
Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

b. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant.
Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

D'après Bac S Antilles Guyane, juin 2015.



Circuit A, en parallèle



Circuit B, en série

Fiche métier
Électricien·ne
hatier-clic.fr/ma1309b

Fichier Python
Ex. 117
Manuel numérique enseignant

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

116 Un problème de Lewis Carroll

Un sac contient un jeton, dont on sait qu'il est blanc ou noir. On ajoute dans le sac un jeton blanc, on mélange et on tire au hasard l'un des jetons, qui est blanc.

- Quelle est maintenant la probabilité de tirer un jeton blanc ?

Extrait de *Énigmes mathématiques de Lewis Carroll*, Éditions Pole, 1999.

Info
Ce problème a été écrit par Lewis Carroll (1832-1898), à la fois romancier et professeur de mathématiques.

117 C'est dans la poche !

Je dispose de quatre crayons, deux rouges et deux bleus. J'en mets deux dans la poche droite et les deux autres dans la poche gauche de mon pantalon, sans faire attention à leur couleur. Je sors un crayon de ma poche droite, il est rouge.

- Quelle est désormais la probabilité de prendre un crayon rouge dans la poche gauche ?

118 Jetez vous à l'eau !

Quatre amis, deux femmes et deux hommes, sont à la piscine. Deux d'entre eux vont au sauna et y trouvent une femme. L'une de ces trois personnes préfère aller nager et sort du sauna, c'est une femme. L'une des deux personnes restantes décide de sortir du sauna pour prendre une douche bien fraîche.

- Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Défis

119 Des élections à Herbeville

Les élections à Herbeville viennent d'avoir lieu. On sait que tout électeur ayant voté pour le parti « brocoliste » a déjà mangé des brocolis, que 90 % des électeurs ayant voté pour les autres partis n'ont jamais mangé de brocolis et que 46 % des votants ont déjà mangé des brocolis.

- Déterminer le pourcentage des votants obtenu par le parti « brocoliste ».

D'après Concours Kangourou, 2004.

120 Tête de mule

Une mule accepte de sortir de son écurie avec une chance sur trois si elle en est sortie la veille, et de manière certaine si elle n'en est pas sortie la veille.

On suppose que la mule refuse de sortir un jour donné.

- Déterminer la probabilité que la mule refuse de sortir 50 jours plus tard.

D'après *Tangente* Hors-série n° 17, mai 2004.

En groupe

121 À chacun sa stratégie

On dispose de deux pièces de monnaie indiscernables.

L'une, A, donne « pile » une fois sur trois et l'autre, B, donne « pile » trois fois sur cinq. On note T l'évènement « obtenir "pile" au troisième lancer » et D l'évènement « obtenir "pile" au dixième lancer ».

On propose différentes façons de réaliser les évènements T et D :

Première façon	Deuxième façon	Troisième façon	Quatrième façon
On choisit une pièce au hasard et on la conserve pour tous les lancers.	On choisit une pièce au hasard et on la lance. À chaque lancer suivant, on change de pièce.	On choisit une pièce au hasard à chaque lancer.	On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si elle donne « pile », alors on conserve la même pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

- Déterminer la probabilité de chacun des évènements T et D pour chacune des façons proposées.

Étudions chacun l'une des façons proposées, puis comparons nos résultats.

CHAPITRE 11

Variables aléatoires

On peut modéliser des phénomènes aléatoires, comme les cyclones, à l'aide d'outils mathématiques : une variable aléatoire est une fonction prenant des valeurs pondérées par des probabilités. Son étude permet de réaliser des prévisions et des estimations, mais on peut également, comme pour une série statistique, calculer sa moyenne, son écart type, et ainsi quantifier le phénomène observé et en dégager des tendances.

Itinéraire

OBJECTIF 1

Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

- Activité 1
- Cours 1
- Savoir-faire 1
- Quiz 11 à 14
- Les incontournables 25 à 27
- Entraînement 33 à 49

OBJECTIF 2

Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

- Activités 2 et 3
- Cours 2
- Savoir-faire 2 et 3
- Quiz 15 à 17
- Les incontournables 28 à 30
- Entraînement 50 à 63

OBJECTIF 3

Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

- Activité 4
- Cours 3
- Savoir-faire 4
- Quiz 18 à 21
- Les incontournables 31 et 32
- Entraînement 64 à 76

PRENDRE UN BON DÉPART

Quiz en ligne
Diagnostic
Kwyk Variations 1re via ENT

Test

À l'oral

- Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? un univers ? une issue ? un évènement ?
- Définir la probabilité d'une issue, une situation d'équiprobabilité et un arbre de probabilités.

Rappels

Loi des grands nombres

La fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche de la probabilité de cet évènement après un grand nombre d'expériences (par simulation, par exemple).

Exemple

On lance un dé non pipé à six faces et on note le chiffre obtenu. L'univers Ω est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Ω est constitué de six issues. La fréquence d'apparition de chacune des faces se rapproche de $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667$ lorsque le nombre de lancers devient grand.

Calculs de probabilités

Évènements contraires

$\overline{A}$ est constitué de toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A.

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Intersection de deux évènements A et B

A ∩ B (« A inter B ») est constitué des issues réalisant les évènements A **et** B.

Réunion de deux évènements A et B

A ∪ B (« A union B ») est constitué des issues réalisant l'évènement A **ou** l'évènement B.

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Évènements incompatibles

Deux évènements A et B sont **incompatibles** si aucune issue ne les réalise simultanément.

$$A \cap B = \varnothing, \text{ soit } \mathbf{P(A \cap B) = 0}$$

Exemples

Un sac contient huit objets : une boule, un cube, un cylindre et un prisme de couleur rouge (R_1 ; R_2 ; R_3 ; R_4), et les mêmes objets de couleur jaune (J_1 ; J_2 ; J_3 ; J_4). On tire un objet dans le sac.

$$\Omega = \{R_1 ; J_1 ; R_2 ; J_2 ; R_3 ; J_3 ; R_4 ; J_4\}.$$

- On note A l'évènement « l'objet est rouge » :

$$A = \{R_1 ; R_2 ; R_3 ; R_4\} \text{ et } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

- L'**évènement contraire** est $\overline{A}$ « l'objet n'est pas rouge » :

$$\overline{A} = \{J_1 ; J_2 ; J_3 ; J_4\} \text{ et } P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- On note B l'évènement « l'objet est une boule » :

$$B = \{R_1 ; J_1\} \text{ et } P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

- **A ∩ B** correspond à « l'objet est une boule rouge » :

$$A \cap B = \{R_1\} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{8}.$$

- **A ∪ B** correspond à « l'objet est rouge ou est une boule » :

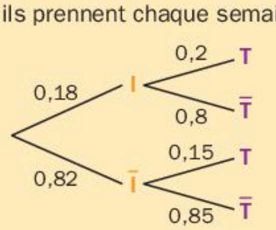
$$A \cup B = \{R_1 ; R_2 ; R_3 ; R_4 ; J_1\} \text{ et } P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Arbres de probabilités et tableaux ▸ Chapitre 10

Une expérience aléatoire peut être décrite à l'aide d'un **arbre de probabilités** ou d'un **tableau**.

Exemple

Pour un sondage, on a questionné des individus pour savoir s'ils vivent à Paris ou sa banlieue (évènement I) ou non, et s'ils prennent chaque semaine les transports en commun (évènement T).



	I	$\overline{I}$	TOTAL
T	0,036	0,123	0,159
$\overline{T}$	0,144	0,697	0,841
TOTAL	0,18	0,82	1

$P(I \cap T) = P(I) \times P_I(T) = 0{,}18 \times 0{,}2 = 0{,}036.$

Réactivation

Loi des grands nombres

1 TICE Une expérience consistant à générer un nombre entier aléatoire entre 1 et 10 est répétée 100 fois. Cette situation a été simulée à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Tirage												
2	7												
3	7		Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	2		Effectif	8	11	11	9	9	15	13	8	5	11
5	8		Fréquence	0,08	0,11	0,11	0,09	0,09	0,15	0,13	0,08	0,05	0,11
6	1												

a. Quelle formule a pu être saisie en D5 ?

b. Alice affirme que la formule =NB.SI($A$2:$A$101;D1) a été saisie en D4 puis étirée vers la droite. A-t-elle raison ?

c. Si l'on répète cette même expérience 10 000 fois, la fréquence d'apparition du nombre 7 restera-t-elle inchangée ? Pourquoi ?

Calculs de probabilités

2 On lance un dé truqué à six faces. La probabilité d'apparition de chacune des faces est donnée dans le tableau ci-contre. On note A l'évènement « la face porte le numéro 1 » et B l'évènement « la face porte un numéro supérieur ou égal à 4 ».

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	a	0,3	0,15	0,16	0,19	0,17

a. Calculer P(A), P(B), P(A ∩ B) et P(A ∪ B). Que peut-on en déduire pour les évènements A et B ?

b. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre premier.

3 Une étude sur la répartition des pointures de chaussures d'un club de bowling est présentée dans le tableau ci-contre.

Le président du club s'intéresse à la répartition des pointures par sexe, afin d'organiser son stock de location.

	Pointures de chaussures				
	Moins de 36	36 à 39	40 à 42	43 à 45	46 et plus
Femmes	0,73 %	4,50 %	1,70 %	0,07 %	0 %
Hommes	0 %	4,02 %	47,50 %	33,48 %	8 %

Quelle est la probabilité :

a. qu'il s'agisse d'un homme ayant une pointure supérieure à 45 ?

b. que la pointure de la personne interrogée soit entre 40 et 42 ?

c. qu'il s'agisse d'une femme ?

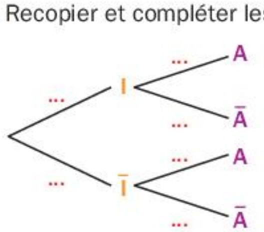
Arbres de probabilités et tableaux

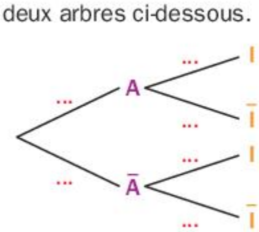
4 D'après une étude, 20 % des habitants du Vaucluse habitent en zone inondable. Parmi ces personnes, 74 % vivent en appartement. Parmi les habitants vivant en zone non inondable, 56 % vivent en appartement.

On rencontre un habitant du Vaucluse.

On note I l'évènement « la personne vit en zone inondable » et A l'évènement « la personne vit en appartement ».

a. Recopier et compléter les deux arbres ci-dessous.





b. Présenter la situation à l'aide d'un tableau.

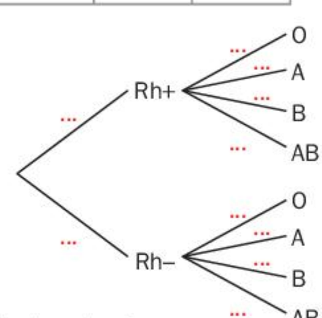
5 Le tableau de la répartition des groupes sanguins en France est présenté ci-dessous.

	O	A	B	AB
Rhésus –	6 %	7 %	1 %	1 %
Rhésus +	36 %	38 %	8 %	3 %

a. Déterminer la probabilité de l'évènement Rh^- « la personne est de Rhésus négatif ». Détailler le calcul.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement AB « la personne est de groupe AB ».

c. Recopier et compléter l'arbre ci-contre.



Corrigés p. 368

Activités

OBJECTIF 1
Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

1 Gains au jeu de dé

Pour un jeu, on dispose d'un dé équilibré à douze faces numérotées de 1 à 12.
On lance le dé une fois. On définit les évènements suivants.
– A : « Le résultat est pair. »
– B : « Le résultat est impair et inférieur à 6. »
– C : « Le résultat est 7 ou 11. »
– D : « Le résultat est 9. »

1. Décrire l'univers et donner l'ensemble des issues correspondant à chaque évènement.

2. Recopier et compléter le tableau suivant.

Évènement	A	B	C	D
Probabilité	…	…	…	…

3. Le jeu possède les règles suivantes :
– pour la réalisation de l'évènement A, le joueur ne gagne rien ;
– pour la réalisation de l'évènement B, le joueur gagne 1 € ;
– pour la réalisation de l'évènement C, le joueur gagne 3 € ;
– pour la réalisation de l'évènement D, le joueur gagne 9 €.
On note G le gain après chaque lancer.

Le gain prenant des valeurs aléatoires, on dit que G est une **variable aléatoire**.

a. Quelles valeurs le gain G peut-il prendre ?

b. On note $\{G = 0\}$ l'évènement « le gain du joueur vaut 0 € ».
Quelles issues réalisent cet évènement ? Préciser la probabilité de cet évènement.

c. Définir de même des évènements de la forme $\{G = …\}$ pour les autres valeurs de gain et reprendre la question précédente ; on synthétisera les résultats dans un tableau comme celui ci-dessous.

On note de manière générale g_i une des valeurs prises par G.

Gain g_i	0	…	…	…
Probabilité $P(G = g_i)$	…	…	…	…

d. Calculer et interpréter la probabilité de l'évènement $\{G > 0\}$.

OBJECTIF 2
Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

2 Roulette et gain moyen OUVERTE

Différenciation
Version guidée
Manuel numérique enseignant

Une roulette est composée de trente-sept numéros compris entre 0 et 36. On suppose la roulette homologuée, c'est-à-dire non truquée.

Au jeu de la roulette, Joachim mise 10 € sur un ou plusieurs numéros compris entre 1 et 36. Il peut adopter trois stratégies :
– choisir un numéro et gagner 360 € si celui-ci est désigné par la roulette ;
– choisir deux numéros et gagner 180 € si l'un d'eux est désigné par la roulette ;
– choisir trois numéros et gagner 120 € si l'un d'entre eux est désigné par la roulette.

• Joachim a-t-il intérêt à jouer à ce jeu ?
Quelle stratégie permet de maximiser le gain (ou de minimiser la perte) ?

Fichier Python
Activité 4
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 2
Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

3 Des souris et des probabilités

Des scientifiques étudient le déplacement d'un groupe de souris dans un parcours : ils mesurent le temps mis par chaque souris pour le traverser. Le temps, exprimé en secondes et arrondi à 4 secondes près, est modélisé par la variable aléatoire T. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous.

t_i	12	16	20	24	28
$P(T = t_i)$	0,11	0,34	0,27	0,20	0,08

1. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire T.

L'**espérance** d'une variable aléatoire correspond à la moyenne pondérée de sa loi.

2. Un deuxième groupe de souris suit un entraînement avant d'être confronté au même parcours. Les scientifiques constatent alors que le temps de parcours de ce groupe peut être modélisé par la variable aléatoire $U = T - 2$ dont la loi de probabilité est :

u_i	10	14	18	22	26
$P(U = u_i)$	0,11	0,34	0,27	0,20	0,08

a. Comparer les espérances des variables aléatoires T et U.

b. L'écart type de la variable aléatoire U, noté $\sigma(U)$, peut être calculé à l'aide de la formule $\sigma(U) = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} p_i\left(u_i - E(U)\right)^2}$, où $p_i = P(U = u_i)$.

Calculer $\sigma(U)$.

Comme en statistique, l'écart type mesure la **dispersion des données**.

Aide $\sigma(U) = \sqrt{0{,}11(10 - 17{,}2)^2 + \ldots}$

c. Comparer les écarts types des variables aléatoires T et U.

OBJECTIF 3
Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

4 Différentes modélisations PROGRAMMATION python

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher, numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3.
Deux boules sont tirées au hasard successivement et avec remise.
On définit la variable X égale à la somme des numéros tirés.

1. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer les valeurs prises par X, puis donner la loi de probabilité de X.

2. L'expérience est répétée une seconde fois. On souhaite déterminer la probabilité de l'évènement T « obtenir deux fois de suite une somme égale à 4 ».
Que permet de faire le programme ci-contre ? (▶ Rabat II, Python)

```python
import random

def boule(L):
    alea=random.randint(0,len(L)-1)
    return L[alea]

ma_liste=[1,1,2,2,3]
cpt=0
for i in range(100000):
    exp1=boule(ma_liste)+boule(ma_liste)
    exp2=boule(ma_liste)+boule(ma_liste)
    if exp1==4 and exp2==4:
        cpt=cpt+1
```

3. On note S l'évènement « obtenir une somme égale à 4 ».
À l'aide d'un arbre pondéré, calculer P(T).

4. La variable aléatoire Y compte le nombre de fois où la somme 4 est obtenue lors de deux expériences successives.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Ce résultat semble-t-il cohérent avec le résultat de la simulation réalisée à la question **2** ?

Cours

OBJECTIF 1 Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Savoir-faire 1 p. 320

Définition Une expérience aléatoire a pour univers Ω. Une **variable aléatoire** X est une **fonction** définie sur Ω et prenant un nombre fini de valeurs : x_1 ; … ; x_r.
On note $\{X = x_1\}$ l'évènement « la variable aléatoire X prend la valeur x_1 » et $\{X \leqslant x_1\}$ l'évènement « X prend une valeur inférieure ou égale à x_1 ».

Dans ce chapitre, l'univers prend un nombre fini de valeurs. x_1 ; … ; x_r sont r nombres réels distincts deux à deux.

Exemple
Une urne opaque contient 12 boules bleues, 2 boules vertes et 6 boules rouges, indiscernables au toucher. Le joueur mise 5 €, puis il tire une boule au hasard. Si la boule est verte, il gagne 3 € ; si elle est rouge, il gagne 15 € ; si elle est bleue, il ne gagne rien.
On note X le gain d'un joueur à l'issue d'un tirage. Après avoir enlevé les 5 € de la mise de départ, le gain peut prendre trois valeurs : –5 ; –2 et 10.
L'ensemble des valeurs prises par le gain se note {–5 ; –2 ; 10}.
L'évènement $\{X = -5\}$ est donc associé au tirage d'une boule bleue.

Le « gain » peut être négatif : on parle de gain algébrique.

Des évènements peuvent être définis directement via la variable aléatoire X.

Définition Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur prise par X une probabilité.
On peut la présenter sous la forme d'un tableau.
La somme des probabilités $p_1 + p_2 + … + p_r$ doit valoir 1.

x_i	x_1	…	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	…	p_r

La variable aléatoire X prend les valeurs x_1 ; x_2… ; x_r de probabilités respectives p_1 ; p_2 ; … ; p_r.

Dans l'**exemple** précédent, chacune des 20 boules a la même probabilité d'être tirée.
Lors du tirage d'une boule, on a donc le modèle de probabilité suivant.

Couleur	Bleue	Verte	Rouge
Probabilité	$\frac{12}{20} = 0{,}6$	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	$\frac{6}{20} = 0{,}3$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

x_i	–5	–2	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,1	0,3

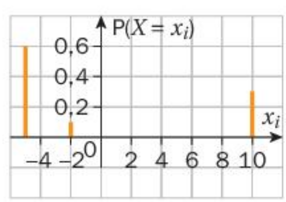
Ainsi, la probabilité de perdre de l'argent est :

$$P(X < 0) = P(X = -5) + P(X = -2) = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7.$$

Les 20 boules sont en situation d'équiprobabilité ; on peut déterminer les probabilités grâce à la formule : $p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$.

Représentation graphique d'une variable aléatoire

Une loi de probabilité peut être représentée graphiquement : les valeurs $P(X = x_i)$ sont données en fonction des valeurs x_i.



0,6 + 0,1 + 0,3 = 1 : La somme des probabilités vaut bien 1.

Les représentations des variables aléatoires permettent de visualiser la répartition des valeurs, et d'en dégager certaines tendances.

Simulation d'une variable aléatoire avec python

On peut simuler une variable aléatoire X en créant une fonction renvoyant la valeur x_i prise par X avec la probabilité p_i.

Exemple
La variable aléatoire X de l'exemple ci-dessus est simulée par la fonction en Python ci-contre.
Cette fonction renvoie :
- –5 avec la probabilité 0,6 ;
- –2 avec la probabilité 0,7 – 0,6 = 0,1 ;
- 10 avec la probabilité 1 – 0,7 = 0,3.

```
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.6:
        return -5
    if alea<0.7:
        return -2
    return 10
```

- Si alea < 0,6, la fonction renvoie –5.
- Si 0,6 ⩽ alea < 0,7, la fonction renvoie –2.
- Si alea ⩾ 0,7, la fonction renvoie 10.

OBJECTIF 2 Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

Savoir-faire 2 et 3 p. 321-322

Dans cette partie, X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	...	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_r

Définition

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i = x_1 \times p_1 + \ldots + x_r \times p_r.$$

Dans l'**exemple** de l'objectif 1 ci-contre, le gain du joueur est modélisé par la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	−5	−2	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,1	0,3

L'espérance de X vaut $E(X) = -5 \times 0{,}6 + (-2) \times 0{,}1 + 10 \times 0{,}3 = -0{,}2$ €.

Cette formule s'apparente au calcul de moyenne à l'aide des fréquences : $x_1 \times f_1 + \ldots + x_r \times f_r$

L'espérance a la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire.

Pour une variable aléatoire X modélisant le gain à un jeu, on dit que le jeu est **équitable** si $E(X) = 0$.

Propriété (admise) : loi des grands nombres

Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X se rapproche de l'espérance de X.

Dans la feuille de calcul ci-contre, on a simulé 10 000 parties du jeu de l'**exemple** de l'objectif 1 ; on observe que le gain algébrique moyen vaut, sur cette simulation, environ −0,2 €.
Un joueur qui jouerait un grand nombre de fois au jeu proposé perdrait en moyenne 0,2 € par partie.

	A	B	D	E
1	Partie n°	Gain		
2	1	-2		Gain moyen
3	2	-5		-0,2369
4	3	-5		
5	4	10		
6	5	10		
7	6	-5		

Définitions

- La **variance** de X est le nombre réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + \ldots + p_r\left(x_r - E(X)\right)^2.$$

- L'**écart type** de X est le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

En reprenant l'**exemple** précédent, où la variable aléatoire X représente le gain du joueur :
$V(X) = (-5 - (-0{,}2))^2 \times 0{,}6 + (-2 - (-0{,}2))^2 \times 0{,}1 + (10 - (-0{,}2))^2 \times 0{,}3 = 45{,}36$;
$\sigma(X) = \sqrt{45{,}36} \approx 6{,}73$ €.

Une variance et un écart type sont nécessairement positifs.

L'écart type a la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire.

Propriétés (admises)

- Après un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire associée à X, l'écart type de la série statistique que l'on obtient se rapproche de l'écart type de X.
- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la **dispersion** : plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Pour deux variables aléatoires X_1 et X_2 de même espérance, si $\sigma(X_1) < \sigma(X_2)$, alors les valeurs de X_1 seront plus rassemblées autour de l'espérance que celles de X_2.

Définitions et propriétés

- La variable aléatoire $Y = aX + b$ est la variable aléatoire de loi de probabilité :

y_i	$ax_1 + b$	…	$ax_r + b$
$P(Y = y_i)$	p_1	…	p_r

- La variable aléatoire $Z = X^2$ est la variable aléatoire de loi de probabilité :

z_i	${x_1}^2$	…	${x_r}^2$
$P(Z = z_i)$	p_1	…	p_r

En posant $Y = X - E(X)$ et $Z = Y^2$, on a $V(X) = E(Z)$
$= E\left[(X - E(X))^2\right]$.

Propriété

Pour une variable aléatoire X et deux nombres réels a et b :

- $E(X + b) = E(X) + b$
- $E(aX) = aE(X)$
- $V(X + b) = V(X)$
- $V(aX) = a^2V(X)$
- $\sigma(X + b) = \sigma(X)$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

Démonstration rédigée p. 334

$|a|$ est la valeur absolue de a.

Exemples

Pour une variable aléatoire X d'espérance 5 et d'écart type 1, on pose :

$$Y = X - 4 \text{ et } Z = 3X.$$

- $E(Y) = E(X) - 4 = 5 - 4 = 1$ et $\sigma(Y) = \sigma(X) = 1$.
- $E(Z) = 3E(X) = 3 \times 5 = 15$ et $\sigma(Z) = |3|\sigma(X) = 3 \times 1 = 3$.

La première transformation n'a pas d'impact sur l'écart type : X et Y ont le même écart type.

Détermination de l'espérance et de l'écart type avec python

Pour une variable aléatoire X, on crée deux listes : Lx contenant les valeurs prises par X et Lp contenant les probabilités de ces valeurs.

```
def Esp(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*Lx[i] for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)

def E_Type(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*(Lx[i]-Esp(Lx,Lp))**2 for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)
```

Les listes (▶ p. 350) doivent être en correspondance : si x_1 est le premier terme de Lx, $P(X = x_1)$ doit être le premier terme de Lp.

Estimation de l'espérance et de l'écart type par simulation avec python

On peut estimer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire X simulée par la fonction `simu_X()`.

Estimation de l'espérance

```
import math

m=0
for simu in range(1000):
    m=m+simu_X()
m=m/1000
```

Estimation de l'écart type

```

s=0
for simu in range(1000):
    s=s+(simu_X()-m)**2
s=math.sqrt(s/1000)
```

On peut remplacer 1 000 par une autre valeur entière « grande ».

Estimation de l'espérance et de l'écart type par simulation avec un tableur

Pour une variable aléatoire X, on crée deux colonnes : l'une indiquant les numéros des simulations et l'autre contenant les valeurs simulées prises par la variable aléatoire X.

En reprenant l'**exemple** de l'objectif 1, où la variable aléatoire X représente le gain du joueur, on estime la variance $V(X)$ avec la commande =VAR(plage) et l'écart type $\sigma(X)$ avec la fonction =ECARTYPE.STANDARD(plage).

	A	B	D	E	F
1	Partie n°	Gain			
2	1	-5		Gain moyen	
3	2	-2		-0,1715	
4	3	-5			
5	4	10		Variance	Écart type
6	5	-5		45,5670878	6,75067737
7	6	-5			
8	7	-5			

OBJECTIF 3 Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

Savoir-faire 4 p. 323

Modélisation

▶ **Modéliser une situation faisant intervenir l'aléatoire** consiste à traduire cette situation à l'aide d'outils de probabilités.

▶ Une **répétition** d'expériences aléatoires peut être modélisée par un **arbre pondéré**. La **valeur prise par la variable aléatoire** peut être notée au bout de chaque chemin de l'arbre.

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

Exemple **Répétition dans des conditions identiques et indépendantes**

On fait tourner deux fois de suite une roue divisée en trois secteurs : un « bleu », un « vert » et un « rouge ».

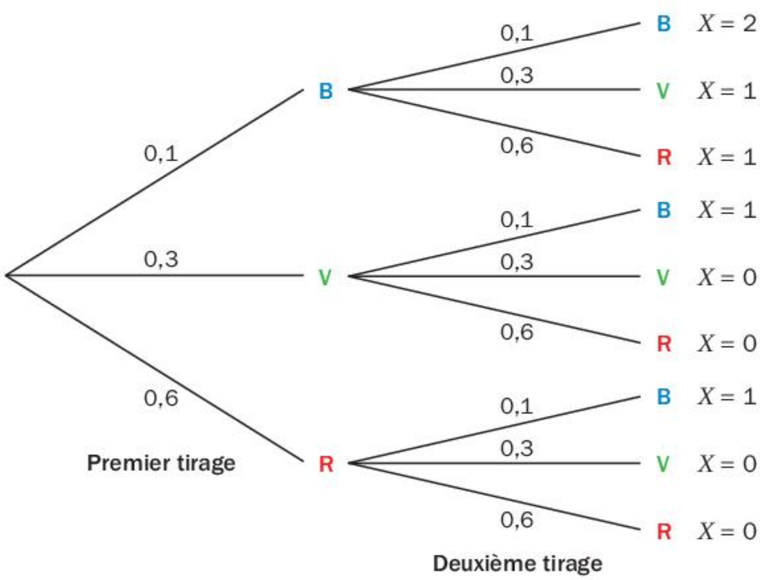
Les secteurs bleu (B), vert (V) et rouge (R) font respectivement des angles de 36°, 108° et 216°.

$P(B) = \dfrac{36}{360} = 0{,}1$, $P(V) = \dfrac{108}{360} = 0{,}3$ et $P(R) = \dfrac{216}{360} = 0{,}6$.

▶ On s'intéresse au nombre de fois où la flèche s'arrête sur le secteur bleu, qui est modélisé par la variable aléatoire X.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2.

▶ La situation peut être modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Un **arbre pondéré** est un arbre de choix. Les probabilités notées sur les branches sont celles de l'issue considérée.

▶ À partir de l'arbre, on peut dénombrer 9 issues, ou évènements élémentaires.

$\Omega = \{(B ; B) ; (B ; V) ; (B ; R) ; (V ; B) ; (V ; V) ; (V ; R) ; (R ; B) ; (R ; V) ; (R ; R)\}$.

▶ On peut calculer les probabilités de X à l'aide des règles suivantes.

– **Règle 1 de la somme** : la somme des probabilités portées par les **branches issues d'un même nœud** est égale à 1.

– **Règle 2 du produit** : la probabilité **d'un chemin** est égale au produit des probabilités portées par les branches constituant ce chemin.

– **Règle 3 des probabilités totales** : la **probabilité d'un évènement** correspondant à **plusieurs chemins** est égale à la somme des probabilités associées à ces chemins.

$P(X = 2) = P(\{B ; B\}) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$ (▶ **Règle 2**)

$P(X = 1) = P(\{B ; V\}) + P(\{B ; R\}) + P(\{V ; B\}) + P(\{R ; B\})$ (▶ **Règle 3**)

$= 2 \times (0{,}1 \times 0{,}3) + 0{,}1 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}18$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 0{,}81$ (▶ **Règle 1**)

Savoir-faire

Fichier Python
Savoir-Faire 1 et ex. 6
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

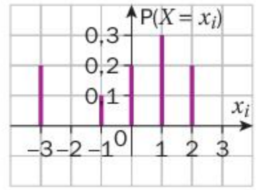
1 Déterminer une loi de probabilité

PROGRAMMATION python

1. a. Justifier que le graphique ci-contre donne une loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

b. Calculer $P(X \geqslant 1)$ et $P(X < 0)$.

c. Écrire une fonction en Python simulant X.



2. La loi de probabilité d'une variable aléatoire Y est donnée par le tableau ci-dessous.

y_k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(Y = y_k)$	0,05	0,08	0,17	0,20	0,25	0,13	0,08	0,04

Calculer $P(2 \leqslant Y \leqslant 4)$ et $P(\overline{Y \leqslant 3})$.

Solution

1. a. Par lecture graphique, on obtient :

x_i	-3	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

Toutes les probabilités proposées sont comprises entre 0 et 1, et $0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$.

On vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

Les valeurs définissent bien une loi de probabilité pour X.

b. $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}2 = \underline{0{,}5}$.

$P(X < 0) = P(X = -3) + P(X = -1) = 0{,}2 + 0{,}1 = \underline{0{,}3}$.

On peut lire dans le tableau que $P(X < 0)$ est égal à $P(X \leqslant -1)$.

c.

```python
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.2:
        return -3
    if alea<0.3:
        return -1
    if alea<0.5:
        return 0
    if alea<0.8:
        return 1
    return 2
```

2. $P(2 \leqslant Y \leqslant 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = \underline{0{,}62}$.

$P(\overline{Y \leqslant 3}) = P(Y > 3) = P(Y \geqslant 4)$

$= P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7) = \underline{0{,}5}$.

L'évènement contraire de $\{Y \leqslant 3\}$ est $\{Y > 3\}$, qui est également ici $\{Y \geqslant 4\}$.

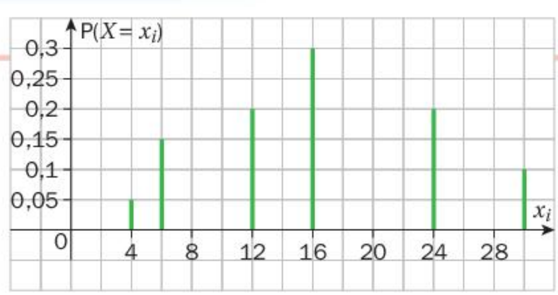
▶ Rabat IV, Logique

Application

6 a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par la représentation graphique ci-contre.

b. Calculer $P(X \geqslant 12)$, $P(\overline{X > 10})$ et $P(12 \leqslant X \leqslant 24)$.

c. Écrire une fonction en Python simulant X.



7 Un dé équilibré à vingt faces présente 4 faces « rouges », autant de faces « noires » et trois fois plus de faces « bleues » que de faces « vertes ». On lance ce dé une fois.
Si la face obtenue est « verte », on gagne 10 € ; si elle est « rouge », on gagne 5 € ; si elle est « noire », on perd 5 € ; si elle est « bleue », on perd 10 €.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain, notée G.

Les incontournables 25 à 27 p. 327

Fichier Python
Savoir-Faire 2 et ex. 8
Manuel numérique enseignant

2 Simuler une variable aléatoire

PROGRAMMATION python

OBJECTIF 2
Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

La variable aléatoire X est définie par la loi de probabilité :

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,20	0,29	0,25	0,16	0,10

a. Proposer une fonction en Python simulant la variable aléatoire X.

b. Estimer par simulation l'espérance et l'écart type de X.

c. L'espérance de X, notée μ, vaut 0,67 et son écart type, noté σ, environ 1,24. Recopier et compléter les lignes 7, 8, 17 et 19 du programme en Python ci-contre afin de simuler 200 échantillons de 400 simulations de X. Estimer alors la proportion d'échantillons dont la moyenne m vérifie :

$$|m - \mu| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{400}}.$$

```
1  import random
2  import math
3
4  def echant(n):
5      m=0
6      for simu in range(n):
7          m=...
8      return ...
9
10 Liste=[]
11 for echantillon in range(200):
12     Liste.append(echant(400))
13 mu=0.67
14 sigma=1.24
15 compteur=0
16 for valeur in Liste:
17     if ...<2*sigma/math.sqrt(400):
18         compteur=compteur+1
19 print(...)
```

Solution

a.

```
import random

def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.2:
        return -1
    if alea<0.49:
        return 0
    if alea<0.74:
        return 1
    if alea<0.9:
        return 2
    return 3
```

• Si alea $< 0{,}20$, on renvoie -1.
• Si $0{,}20 \leqslant$ alea $< 0{,}20 + 0{,}29$ soit $0{,}20 \leqslant$ alea $< 0{,}49$, on renvoie 0.

b.

```
import math

mo=0
for simu in range(1000):
    mo=mo+simu_X()
mo=mo/1000
print(mo)

s=0
for simu in range(1000):
    s=s+(simu_X()-mo)**2
s=math.sqrt(s/1000)
print(s)
```

On calcule la moyenne des valeurs simulées pour X.

On calcule l'écart type des valeurs simulées pour X.

c.

```
7          m=m+simu_X()
8      return m/n
```

On calcule la moyenne des valeurs prises par `simu_X()`.

```
17     if abs(valeur-mu)<2*sigma/math.sqrt(400):
18         compteur=compteur+1
19 print(compteur/200)
```

On utilise la valeur absolue pour déterminer la distance entre la valeur et l'espérance (0,67).

Une simulation avec Python donne 95,5 % des échantillons vérifiant cette condition.

Application

8 La variable aléatoire X est définie par la loi de probabilité ci-contre.

a. Proposer un programme en Python simulant la variable aléatoire X.

b. Estimer alors l'espérance et l'écart type de X.

x_i	0	1	2	4	5
$P(X = x_i)$	0,08	0,22	0,39	0,21	0,10

Les incontournables 28 p. 327

Vidéo
Calculer des indicateurs
hatier-clic.fr/ma1322

3 Calculer des indicateurs

OBJECTIF 2
Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

1. La variable aléatoire Y donne le prix, en euros, d'objets proposés sur un site marchand. La loi de probabilité de Y est donnée par :

y_j	10	15	25	40
$P(Y = y_j)$	0,5	0,25	0,18	0,07

a. Déterminer l'espérance et l'écart type de Y.
b. À la suite d'un changement de fonctionnement du site, les prix baissent de 10 %, mais le vendeur doit dorénavant faire payer des frais de port qui s'élèvent à 2 € par objet.
On note Z le nouveau prix de chaque objet.
Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et l'écart type de Z, sachant que les modifications de prix n'influencent pas les habitudes de consommation des biens étudiés.
2. Les variables aléatoires G et H donnent le gain algébrique obtenu lors de l'achat de deux jeux de grattage.

k_i	−2	−1	0	2	5	10	20
$P(G = k_i)$	0,5	0,2	0,1	0,1	0,05	0,04	0,01
$P(H = k_i)$	0,6	0,14	0,1	0,05	0,05	0,03	0,03

Après avoir calculé l'espérance et l'écart type de chacun de ces jeux, les comparer.

Solution

1. a. $E(Y) = 10 \times 0,5 + 15 \times 0,25 + 25 \times 0,18 + 40 \times 0,07 = 16,05$ €.
$V(Y) = (10 - 16,05)^2 \times 0,5 + (15 - 16,05)^2 \times 0,25 + (25 - 16,05)^2 \times 0,18 + (40 - 16,05)^2 \times 0,07$
$= 73,1475$.
$\sigma(Y) = \sqrt{73,1475} \approx 8,55$ €.

On donne souvent une valeur approchée de l'écart type afin de rendre cette donnée plus explicite.

b. On a $Z = 0,9Y + 2$, ainsi :

Baisser de 10 % revient à multiplier par 0,9.

z_j	11	15,5	24,5	38
$P(Z = z_j)$	0,5	0,25	0,18	0,07

$0,9 \times 40 + 2 = 38$.

$E(Z) = 0,9E(Y) + 2 = 0,9 \times 16,05 + 2 = 16,445$ €.
$\sigma(Z) = |0,9|\sigma(Y) = 0,9\sqrt{73,1475} \approx 7,70$ €.

L'augmentation de 2 € n'influence pas l'écart type.

2. • $E(G) = -2 \times 0,5 + ... + 20 \times 0,01 = -0,15$ €.
$V(G) = (-2 - (-0,15))^2 \times 0,5 + ... + (20 - (-0,15))^2 \times 0,01 = 11,8275$.
$\sigma(G) = \sqrt{11,8275}$ donc $\sigma(G) \approx 3,44$ €.

Une espérance négative pour un jeu correspond à un jeu défavorable au joueur.

• $E(H) = -2 \times 0,6 + ... + 20 \times 0,03 = -0,09$ €.
$V(H) = (-2 + 0,09)^2 \times 0,4 + ... + (20 + 0,09)^2 \times 0,05 = 18,9819$.
$\sigma(H) = \sqrt{18,9819}$ donc $\sigma(H) \approx 4,36$ €.
• Les deux jeux sont défavorables pour le joueur, mais le jeu associé à H permet en moyenne de moins perdre d'argent.
L'écart type de H étant plus élevé que celui de G, les gains de H tendent à être plus dispersés que ceux de G.

L'écart type mesure la dispersion : plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Application

9 La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.
On pose $Y = 0,8X + 5$ et $Z = X - 15$.

x_i	0	10	20	30	40
$P(X = x_i)$	0,25	0,4	0,15	0,1	0,1

• Comparer les espérances et les écarts types des trois variables aléatoires X, Y et Z.

Les incontournables 29 et 30 p. 327

4 Étudier une variable aléatoire définie par répétition

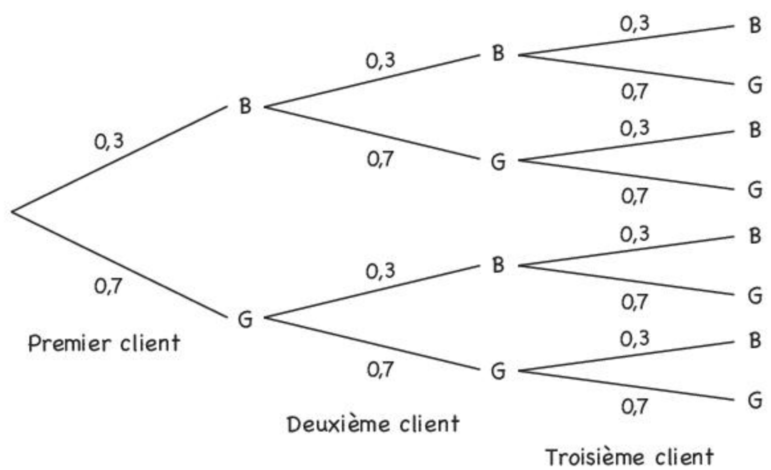
OBJECTIF 3
Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

Sur la plage, une marchande ambulante vend des beignets à 2 € et des glaces à 3 €.
La marchande sert trois clients qui achètent chacun un produit.
La probabilité de l'évènement G « le client achète une glace » vaut 0,7.

1. a. Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b. Calculer la probabilité de l'évènement V « la marchande vend deux glaces et un beignet ».
2. a. On note X la variable aléatoire associée au nombre de glaces vendues.
Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer la probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues.

Solution

1. a. On appelle B l'évènement « le client achète un beignet ».
On connaît P(G) = 0,7 ; on en déduit P(B) = 1 − P(G) = 0,3.
La situation est modélisée à l'aide de l'arbre pondéré ci-dessous.



Les expériences sont identiques et indépendantes : les valeurs de P(B) et P(G) sont identiques pour chaque client.

b. L'évènement V est constitué des trois issues (B ; G ; G), (G ; B ; G) et (G ; G ; B).
P(B ; G ; G) = 0,3 × 0,7 × 0,7 = 0,147.
Chacune de ces issues a la même probabilité 0,147, donc :
P(V) = 3 × 0,147 = 0,441.

La probabilité de l'issue (B ; G ; G) est obtenue en multipliant les probabilités portées par les branches du chemin correspondant.

L'évènement V correspond à trois chemins de l'arbre. On obtient P(V) en additionnant les probabilités de ces chemins.

2. a. X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 et 3.
La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343

b. $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}441 + 0{,}343 = 0{,}784$.

La probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues est égale à la probabilité que deux glaces soient vendues ($P(X = 2)$) ou que trois glaces soient vendues ($P(X = 3)$).

Application

10 Pour se rendre sur son lieu de travail, une cycliste passe par trois carrefours munis de feux tricolores. Pour chaque carrefour, la probabilité qu'elle croise un feu au vert est de 0,35 et celle de croiser un feu à l'orange est de 0,15. Les feux fonctionnent de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où le feu est vert sur le trajet.
a. Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer la loi de probabilité de X.
b. Calculer la probabilité que la cycliste arrive au moins deux fois au carrefour quand le feu est vert.

Les incontournables 31 et 32 p. 327

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Définir et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Pour une expérience aléatoire d'univers Ω, **définir une variable aléatoire X**, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

On peut alors générer des évènements :

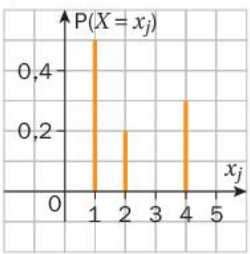
- $\{X = x\}$: « la variable aléatoire X prend la valeur x » ;
- $\{X \leqslant x\}$: « la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

▸ Pour une variable aléatoire X, définir la **loi de probabilité de X**, c'est associer à chaque valeur prise par X une probabilité.

Valeur prise x_j	x_1	...	x_r
Probabilité $P(X = x_j)$	p_1	...	p_r

La somme des probabilités doit valoir 1 :
$p_1 + ... + p_r = 1$.

▸ On peut **représenter** une variable aléatoire X en représentant les valeurs $P(X = x_j)$ par des barres.



▸ On peut **simuler** une variable aléatoire X à l'aide d'une fonction en Python où les valeurs prises par X sont renvoyées avec la probabilité définie dans la loi de probabilité de X.

```python
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.5:
        return 1
    if alea<0.7:
        return 2
    return 4
```

▸ Cours 1 p. 316

Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

▸ L'**espérance** de X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + ... + p_r \times x_r.$$

▸ La **variance** de X est :

$$V(X) = p_1 \times \left(x_1 - E(X)\right)^2 + ... + p_r \times \left(x_r - E(X)\right)^2.$$

▸ L'**écart type** de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Après un grand nombre de **simulations** de X :
- la valeur moyenne prise par X est proche de l'espérance de X ;
- l'écart type des valeurs prises par X est proche de l'écart type de X.

Détermination de l'espérance et de l'écart type avec python

Pour une variable aléatoire X, on crée deux listes :

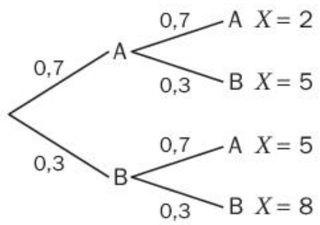
- Lx contenant les valeurs prises par X ;
- Lp contenant les probabilités de ces valeurs.

```python
def Esp(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*Lx[i] for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)

def E_Type(Lx,Lp):
    L=[Lp[i]*(Lx[i]-Esp(Lx,Lp))**2 for i in range(len(Lx))]
    return sum(L)
```

▸ Cours 2 p. 317

Modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'une variable aléatoire



▸ Une **répétition** d'expériences aléatoires peut être modélisée par un **arbre pondéré**.

▸ La **valeur prise par la variable aléatoire** peut être notée au bout de chaque chemin de l'arbre.

▸ Cours 3 p. 319

… ET FAIRE LE POINT

QUIZ

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

Vérifiez que vous avez compris le cours.

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

Pour les exercices 11 à 12
On s'intéresse à la variable aléatoire X, simulée par la fonction en Python ci-contre.

```python
import random
p=...
def simu():
    alea=random.random()
    if alea<=0.2:
        return 0
    if alea<=p:
        return 1
    return -1
```

	A	B	C	D
11 Si $p > 0{,}2$, alors la variable aléatoire X prend les valeurs :	$\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$	$\{0{,}2\ ;\ p\}$	$[-1\ ;\ 1]$	$\{0\ ;\ 1\}$
12 Afin d'avoir $P(X = 1) = P(X = -1)$, on pose :	$p = 0{,}3$	$p = 0{,}4$	$p = 0{,}5$	$p = 0{,}6$

Pour les exercices 13 à 16
Un sac contient dix jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 0 à 3. Un jeton porte le numéro 0, deux jetons portent le numéro 1, trois jetons portent le numéro 2 et quatre portent le numéro 3.
On tire au hasard un jeton dans le sac. X est la variable aléatoire égale au numéro inscrit sur le jeton.

	A	B	C	D
13 L'ensemble des valeurs prises par X est :	$[0\ ;\ 3]$	$\{0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 3\ ;\ 3\ ;\ 3\}$	$\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$	$\{10\}$
14 $P(X = 3) = \ldots$	$\frac{1}{10}$	0,4	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$
15 L'espérance mathématique $E(X)$ vaut :	10	$\frac{20}{10}$	20	2
16 L'écart type $\sigma(X)$ est :	5	1	−1	3

17 Pour une variable aléatoire X, d'espérance 5, d'écart type 1 et simulée par une fonction `simu_X()`, le programme suivant affiche :

```python
x=0
for simu in range(1000):
    x=x+simu_X()
print(x/1000)
```

	A	B	C	D
17	5	une valeur comprise entre 4 et 6.	une valeur comprise entre 3 et 7.	une valeur proche de 5.

Pour les exercices 18 à 21
On reprend la situation ci-dessus, mais le joueur tire au hasard et avec remise deux jetons du sac.
Son gain est modélisé par la variable aléatoire Y égale au produit des valeurs prises par les jetons.

	A	B	C	D
18 La variable aléatoire Y est telle que :	Y prend 16 valeurs.	$P(Y = 4) = 2 \times P(X = 2)$	$P(Y = 0) = 0$	$P(Y = 7) = 0$
19 $P(Y = 0) = \ldots$	0,01	0,1	0	0,19
20 $P(Y = 3) = \ldots$	$\frac{2}{25}$	$\frac{16}{100}$	$P(X = 1) \times P(X = 3)$	$\frac{8}{100}$
21 La probabilité que Y soit strictement inférieure à 9 est :	$\frac{2}{25}$	0,84	0,125	$\frac{23}{25}$

Corrigés p. 368

DÉVELOPPER SES STRATÉGIES ET MÉTHODES

Les bons réflexes

Adoptez la bonne stratégie !

22 Parlons stratégies ! À l'oral

Pour chaque situation, calculer la probabilité demandée. Expliquer la **stratégie** choisie.

a.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,5	0,2

Calculer $P(X \leqslant 2)$.

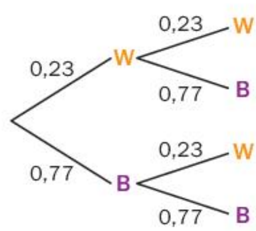
b. On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note Y la somme des deux faces supérieures obtenues.
Calculer $P(Y = 5)$.

c. La variable aléatoire Z est simulée par la fonction en Python ci-contre.

```python
def simu_Z():
    alea=random.random()
    if alea<0.2:
        return -1
    if alea<0.5:
        return 0
    return 2
```

Calculer $P(Z \geqslant 0)$.

d. La variable aléatoire T compte le nombre d'évènements B réalisés dans l'expérience modélisée par l'arbre ci-contre.
Calculer $P(T = 1)$.



23 Parlons stratégies ! À l'oral

Pour chaque situation, calculer le (ou les) indicateur(s) demandé(s). Expliquer la **stratégie** choisie.

a.

x_i	2	4	6	7
$P(X = x_i)$	0,4	0,3	0,1	0,2

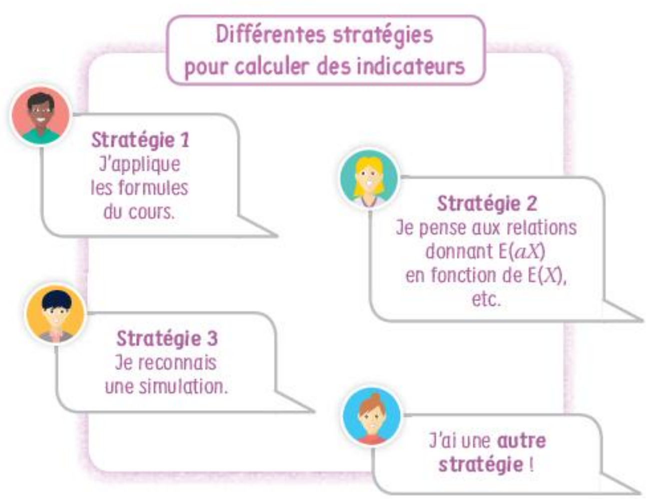
Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

b. Une variable aléatoire V a pour espérance 20 et écart type 2. On définit la variable aléatoire Y par $Y = 1{,}1V - 1$.
Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

c. Une variable aléatoire Z est simulée par une fonction en Python. On exécute N fois cette fonction et on calcule, pour chaque valeur de N, la moyenne m des valeurs obtenues.

N	100	500	1 000
m	1,79	1,766	1,803

Estimer $E(Z)$.



24 En moins de trois minutes !

Dans chaque cas, calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

a. La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant.

y_i	1	2	3	5
$P(Y = y_i)$	0,09	0,57	0,21	0,13

b. Une urne contient trois boules bleues et sept boules rouges.
Deux boules sont tirées avec remise et Y compte le nombre de boules rouges tirées.

c. $E(X) = 10$, $\sigma(X) = 1$ et $Y = 0{,}8X + 3$.

Fichier Python
Ex. 28
Manuel numérique enseignant

Les incontournables

Vérifiez que vous maîtrisez les savoir-faire.

Déterminer une loi de probabilité

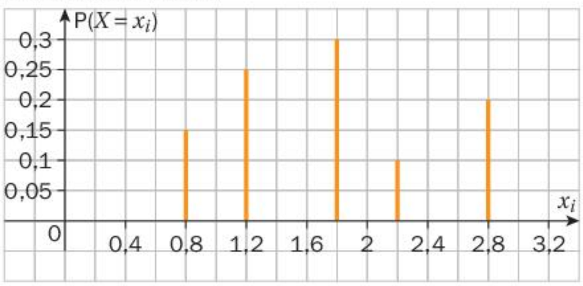
25 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_k	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x_k)$	0,20	$2p$	$3p$	0,09	0,16	0,30

a. Déterminer la valeur de p.

b. Calculer la probabilité des évènements $\{X \geqslant 3\}$, $\{X < 1\}$ et $\{1 < X < 4\}$.

26 La loi de probabilité de la variable X est donnée par le graphique suivant.



a. Présenter cette loi à l'aide d'un tableau.

b. Calculer $P(X < 2)$, $P(X > 2{,}8)$ et $P(1{,}6 < X < 2{,}5)$.

27 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenu.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer $P(X < 2)$.

c. Calculer la probabilité que X soit au moins égale à 3.

d. Calculer la probabilité que X soit au plus égale à 1.

Simuler une variable aléatoire

28 PROGRAMMATION python

La loi de la variable aléatoire X est :

x_i	-5	5	10	15
$P(X = x_i)$	0,16	0,27	0,34	0,23

a. Rédiger une fonction en Python `simu_X()` simulant la variable aléatoire X.

b. Recopier et compléter la fonction `moy` afin d'estimer l'espérance de X.

c. En modifiant cette fonction, créer une fonction en Python afin d'estimer l'écart type de X.

```
import random
import math

def moy(n):
    mu=0
    for simu in range(n):
        mu=...
    return ...
```

Calculer des indicateurs

29 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_k	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_k)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

1. Calculer l'espérance et l'écart type de X.

2. On pose $Y = X + 4$, $Z = 2{,}3X$ et $T = -X + 1$.

Pour chacune de ces variables aléatoires :

a. dresser sa loi de probabilité ;

b. calculer son espérance et son écart type.

30 Dans un groupe scolaire, deux tombolas sont organisées durant l'année. À chaque occasion, trois cents billets sont mis en vente. La tombola de Noël offre un lot de 100 €, six lots de 50 € et dix lots de 5 €. La tombola de fin d'année offre quatre lots de 50 €, deux lots de 25 € et quarante lots de 5 €. X et Y sont les variables aléatoires associées aux montants des lots, par ticket acheté, pour la tombola de Noël et la tombola de fin d'année.

a. Donner les lois de probabilité de X et Y.

b. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

c. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$ et en $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

d. Comparer les deux tombolas.

Étudier une variable aléatoire définie par répétition

31 Durant l'année scolaire 2012-2013, 8,3 enfants sur 10 scolarisés en grande section de maternelle étaient vaccinés contre la rougeole.

Dans une classe, on choisit au hasard trois élèves.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants vaccinés parmi ces élèves.

a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

32 Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : deux rouges, trois bleues et cinq marron.

Un joueur tire une boule au hasard : si elle est rouge, il gagne 12 € ; si elle est bleue, il perd 10 € ; si elle est marron, il remet la boule et rejoue.

Si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 10 € ; sinon, il perd 8 €.

a. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer l'ensemble des issues possibles.

b. Préciser la loi de probabilité de la variable aléatoire G égale au gain du joueur.

Corrigés p. 368

Entraînement

Fichier Python
Ex. 37 et 38
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 1 Déterminer et exploiter la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Savoir-faire 1 p. 320

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

33 On considère une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité. Dans chaque cas, déterminer la valeur de p.

a.

x_i	–3	–2	–1	0	1
$P(X = x_i)$	p	0,17	0,26	0,34	0,12

b.

x_i	5	10	15	20	25	30
$P(X = x_i)$	0,04	0,13	0,26	0,24	p	0,14

34 On considère une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité. Dans chaque cas, calculer $P(X \geqslant 3)$.

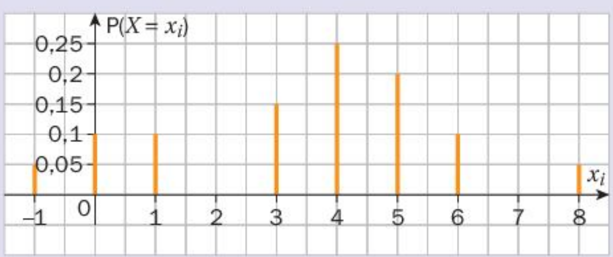
a.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,41	0,34	0,16	0,07	0,02

b.

x_i	–4	0	4	8	12
$P(X = x_i)$	0,18	0,18	0,18	0,23	0,23

35 La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le graphique ci-dessous.



a. Présenter cette loi à l'aide d'un tableau.
b. Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 5)$ et $P(X \geqslant 4)$.

36 Dans chacune des situations **a** et **b**, on considère un tirage à la suite duquel :
- le joueur gagne 2 € s'il obtient la couleur verte ;
- le joueur ne gagne ni ne perd d'argent s'il obtient la couleur bleue ;
- le joueur perd 4 € s'il obtient la couleur rouge.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire associée au gain.

a. Un vase opaque contient cinq boules bleues, une verte et trois rouges. On prélève une des boules, qui sont indiscernables au toucher.

b. On prélève un jeton d'une urne opaque contenant vingt jetons de même forme, mais de trois couleurs différentes. Elle comprend autant de jetons rouges que de jetons verts, et deux fois plus de jetons bleus que de jetons rouges.

37 PROGRAMMATION python

Recopier et compléter la fonction en Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire X telle que :

x_j	–4	0	3	6
$P(X = x_j)$	0,15	0,40	0,26	0,19

```
import random
def simu():
    alea=random.random()
    if alea<0.15:
        return ...
    if alea<0.55:
        return ...
    if ...:
        return 3
    return ...
```

38 La loi de probabilité d'une variable aléatoire T est donnée par le tableau ci-dessous.

t_k	1	2	3	4
$P(T = t_k)$	p	$3p$	0,35	0,41

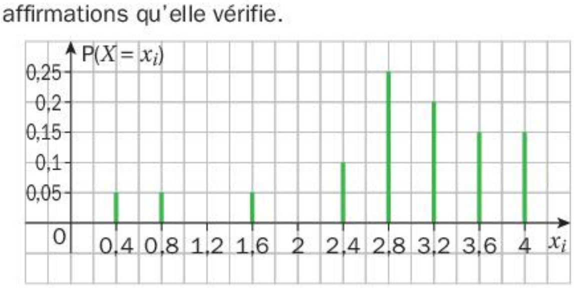
a. Déterminer la valeur de p.
b. Calculer la probabilité des évènements $\{T \leqslant 2\}$, $\{T > 4\}$ et $\{2 \leqslant T \leqslant 4\}$.
c. PROGRAMMATION python
Écrire une fonction en Python simulant T.

39 Les lois de probabilité des variables aléatoires U et V sont données par le tableau ci-dessous.

t_i	10	11	12	13	14	15
$P(U = t_i)$	0,12	0,14	0,21	0,32	0,13	p
$P(V = t_i)$	0,27	0,23	q	0,14	r	0,10

- Déterminer les valeurs de p, q et r sachant que $P(U \leqslant 13) = P(V \leqslant 13)$.

40 Pour la variable aléatoire dont la loi de probabilité est représentée par le graphique ci-dessous, indiquer les affirmations qu'elle vérifie.



a. « $P(X \geqslant 4) = 0$. »
b. « $P(2 \leqslant X \leqslant 3) \geqslant 0,5$. »
c. « $P(X \leqslant 2) \leqslant 0,2$. »

Fichier Python
Ex. 44 et 49
Manuel numérique enseignant

★★

41 De la réponse à la question

Zoé a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

> **a.** $P(C > 0) = 1 - P(C \leqslant 0) = 1 - P(C = 0)$
> $P(C > 0) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$.
> La probabilité que le lot comporte au moins un verre cassé est 0,38.
> $P(C \geqslant 2) = P(C = 2) + P(C = 3) + P(C = 4) + P(C = 5)$
> $= 0{,}10 + 0{,}06 + 0{,}03 + 0{,}02 = 0{,}21$.
> La probabilité que le lot comporte au moins deux verres cassés est 0,21.
> **b.** Comme $P(C \leqslant 2) = 0{,}62 + 0{,}17 + 0{,}10 = 0{,}89$, l'entreprise ne peut pas affirmer que le carton de 360 verres à pied comporte moins de deux verres cassés 90 % du temps.

1. Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Zoé.
2. Expliquer la démarche de Zoé.

Maths à l'oral
Discutez de la réponse que vous apporteriez à l'énoncé proposé.

42

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X sachant que :
- X prend ses valeurs sur $\{0 ; 1 ; 2\}$;
- $P(X = 0) = 2 \times P(X = 1)$;
- les évènements $\{X = 0\}$ et $\{X \geqslant 1\}$ ont la même probabilité.

43

Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées 1 ; 2 ; 3 et 4. On sait qu'il y a :
- 30 % de plus de boules 1 que de boules 2 ;
- 50 % de plus de boules 3 que de boules 1 ;
- 20 % de moins de boules 4 que de boules 3.

● Déterminer la loi de la variable aléatoire qui à un tirage renvoie le numéro de la boule tirée.

44

On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Le minimum des deux faces obtenues définit la variable aléatoire M.

a. Après avoir recopié et complété le tableau suivant, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire M.

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1		1		
2		2		
3		2		
4		2		

b. Calculer et interpréter $P(M \leqslant 2)$ et $P(M \geqslant 3)$.

c. PROGRAMMATION python Écrire une fonction en Python simulant cette variable aléatoire.

45 IN ENGLISH p. 381

In a lottery of Blaye,
– four tickets out of five yield no prize;
– one in ten tickets yields one prize;
– among the remaining tickets, 50% yield two prizes and the rest four prizes.

● Determine the law of probability of the random variable associated among prizes.

46

Le nombre de jours de pannes annuelles d'un serveur informatique est modélisé par une variable aléatoire X ; toute panne est réparée le soir-même.

x_k	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_k)$	0,19	0,48	0,17	0,10	0,05	0,01

a. Calculer et interpréter la probabilité des évènements $\{X \geqslant 1\}$ et $\{X \leqslant 1\}$.

b. L'entreprise peut-elle affirmer que son serveur ne connaît pas de pannes au moins 99 % de l'année ?

47

Un magasin de bricolage propose des lots de vis dont la taille est déterminée par la quantité de vis.
La variable aléatoire V modélise la répartition des achats selon la taille des lots sur les derniers mois.

v_i	10	20	50	100	150	500
$P(V = v_i)$	0,12	0,19	0,34	0,21	0,03	0,11

a. Calculer et interpréter les probabilités des évènements $\{50 \leqslant V \leqslant 150\}$ et $\{V < 100\}$.

b. Donner la plus petite taille t de lot telle que $P(V \leqslant t) \geqslant 0{,}5$.

48 Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles exactes pour toute variable aléatoire X ? Justifier.

a. « $P(X > 3) = P(X \geqslant 4)$. »
b. « $P(X \leqslant 2) \leqslant P(X \leqslant 5)$. »
c. « $P(X = -1) = 1 - P(X = 1)$. »
d. « $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$. »

49 PROGRAMMATION python

Une variable aléatoire Y est simulée par la fonction en Python donnée ci-contre.

```python
import random
def simu_Y():
    alea=random.random()
    if alea<0.05:
        return 0
    if alea<0.28:
        return 2
    if alea<0.5:
        return 3
    if alea<0.86:
        return 4
    return 6
```

a. Donner la loi de Y.
b. En déduire $P(Y \geqslant 3)$.
c. Proposer une fonction en Python simulant n fois la variable aléatoire et renvoyant les n résultats sous la forme d'une liste.

Fichier Python
Ex. 54
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 2 Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

Savoir-faire 2 et 3 p. 321-322

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

50 Pour chaque variable aléatoire dont la loi est donnée, calculer son espérance et son écart type.

a.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,36	0,31	0,16	0,11	0,06

b.

y_i	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$P(Y = y_i)$	0,18	0,20	0,24	0,20	0,18

c.

z_i	−3	−2	−1	1	2
$P(Z = z_i)$	0,03	0,06	0,12	0,24	0,55

51 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_j	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

1. Calculer l'espérance et l'écart type de X.

2. On pose $Y = X - 2$, $Z = 1{,}2X$ et $T = 0{,}9X + 1$.

Pour chacune de ces variables aléatoires :

a. donner sa loi de probabilité ;

b. calculer son espérance et son écart type.

52 **a.** Le nombre d'erreurs par candidat à un QCM est modélisé par la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,07	0,36	0,25	0,19	0,09	0,04

Calculer et interpréter l'espérance de X.

b. Dans un autre centre d'examen, la répartition des notes du QCM est donnée par la variable aléatoire Y.

y_i	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y_i)$	0,26	0,19	0,11	0,17	0,14	0,13

Calculer l'espérance de Y.

c. Interpréter l'espérance de X et de Y.

d. Calculer l'écart type de X et celui de Y. Quel centre d'examen a les résultats les plus dispersés ?

53 Les gains pour un ticket d'un nouveau jeu de grattage sont modélisés par la variable aléatoire G.

g_i	0	2	5	10	30	100
$P(G = g_i)$	0,5	0,20	0,15	0,05	0,08	0,02

Un revendeur de ces tickets souhaite réaliser une marge moyenne de 45 centimes par ticket.

• Pour réaliser cet objectif, quel prix doit-il fixer pour un ticket ?

54 PROGRAMMATION python

a. Recopier et compléter la fonction en Python ci-dessous, prenant en entrée une fonction `simu` simulant une variable aléatoire et renvoyant une estimation de l'espérance et de l'écart type.

```
import math

def empirique(simu,n):
    exp=[]
    for i in range(n):
        exp.append(simu())
    m=0
    s=0
    for e in exp:
        m=...
    m=m/...
    for e in exp:
        s=...
    s=math.sqrt(s/...)
    return m,s
```

b. Écrire trois fonctions en Python `simu_X()`, `simu_Y()` et `simu_Z()` simulant les variables aléatoires de l'exercice **50**.

c. Déterminer des estimations de l'espérance et de l'écart type de ces variables aléatoires.

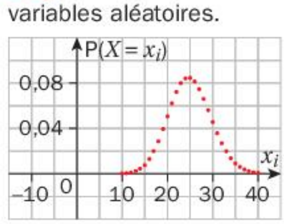
55 Les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y sont données par le tableau ci-dessous.

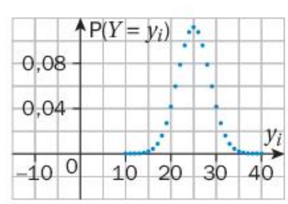
z_i	3	4	5	6	7	8
$P(X = z_i)$	0,13	0,17	0,12	0,18	0,23	0,17
$P(Y = z_i)$	0,13	0,31	0,29	0,15	0,09	0,03

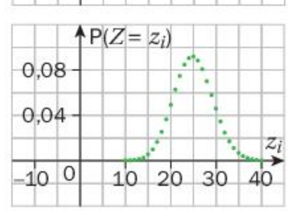
a. Représenter ces deux lois par un diagramme en bâtons.

b. Comparer leurs espérances et leurs écarts types.

56 On donne la représentation graphique de trois variables aléatoires.







a. Expliquer pourquoi on peut remarquer graphiquement que ces trois variables ont approximativement la même espérance.

b. Par lecture graphique, ranger, par ordre croissant, leurs écarts types.

Fichier Python
Ex. 58 et 63
Manuel numérique enseignant

★★

57 Copies à la loupe

Mohamed et Priscilla ont rédigé les réponses suivantes sur leurs copies.

Mohamed

$E(X) = -3 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 + 5 \times 0{,}2$
$= 0{,}5$
$V(X) = -3^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 + 5^2 \times 0{,}1$
$= 0{,}6$
et donc $\sigma(X) = \sqrt{0{,}6} \approx 0{,}77$.

Priscilla

$E(X) = 0{,}3 \times (-3) + 0{,}3 \times 0 + 0{,}2 \times 2 + 0{,}2 \times 5$
$= 0{,}5$
$V(X) = 0{,}3 \times (-2{,}5)^2 + 0{,}3 \times (-0{,}5)^2$
$+ 0{,}2 \times 1{,}5^2 + 0{,}2 \times 4{,}5^2$
$= 6{,}45$
puis $\sigma(X) = \sqrt{6{,}45} \approx 2{,}54$.

- Leurs réponses semblent-elles correctes ? Identifier toutes les erreurs.

Maths à l'oral
Expliquez chaque étape en discutant des éventuelles erreurs.

58 PROGRAMMATION python

a. Recopier et compléter la fonction Esp renvoyant l'espérance d'une variable aléatoire X dont on connaît la loi de probabilité donnée sous la forme de deux listes Lx et Lp.

```python
def Esp(Lx,Lp):
    E=0
    for i in range(len(Lx)):
        E=...
    return E
```

b. Utiliser cette fonction pour déterminer l'espérance de la variable aléatoire suivante.

x_i	−2	−1	0	1	2	5	10
$P(X = x_i)$	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

c. Quelle valeur doit-on donner à m pour que l'espérance de la variable aléatoire $X + m$ soit égale à 0 ?

59 IN ENGLISH ▸ p. 381

The random variable Y has a discrete distribution. The probability that it takes a value other than 0, 1, 2, 4, 10, 15 or 20 is negligible.
Here is the probability table below.

y_i	0	1	2	4	10	15	20
$P(Y = y_i)$	0.03	0.07	0.1	0.1	0.1	0.2	0.4

- Find the value of k such that $E(kY)$, the expected value of kY, is equal to 1.

60

Les variables aléatoires E_1 et E_2 modélisent l'écart au diamètre attendu (10 mm), en dixième de millimètre, de deux marques de boulons.

e_i	$P(E_1 = e_i)$	$P(E_2 = e_i)$
−3	0,04	0,06
−2	0,19	0,12
−1	0,2	0,2
0	0,27	0,33
1	0,15	0,18
2	0,11	0,1
3	0,04	0,01

- Un consommateur devrait-il plutôt choisir la marque modélisée par E_1 ou par E_2 ? Argumenter.

61 Vrai ou faux ?

a. « On note m l'espérance d'une variable aléatoire X. L'espérance de la variable aléatoire $0{,}9X$ vaut $0{,}9m$. »
b. « On note σ l'écart type d'une variable aléatoire Y. L'écart type de la variable aléatoire $Y + 1$ vaut $\sigma + 1$. »
c. « Si l'on diminue de 10 % les valeurs prises par une variable aléatoire, son espérance et son écart type diminuent de 10 %. »

62

Un chef cuisinier évalue la qualité de tomates séchées dans trois lots provenant de fournisseurs différents. La répartition des masses, en grammes, est décrite par les variables aléatoires X, Y et Z.

m_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
$P(X = m_i)$	0,12	0,23	0,25	0,19	0,14	0,07
$P(Y = m_i)$	0,09	0,21	0,43	0,11	0,11	0,05
$P(Z = m_i)$	0,14	0,16	0,19	0,17	0,19	0,15

Après avoir calculé l'espérance et l'écart type de chaque variable aléatoire, déterminer la production :
a. la plus dispersée ;
b. dont la masse moyenne est la plus importante ;
c. la plus régulière.

63 PROGRAMMATION python

On considère le programme en Python suivant.

```python
v_X=[0,1,2,3,4,5]
p_X=[0.08,0.21,0.41,0.15,0.11,0.04]
S=sum(p_X)
E=sum([p_X[k]*v_X[k] for k in range(6)])
Sg=sum([p_X[k]*(v_X[k]-E)**2 for k in range(6)])
print(S,E,Sg)
```

- Interpréter l'affichage ci-dessous obtenu suite à l'exécution de ce programme.

```
1.0 2.12 1.4656
```

Fichier Python
Ex. 69
Manuel numérique enseignant

Exercices en ligne
Exercices supplémentaires
Kwyk Variations 1re via ENT

OBJECTIF 3 Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

Savoir-faire 4 p. 323

Questions FLASH

Diaporama
Questions flash
Manuel numérique enseignant

64 Vrai ou faux ?

Un sac contient quatre jetons indiscernables au toucher : trois bleus (B) et un rouge (R). On tire deux jetons avec remise

a. « P(B ; R) = P(R ; B). »

b. « $P(R\ ;\ R) = \frac{1}{2}$. »

c. « $P(B\ ;\ B) = \frac{9}{16}$. »

65 On lance deux dés bien équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

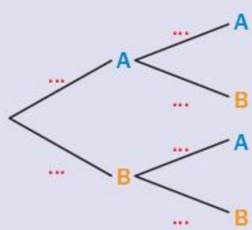
a. Combien y a-t-il d'issues possibles ?

b. Calculer la probabilité des évènements suivants.

- A : « Les deux dés donnent un 1. »
- B : « On obtient au moins un 1. »
- C : « On obtient un 2 et un 6. »

66 A et B sont les deux issues d'une expérience aléatoire répétée deux fois dans des conditions identiques et indépendantes.

1. Sachant que $P(\overline{A}) = 0{,}2$, compléter l'arbre pondéré ci-contre.



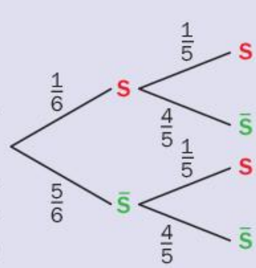
2. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.

c. En déduire $P(X \geqslant 1)$ et $P(X \leqslant 1)$.

67 Valentine et Victor jouent au jeu des petits chevaux. Pour débuter la partie, chaque joueur lance un dé non truqué à six faces et doit obtenir un six. Victor insiste pour commencer à jouer car, selon lui, celui qui débute a plus de chances d'obtenir un six. Il illustre son propos avec l'arbre de probabilités ci-contre.



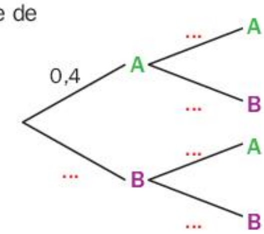
« Cela m'est égal ; à mon avis, il y a peu de chances que l'un d'entre nous commence au premier tour de jeu », lui répond Valentine.

a. Que peut-on penser de l'affirmation de Victor et de sa justification ?

b. L'affirmation de Valentine est-elle correcte ? Justifier.

68 Une expérience aléatoire dont les deux issues possibles sont A et B est répétée deux fois dans des conditions identiques et indépendantes.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

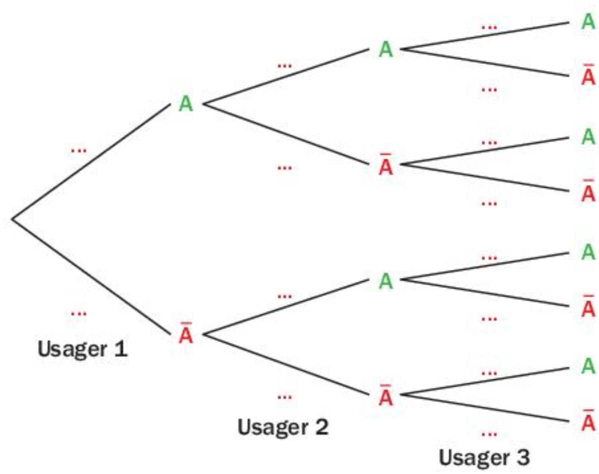


b. Déterminer l'ensemble des issues possibles et calculer les probabilités associées.

c. Proposer une expérience aléatoire qui pourrait-être modélisée par cet arbre.

69 62 % des usagers d'une ligne de bus urbain sont des abonnés au réseau de transport de la ville. On prélève au hasard un usager et on note A l'évènement « l'usager est abonné ». À un arrêt, on croise trois personnes. Le grand nombre d'usagers permet d'assimiler cette rencontre à un tirage avec remise.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant afin d'illustrer cette expérience aléatoire.



b. Déterminer la probabilité des évènements suivants.

- « Deux des usagers sont abonnés. »
- « Au moins deux des usagers sont abonnés. »
- « Au plus deux des usagers sont abonnés. »

c. PROGRAMMATION python™ On croise 10 usagers à un arrêt. Recopier et compléter la fonction en Python suivante afin de simuler le nombre d'usagers abonnés, puis d'estimer la probabilité que 7 usagers soient abonnés.

```
import random
def s_abonnes():
    X=0
    for ind in range(...):
        if random.random()<...:
            X=X+1
    return ...
```

Fichier Python
Ex. 72 et 76
Manuel numérique enseignant

★★

70 Lors d'un concours, un joueur de basket tire trois shoots à trois points. Ses statistiques annuelles permettent d'affirmer que la probabilité qu'il marque un tir primé est égale à 0,6.

a. Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité des évènements suivants.
- A : « Les trois tirs sont réussis. »
- B : « Au moins un tir est réussi. »
- C : « Deux tirs au plus sont réussis. »

71 Un sac contient quatre jetons, indiscernables au toucher, dont les faces respectives portent les numéros de 1 à 4. On tire successivement et avec remise deux jetons. On considère la somme S des nombres inscrits sur les jetons.

a. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer l'ensemble des valeurs prises par S.

b. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire S.

c. Déterminer la probabilité des évènements suivants (de deux façons quand cela est possible).
- A : « S est un nombre pair. »
- B : « S est un nombre impair. »
- C : « S n'est pas un multiple de 3. »
- D : « S est un nombre impair multiple de 3. »

d. L'expérience est répétée une deuxième fois dans des conditions identiques.
Déterminer les probabilités des évènements suivants :
- E : « Obtenir une somme paire et une somme impaire. »
- F : « Obtenir uniquement des sommes multiples de 3. »

72 Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules cyan et trois fois plus de boules magenta que de boules jaunes.

a. On prélève une boule dans cette urne. Déterminer le modèle de probabilité associé à cette expérience.

b. On prélève deux boules, avec remise, dans cette urne. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

c. Un jeu fonctionne selon les règles suivantes :
– si les deux boules tirées ont la même couleur, le joueur remporte 10 € ;
– sinon, si l'une des deux boules est de couleur jaune, le joueur gagne 2 € ;
– dans les autres cas, le joueur perd 5 €.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G associée au gain du joueur.

d. PROGRAMMATION python Rédiger une fonction en Python simulant la variable aléatoire G.

73 Une association sportive comprend 250 adhérents répartis de la façon suivante.

Moins de 15 ans	Entre 15 et 25 ans	Entre 26 et 60 ans	Plus de 60 ans
30 %	52 %	15 %	3 %

1. Deux adhérents sont choisis au hasard. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants.
- A : « Les deux adhérents ont moins de 15 ans. »
- B : « Au moins un adhérent a plus de 60 ans. »

3. Dix personnes sont choisies au hasard.
Quelle est la probabilité :

a. qu'elles aient toutes moins de 15 ans ?

b. qu'elles n'aient pas toutes plus de 60 ans ?

74 IN ENGLISH ▶ p. 381

A four-sided unbiased die, whose faces are numbered 1, 2, 3 and 4, is thrown two times. The 'score' is the number on which it lands.
Suppose a random variable X represents the quotient of the first by the second score.
Find the probability that the variable X is:

a. a whole number; **b.** a decimal number.

75 En 2015, 45 % des femmes résidant en France métropolitaine de 16 ans ou plus pratiquaient intensivement une ou plusieurs activités physiques. Quatre femmes prises au hasard dans cette population sont interrogées (on assimile cette situation à des tirages indépendants avec remise).
X désigne la variable aléatoire égale au nombre des femmes pratiquantes parmi les quatre interrogées.

a. Donner la loi de probabilité de X (arrondir au millième).

b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.

76 PROGRAMMATION python

Le programme en Python suivant simule une expérience aléatoire.

```python
import random
l=[0.1,0.2,0.4,0.3]
X=0
for i in range(10):
    if l[random.randint(0,3)]==0.2:
        X=X+1
```

Aide `random.randint(0,3)` renvoie un nombre entier entre 0 et 3.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Proposer une situation qui pourrait être modélisée par ce programme.

c. Compléter ce programme afin qu'il calcule la probabilité associée à la valeur prise par X.

DÉMONTRER LES PROPRIÉTÉS

Vidéo
Démonstration : linéarité (ou non) des indicateurs statistiques
hatier-clic.fr/ma1334

La démonstration rédigée

Propriété

Pour une variable aléatoire X et deux nombres réels a et b :

- $\mathrm{E}(X+b) = \mathrm{E}(X) + b$
- $\mathrm{V}(X+b) = \mathrm{V}(X)$
- $\sigma(X+b) = \sigma(X)$
- $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}(X)$
- $\mathrm{V}(aX) = a^2\mathrm{V}(X)$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

OBJECTIF : Exprimer $\mathrm{E}(aX+b)$ en fonction de $\mathrm{E}(X)$, en passant par les sommes les définissant. De la même façon, exprimer $\mathrm{V}(aX+b)$ en fonction de $\mathrm{V}(X)$ et en déduire une expression de $\sigma(aX+b)$ en fonction de $\sigma(X)$.

Démonstration

- En notant la loi de probabilité de X,

x_i	x_1	…	x_r
$\mathrm{P}(X = x_i)$	p_1	…	p_r

avec $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, la loi de probabilité de $aX + b$ est :

y_i	$ax_1 + b$	…	$ax_r + b$
$\mathrm{P}(aX + b = y_i)$	p_1	…	p_r

- Par définition, $\mathrm{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{r}(ax_i + b)p_i$.

Or, $(ax_i + b)p_i = ax_ip_i + bp_i$, d'où :

$$\mathrm{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{r} ax_ip_i + \sum_{i=1}^{r} bp_i = a\sum_{i=1}^{r} x_ip_i + b\sum_{i=1}^{r} p_i.$$

Or $\sum_{i=1}^{r} x_ip_i = \mathrm{E}(X)$ et $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, d'où :

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b.$$

On en déduit que :

si $a = 1$, $\mathrm{E}(X+b) = \mathrm{E}(X) + b$, et si $b = 0$, $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}(X)$. ■

- Par définition, $\mathrm{V}(aX+b) = \sum_{i=1}^{r} p_i\left((ax_i + b) - \mathrm{E}(aX+b)\right)^2$.

Or, $(ax_i + b) - \mathrm{E}(aX+b) = ax_i + b - a\mathrm{E}(X) - b = a(x_i - \mathrm{E}(X))$.

Donc $\mathrm{V}(aX+b) = \sum_{i=1}^{r}\left(a(x_i - \mathrm{E}(X))\right)^2 p_i$

$$= \sum_{i=1}^{r} a^2 (x_i - \mathrm{E}(X))^2 p_i$$

$$= a^2 \sum_{i=1}^{r} (x_i - \mathrm{E}(X))^2 p_i$$

D'où $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.

On en déduit que :

si $a = 1$, $\mathrm{V}(X+b) = \mathrm{V}(X)$, et si $b = 0$, $\mathrm{V}(aX) = a^2\mathrm{V}(X)$. ■

- Par définition, $\sigma(aX+b) = \sqrt{\mathrm{V}(aX+b)} = \sqrt{a^2\mathrm{V}(X)} = \sqrt{a^2}\sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

D'où $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

On en déduit que :

si $a = 1$, $\sigma(X+b) = \sigma(X)$, et si $b = 0$, $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$. ■

Le principe

1. On donne la loi de probabilité de $aX + b$ d'après celle de X.

2. **a.** On écrit l'**espérance de $aX + b$** à l'aide du symbole somme.
b. On développe le terme de la somme, puis on factorise afin de se ramener à des sommes connues.
c. On conclut.

3. **a.** On écrit la **variance de $aX + b$** à l'aide du symbole somme.
b. On développe le terme de la somme en utilisant le résultat précédent.
c. Après simplification, on factorise la somme par a^2.
d. On conclut.

4. Pour l'écart type, on utilise le résultat précédent et les **propriétés de la racine carrée** :
pour tout nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

La démonstration à compléter

77 Approfondissement En s'aidant des étapes décrites, recopier et compléter cette démonstration permettant de démontrer la **formule de König-Huygens** ci-dessous.

Propriété

Formule de König-Huygens

Pour une variable aléatoire X, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, ainsi $V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i^2 - E(X)^2$.

Démonstration

- Pour une variable aléatoire X, $V(X) = \sum_{i=1}^{r} (x_i - E(X))^2 p_i$.
- Or $(x_i - E(X))^2 = x_i^{\,2} - 2x_i E(X) + E(X)^2$.
- Ainsi, $V(X) = \sum_{i=1}^{r} \ldots - \sum_{i=1}^{r} \ldots + \sum_{i=1}^{r} \ldots$

$$= E(X^2) - 2E(X) \sum_{i=1}^{r} \ldots + E(X)^2 \sum_{i=1}^{r} \cdots$$

$$= E(X^2) - 2E(X) \times \ldots + E(X)^2 \times \ldots$$

$$= \ldots - \ldots + \ldots = \ldots - \ldots$$

- Pour toute variable aléatoire X, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. ■

1. **On utilise la définition** de la variance.
2. **On développe** le terme général de la somme.
3. **On cherche à simplifier les sommes :**
   a. on factorise par les termes ne dépendant pas de l'indice de sommation ;
   b. on reconnaît les sommes correspondant à l'espérance et à la somme des probabilités d'une variable aléatoire ;
   c. on simplifie l'expression.
4. **On conclut.**

Démonstrations Vers le BAC

78 **1.** Pour trois nombres réels a, b et c, on suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

a. Exprimer a^2 en fonction de b^2 et c^2, et en déduire pour des raisons de signe que $a = 0$.

b. Justifier alors que $b = 0$ et $c = 0$.

On suppose pour la suite de l'exercice que le résultat se généralise : si une somme de termes positifs vaut 0, alors chaque terme de cette somme vaut 0.

2. X est une variable aléatoire ne prenant qu'une seule valeur, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) = 1$. Montrer alors que $E(X) = x$, puis que $V(X) = 0$.

3. Pour montrer la réciproque de cette propriété : on suppose que X est une variable aléatoire telle que $V(X) = 0$.

a. Justifier que la variance de X s'écrit comme une somme de termes positifs, à partir de sa loi de probabilité :

x_i	x_1	…	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	…	p_r

b. En déduire que, pour tout $i \in [\![1\ ;\ r]\!]$ (▶ Rabat I, Notations), $x_i = E(X)$.

c. Reprendre la loi de X et conclure.

79 X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\ ;\ n]\!]$.

Aide $[\![0\ ;\ n]\!] = [0\ ;\ n] \cap \mathbb{Z}$.
▶ Rabat I, Notations

1. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X \leqslant k)$ et $P(X \leqslant k - 1)$.

2. a. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X \geqslant k)$ et $P(X \geqslant k + 1)$.

b. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

Prouver que $E(X) = P(X \geqslant 1) + P(X \geqslant 2) + P(X \geqslant 3)$.

80 X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ.

On pose $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

a. Montrer que la variable aléatoire Z est centrée, c'est-à-dire que $E(Z) = 0$.

b. Montrer que la variable aléatoire Z est réduite, c'est-à-dire que $V(Z) = 1$.

Fichier Python
Ex. 86
Manuel numérique enseignant

81 Le retour de la roulette

Au jeu de la roulette, on peut jouer selon la règle du « plein » :

- on mise p € sur un numéro entre 1 et 36 ;
- la roulette se stabilise sur un numéro compris entre 0 et 36 ;
- si le joueur a deviné le bon numéro, il gagne 36 fois sa mise.

a. On note U la variable aléatoire associée au gain du casino. Calculer « l'avantage du casino », c'est-à-dire l'espérance de U.

b. Le casino envisage une seconde règle selon laquelle un joueur peut aussi choisir de miser sur quatre numéros. Par combien le casino doit-il multiplier la mise du joueur en cas de gain de celui-ci pour que l'avantage du casino soit le même avec les deux règles ?

c. L'écart type des gains est-il alors encore le même ?

82 Simulation ALGORITHMIQUE

Un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6, est lancé trois fois de suite. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de « 4 ».

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il simule cette expérience aléatoire.

```
X ← 0
Pour j allant de 1 à ...
    a nombre entier aléatoire entre 1 et 6
    Si ...
        X ← X + 1
    Fin Si
Fin Pour
```

b. Modifier cet algorithme pour qu'il estime la probabilité $P(X \geqslant 2)$.

83 Simulation ALGORITHMIQUE

Une urne contient neuf boules cyan et trois magenta.
On en prélève quatre avec remise.

● **Communiquer** | Expliquer le rôle de l'algorithme suivant et la valeur prise par la variable S à la fin de son exécution.

```
S ← 0
Pour N allant de 1 à 2 000
    c ← 0
    Pour k allant de 1 à 4
        a nombre aléatoire entre 0 et 1
        Si a ≤ 3/4
            c ← c + 1
        Fin Si
    Fin Pour
    Si c ≥ 3
        S ← S + 1
    Fin Si
Fin Pour
```

84 Entre collectionneurs

Une revue pour les collectionneurs de monnaies anciennes révèle que sur 2 000 pièces de 5 centimes d'euro, 50 possèdent un défaut sur la représentation des étoiles du pourtour de la face.

a. Raisonner | Jawad affirme qu'avec un lot de trois pièces, il a plus de six chances sur cent d'en avoir au moins une avec ce défaut : a-t-il raison ?

b. Calculer | Avec quatre pièces, Amélia a-t-elle plus de chances d'en avoir au moins deux avec ce défaut ?

85 Des donjons et des dragons

Dans un jeu de rôle, les effets des attaques sont modélisés par des « d20 », c'est-à-dire par le lancer d'un dé équilibré à 20 faces.

Face à un certain ennemi, le personnage peut réaliser un « coup critique » si :

- il obtient 20 au premier lancer ;
- en lançant une seconde fois le dé, le résultat est supérieur ou égal à 14 (valeur qui représente l'armure de l'ennemi).

On note X la variable aléatoire associée au résultat d'un lancer du dé.

a. Représenter | Déterminer la probabilité que le personnage réussisse un coup critique.
On pourra réaliser un arbre où l'on distinguera les cas $X \leqslant 13$, $14 \leqslant X \leqslant 19$ et $X = 20$.

b. Une autre arme, plus « affûtée », permet d'obtenir un coup critique en obtenant 19 ou 20 au premier lancer, mais il faut alors obtenir un résultat supérieur ou égal à 16 au second lancer, l'arme étant moins « enchantée ».
Le personnage a-t-il plus de chances de faire un coup critique avec cette autre arme ?

86 Attente d'un « triple 1 »

PROGRAMMATION python

Trois dés équilibrés à six faces, numérotées de 1 à 6, sont lancés.

a. Déterminer la probabilité que la somme des faces obtenues soit égale à 3.

b. Calculer | On lance n fois les trois dés ; recopier et compléter ce programme en Python afin qu'il affiche le plus petit nombre entier n tel que la probabilité d'obtenir 3 comme somme des trois faces obtenues soit supérieure à 0,9.

```python
n=1
while ...:
    n=n+1
print(n)
```

Fichier Python
Ex. 87
Manuel numérique enseignant

87 Loi binomiale PROGRAMMATION python

Une urne contient sept boules cyan et une boule magenta.

1. On prélève trois boules avec remise.

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré. En déduire la loi de la variable aléatoire B, comptant le nombre de boules cyan tirées à l'issue des trois tirages.

b. Calculer l'espérance et l'écart type de B.

2. On prélève vingt boules avec remise.

a. Recopier et compléter la fonction en Python ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire S, comptant le nombre de boules cyan à l'issue des 20 tirages.

```python
import random
def simu():
    s=0
    for tirage in range(...):
        if random.randint(...)<=7:
            s=s+1
    return s
```

b. Utiliser cette fonction afin d'estimer $\mathrm{P}(S = 16)$, $\mathrm{P}(S < 10)$ et $\mathrm{E}(S)$.

88 Attente d'un « pile »

Une pièce équilibrée est lancée n fois.

a. Déterminer la probabilité d'obtenir n « pile ».

b. Calculer | En déduire la probabilité d'obtenir au moins un « face ».

c. ALGORITHMIQUE Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'après son exécution, la variable n contienne le plus petit nombre entier tel que la probabilité d'obtenir au moins un face » après n lancers soit supérieure à 0,999.

```
n ← 1
Tant que …
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

89 Loi géométrique tronquée Vers le BAC

1. Un sac contient cinq boules indiscernables au toucher : une jaune et quatre vertes.

Mathilde pioche une boule : si c'est la boule jaune, elle s'arrête là, sinon elle remet la boule tirée et pioche à nouveau ; elle réessaye deux fois au maximum.

a. Modéliser | On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Déterminer la probabilité qu'il faille au moins deux tirages pour obtenir une boule jaune.

c. Calculer et interpréter l'espérance de X.

2. Reprendre la question **1** avec le même sac dans lequel on a ajouté une boule jaune et une boule verte.

90 Loi particulière

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[\![1 ; 5]\!]$ telle que, pour tout $k \in [\![1 ; 4]\!]$, $\mathrm{P}(X = k + 1) = 0{,}6\mathrm{P}(X = k)$

(▶ Rabat I, Notations).

- Déterminer la loi de probabilité de X.

91 Approfondissement

X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	…	x_r
$\mathrm{P}(X = x_i)$	p_1	…	p_r

On pose $\phi(x) = p_1(x_1 - x)^2 + \ldots + p_3(x_3 - x))^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Prouver que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_i - x)^2 = 2(x - x_i)$.

Aide On veut montrer que la dérivée de $x \mapsto (x_i - x)^2$ est $x \mapsto 2(x - x_i)$.

b. Calculer | Prouver que $\phi'(x) = 2x - 2\mathrm{E}(X)$.

c. En déduire pour quelle valeur la fonction ϕ est minimale et reconnaître son minimum.

92

a. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, de loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,01	0,11	0,19	0,12	0,27	0,30

b. Approfondissement Déterminer la variance et l'écart type à l'aide de la formule de König-Huygens (▶ ex. 77 p. 335).

93 Création d'un jeu de grattage

Un jeu de grattage a les caractéristiques suivantes :

- un joueur paie 2 € pour un ticket ;
- un joueur peut ne rien gagner, récupérer sa mise ou gagner 10 ou 100 € ;
- un joueur a deux fois plus de chances de gagner 10 € que 100 € ;
- un ticket sur quatre permet de récupérer sa mise ou de rapporter un gain au joueur.

a. Chercher | On note $p = \mathrm{P}(X = 100)$.
Dresser la loi de X en fonction de p.

b. Calculer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de p.

c. Afin que le jeu couvre les frais d'émission et de gestion de l'entreprise, il faut que le gain moyen par ticket soit de 20 centimes. Déterminer alors la valeur de p.

94

Afin de financer un voyage scolaire, des professeurs organisent une tombola.

Un ticket sur cinq permet de remporter un lot. Le grand nombre de tickets mis en vente permet d'assimiler l'achat d'une dizaine de tickets à un tirage avec remise où la probabilité d'obtenir un ticket gagnant demeure de 0,2.

a. Les professeurs peuvent-ils annoncer qu'en achetant trois tickets, la probabilité d'avoir au moins un ticket gagnant est proche de 0,5 ?

b. Un parent d'élève achète quatre tickets. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

c. Les professeurs souhaitent réaliser un bénéfice de 700 € en vendant 1 000 tickets. L'organisation de la tombola a coûté 400 €. Quel prix devraient-ils proposer pour l'achat d'un ticket ?

95 Camille et Maxime disposent chacun d'une urne.
L'urne de Camille contient 5 jetons « gagné » et 15 jetons « perdu ».
L'urne de Maxime contient 1 jeton « gagné » et 9 jetons « perdu ».
Camille et Maxime misent 1 € avant de tirer un jeton dans leur urne.
Si Camille pioche un jeton « gagné », elle gagne x €.
Si Maxime pioche le jeton « gagné », il gagne z €.
On note C (respectivement M) la variable aléatoire associée au gain de Camille (respectivement de Maxime).

a. Déterminer x et z tels que les espérances de C et de M soient égales à 0.

b. Les écarts types de C et M sont-ils alors égaux ?

96 Loi des cumuls

a. La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0 ; 5]\!]$ est donnée par :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X \geqslant x_i)$	1	0,85	0,64	0,38	0,20	0,06

Déterminer, pour tout $k \in [\![0 ; 5]\!]$, $P(X = k)$.

Aide $[\![0 ; r]\!] = [0 ; r] \cap \mathbb{Z}$. ▶ Rabat I, Notations

b. Calculer | Pour une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0 ; r]\!]$, exprimer $P(X = k)$ en fonction de probabilités de la forme $P(X \geqslant j)$.

97 En attendant l'ascenseur

Dans la résidence Dupré, un immeuble de quatre étages, 10 personnes vivent au premier étage, 12 au deuxième, 10 au troisième et 11 au quatrième.
Un ascenseur permet aux résidents de naviguer entre le rez-de-chaussée et leur étage.
On supposera que :
- les seuls trajets effectués par un résident sont entre le rez-de-chaussée et son étage ;
- chaque résident utilise à la même fréquence l'ascenseur ;
- les portes de l'ascenseur mettent 1,5 seconde à s'ouvrir ou à se fermer ;
- le temps de trajet entre deux étages est de 4,5 secondes.

1. Modéliser | On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'étage où se situe l'ascenseur à un moment donné (le rez-de-chaussée correspondra à l'évènement $\{X = 0\}$). Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On note Y_1 le temps d'attente de l'ascenseur pour un résident du premier étage.

a. Exprimer Y_1 en fonction de X.
En déduire la loi de probabilité de Y_1.

b. Quel est le temps d'attente moyen de l'ascenseur pour un résident vivant au premier étage ?

3. Un résident du quatrième étage attend-il plus en moyenne l'ascenseur qu'un résident du premier étage ?

98 Vers le BAC

Voici les tarifs des desserts d'une brasserie :

Dessert	Tarif
Assortiment de macarons	8 €
Île flottante	4 €
Fondant au chocolat	6 €

La cheffe de cuisine estime que les choix des clients se répartissent de la manière suivante.

Assortiment de macarons	Île flottante	Fondant au chocolat
30 %	25 %	45 %

1. Pour un client de ce restaurant, X désigne la variable aléatoire égale au prix du dessert.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Déterminer et interpréter $E(X)$.

2. Pour un couple client de ce restaurant, Y désigne la variable aléatoire égale au montant total des desserts choisis. On suppose que les deux personnes font leur choix de manière indépendante.

a. Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Donner la loi de probabilité de Y.

c. Déterminer et interpréter $E(Y)$.

3. Ce restaurant sert en moyenne 30 couverts le midi.

a. Quel chiffre d'affaires réalise-t-il en moyenne pour la vente de desserts ?

b. Le gérant aimerait augmenter le montant total des ventes de desserts de 30 €. Il étudie deux options :
- A : augmenter chaque dessert de 1 € ;
- B : multiplier chacun des tarifs par 1,16.

Ces deux propositions sont-elles satisfaisantes ?

99 Pour des nombres réels y_1 ; y_2 ; … ; y_r strictement positifs, on pose $p_i = \dfrac{y_i}{\sum_{j=1}^{r} y_j}$.

- Justifier que le tableau ci-dessous définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	x_1	…	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	…	p_r

Fichier Python
Ex. 100
Manuel numérique enseignant

Physique-Chimie

100 Désintégration d'un atome ^{137}Cs PROGRAMMATION python

Le césium est un élément chimique comportant, sous forme stable, 55 protons et 78 neutrons. Néanmoins, à la suite d'essais et d'accidents nucléaires, du césium 137 (55 protons et 82 neutrons) est présent dans des quantités infimes dans divers lieux sur Terre. Le césium 137 est radioactif : inexorablement, chaque atome se désintègrera naturellement, et le moment de cette désintégration est assimilable à une expérience aléatoire.

Chaque année, un atome de césium 137 a une probabilité de 0,022 5 de se désintégrer ; on note A le nombre d'années nécessaires pour qu'il se désintègre. On choisit ici d'étudier au maximum n années cet atome et, par convention, $A = 0$ représentera un atome ne s'étant pas désintégré au bout des n années.

1. Dans cette question, $n = 3$ ans.
Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, puis calculer $P(A = 1)$ et la probabilité que l'atome mette moins de deux ans à se désintégrer.

2. Dans cette question, $n = 120$ ans.

a. Recopier et compléter le programme en Python ci-contre afin qu'il estime $P(A \leqslant 30)$, puis expliquer la phrase suivante : « le temps de demi-vie du césium 137 est de 30 ans ».

b. Estimer la probabilité qu'un atome de césium 137 ne soit pas désintégré au bout de 60 ans.

c. Estimer l'espérance de la variable aléatoire A à l'aide d'un programme en Python. Interpréter cette valeur.

```python
import random
def simu_137Cs():
    A=1
    while random.random()>... and A<=120:
        A=A+1
    if A>120:
        return 0
    return A

def estimation(n):
    s=0
    for exp in range(n):
        if 1<=simu_137Cs()<=...:
            s=s+1
    return ...
```

Fiche métier
Neutronicien·ne
hatier-clic.fr/ma1339a

SVT

101 Transmission d'un allèle et d'un caractère récessif

1. On s'intéresse à deux allèles d'un gène, notés A et a. L'allèle A est supposé dominant et l'allèle a récessif : les individus de génotype « AA » et « Aa » présentent l'expression dominante, et seul un individu de génotype « aa » présente l'expression récessive. Au moment de la gamétogénèse, chaque gamète a la même probabilité de recevoir l'un de ces deux allèles.
Deux individus de génotype « Aa » se reproduisent.

a. Quelle est la probabilité que leur descendant ait au moins un allèle « a » ?

b. Quelle est la probabilité que leur descendant présente l'expression récessive ?

L'allèle correspondant au caractère « cheveux roux » est récessif.

2. Les deux individus de génotype « Aa » ont quatre descendants, et on note R la variable aléatoire comptant le nombre de leurs descendants présentant l'expression récessive.

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Est-il vrai qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins un de leurs enfants présente l'expression récessive ?

c. Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire R.

Fiche métier
Généticien·ne
hatier-clic.fr/ma1339b

Fichier Python
Ex. 104 et 106
Manuel numérique enseignant

Recherches mathématiques

Questions ouvertes

102 Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Un joueur doit miser m euros pour jouer au jeu suivant :

- on lance une pièce équilibrée ;
- si elle donne « face » alors le joueur gagne 1 € ;
- si elle donne « pile » alors on relance la pièce. En cas de « face », le joueur gagne 2 €, sinon on relance la pièce, et ainsi de suite en doublant la mise à chaque lancer.

● Quel doit-être le montant m fixé afin que le jeu soit équilibré ?

Aide Effectuer les premiers calculs avec une série comprenant au plus n lancers.

103 Urne et parité

Une urne contient trois fois plus de jetons « 3 » que de jetons « 1 », trois fois plus de jetons « 2 » que de jetons « 4 » et deux fois plus de jetons « 2 » que de jetons « 3 ».

Un joueur prélève un jeton au hasard dans l'urne ; il gagne g euros si le jeton a un numéro impair, et il perd h euros si le jeton a un numéro pair.

● Quelles valeurs donner à g et h pour que l'espérance du gain vaille -1 et la variance 1 ?

Défis

104 Problème du collectionneur

PROGRAMMATION python

Une collection de cartes de jeux compte n cartes différentes. Un collectionneur commence sa collection ; il acquiert chaque jour une carte de la collection avec la même probabilité pour chacune des n cartes.

● Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire donnant le nombre de jours nécessaires pour compléter la collection. Estimer alors l'espérance de cette variable aléatoire.

```
import random
def completer(n):
    collection=[]
    jour=0
    for i in range(...):
        collection.append(0)
    while 0 in collection:
        alea=random.randint(...,...)
        collection[alea]=...
        jour=...
    return jour
```

105 Marche aléatoire : triangle

Une particule est positionnée aléatoirement sur l'un des sommets d'un triangle ABC. Elle peut rester sur ce sommet avec la probabilité $\frac{1}{3}$, ou bien se déplacer vers un autre sommet, avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où elle s'arrête sur le sommet A après trois mouvements.

● Déterminer la loi de probabilité de X.

En groupe

106 Marche aléatoire : ligne droite

PROGRAMMATION python

Une particule est positionnée sur le 0 de la droite graduée. Elle effectue quatre pas successifs : à chaque pas, elle a la possibilité d'avancer d'une unité (vers la droite) avec la probabilité p, sinon de reculer d'une unité (vers la gauche). On note X la variable aléatoire donnant le nombre sur lequel elle est arrêtée à l'issue des quatre pas.

1. a. Justifier que la particule ne peut s'arrêter que sur un nombre pair compris entre -4 et 4.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Aide Déterminer d'abord $P(X = \pm 4)$, puis $P(X = \pm 2)$.

2. On suppose que $p \in \{0{,}1 ; 0{,}25 ; 0{,}4 ; 0{,}5 ; 0{,}6 ; 0{,}75 ; 0{,}9\}$.
Observer l'évolution de l'espérance et de l'écart type avec ces différentes valeurs de p.

Partageons-nous les valeurs de p.
On pourrait estimer l'espérance et l'écart type en simulant la marche aléatoire à l'aide d'un programme en Python.

Algorithmique et programmation

Le langage Python tire son nom des « Monty Python », troupe d'humoristes anglais dont le créateur du langage, Guido van Rossum, était fan. L'environnement de développement IDLE (*Integrated DeveLopment Environment*), à la création duquel il a participé, tirerait en fait son nom d'une des plumes de ce groupe : Eric Idle, ici à gauche sur la photographie.

Itinéraire

PRENDRE UN BON DÉPART

- Test diagnostique
- Rappels et Réactivation
  - **Unité A** Variables et instructions conditionnelles
  - **Unité B** Boucles bornées et non bornées
  - **Unité C** Les fonctions

Doc+
Cours et Savoir-faire des unités A, B et C de 2de
hatier-clic.fr/ma1341

Unité D
Les listes

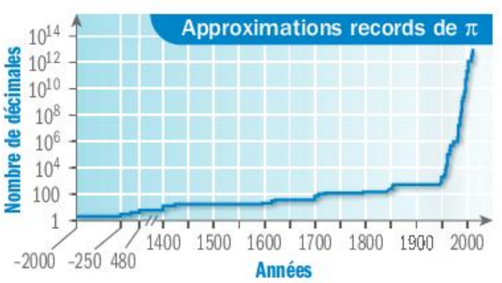
OBJECTIFS
- Lire les éléments d'une liste
- Parcourir les éléments d'une liste
- Compléter une liste

Programmer en python™ ▸ Rabat II

Une HISTOIRE de l'algorithmique

Au plus près de π

Le nombre π a toujours fasciné les mathématiciens. **Dès les premiers écrits, on trouve des traces de calculs d'approximations de π** et la volonté d'améliorer sans cesse la précision. Ainsi, pendant des millénaires, à travers le monde entier, de nombreux algorithmes ont été proposés par les mathématiciens. **Ce qui n'était d'abord qu'un exercice de virtuosité est devenu au milieu du XX^e^ siècle un outil important du développement de l'informatique.** En effet, le calcul des décimales de π est de nos jours l'un des moyens pour tester les performances et la fiabilité d'un processeur avant sa mise sur le marché.
Les derniers records et les temps de calcul nécessaires pour π et d'autres constantes (comme $\sqrt{2}$ par exemple) sont référencés sur le site www.numberworld.org/digits/.



▲ Supercalculateur Bullx (Toulouse, 2014).

1900 av. J.-C. - 1600 av. J.-C.

Babyloniens : $\pi \approx 3 + \frac{1}{8}$

Égyptiens : $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$

VI^e^ siècle avant J.-C.

Shatapatha Brahmana : $\pi \approx \frac{339}{108}$

III^e^ siècle avant J.-C.

Archimède : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$

II^e^ siècle

Ptolémée : $\pi \approx \frac{377}{120}$

V^e^ siècle

Zu Chongzhi : $\pi \approx \frac{355}{113}$

VI^e^ siècle

Aryabhata : $\pi \approx \frac{62\,832}{20\,000}$

XIV^e^ siècle

Madhava de Sangamagra calcule 13 décimales.

XV^e^ siècle

al-Kāshī calcule 17 décimales.

XVII^e^ siècle

- Ludolph van Ceulen calcule 35 décimales.
- Jurij Vega calcule 140 décimales.

XIX^e^ siècle

- William Rutherford calcule 208 décimales (les 152 premières sont correctes).
- William Shanks calcule 707 décimales (les 527 premières sont correctes).

Fin des calculs manuels ; entrée dans l'ère informatique.

XX^e^ siècle

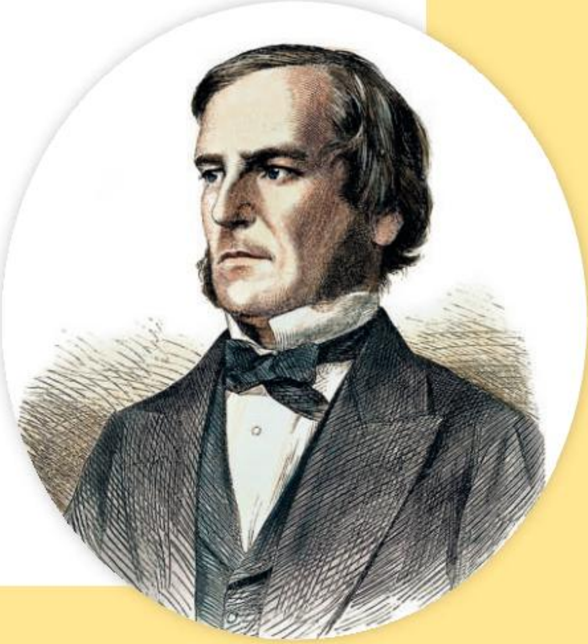
- Daniel Shanks calcule 100 000 décimales à l'aide d'un ordinateur.
- Les frères Chudnovsky calculent $4{,}8 \times 10^8$ décimales.
- Yasumasa Kanada calcule plus de 10^{11} décimales.

XXI^e^ siècle

- Fabrice Bellard calcule plus de 10^{12} décimales.
- Emma Haruka Iwao calcule plus de 3×10^{13} décimales.

Boole et la logique mathématique

George Boole (1815-1864) est un mathématicien anglais dont les travaux portent principalement sur la logique mathématique qu'il cherche à fonder indépendamment de la philosophie. Dans son ouvrage *An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854), **il présente une théorie mathématique binaire où 1 désigne une proposition toujours vraie et 0 une proposition fausse**. Cette approche (algèbre de Boole), d'abord théorique, trouve des applications dans de nombreux domaines comme l'informatique, les probabilités, les circuits téléphoniques, hydrauliques et pneumatiques, etc. **En informatique, les variables qui ne peuvent prendre que deux valeurs sont généralement qualifiées de booléennes** (▶ Unité A, p. 345).



Zoom sur...

▲ Margaret Hamilton à côté du code du logiciel de navigation du programme Apollo.

Margaret Hamilton

Embauchée en 1963 au laboratoire Draper, organisation américaine de recherche et développement au sein du MIT (Massachusetts Institute of Technology), Margaret Hamilton (1936-) travaille pour le département logiciel du programme Apollo de la NASA. Ses domaines d'expertise concernent, entre autres, le développement de logiciels, la programmation orientée objet, les méthodes de fiabilisation et les techniques de détection. Lors de l'alunissage d'Apollo 11, ce sont ces deux derniers aspects qui, en présence de problèmes techniques graves, ont permis d'éviter la saturation de l'ordinateur de bord.
Dans les années 1960, elle est l'une des rares femmes à travailler dans le domaine de l'informatique. Elle propose l'expression *software engineering* (génie logiciel) pour décrire ce nouveau métier dans lequel **elle pose les fondations de la conception et du développement informatique**.

PRENDRE UN BON DÉPART

Fichiers Python
Test diagnostique et exercices Réactivation
Manuel numérique enseignant

Test diagnostique

Lire

On considère le programme en Python ci-contre.

a. À quoi sert l'instruction de la ligne 1 ?
b. Combien ce programme comporte-t-il de variables ?
c. De quels types sont ces variables ?
d. Que signifie la ligne 2 ?
e. Combien de fois la tortue va-t-elle se déplacer ?
f. Si n prend la valeur 8, quelle est la valeur finale de d ?

```
1 import turtle
2 n=int(input("?"))
3 d=10.5
4 for c in range(n):
5     turtle.forward(d)
6     turtle.left(90)
7     d=d+5
```

Comprendre

Les deux situations ci-dessous font intervenir des dés à six faces numérotées de 1 à 6.

Situation 1	Situation 2
On lance un dé six fois. On compte le nombre de résultats pairs obtenus.	On lance deux dés jusqu'à ce que la somme des résultats obtenus soit inférieure à quatre. On compte le nombre de lancers effectués.

1. Associer à chacune de ces situations l'une des modélisations en Python ci-dessous.

a.
```
import random
cpt=0
n=6
p=6
while n+p>=4:
    n=random.randint(1,6)
    p=random.randint(1,6)
    cpt=cpt+1
```

b.
```
import random
cpt=0
n=random.randint(1,6)
for d in range(n):
    p=random.randint(1,6)
    if p<4:
        cpt=cpt+1
```

c.
```
import random
cpt=0
for n in range(6):
    p=random.randint(1,6)
    if p%2==0:
        cpt=cpt+1
```

2. Proposer une situation modélisée par le programme restant.

Compléter

1. Les fonctions *hypo* et *aire* en langage naturel ci-dessous prennent en paramètres les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle. La fonction *hypo* renvoie la longueur de son hypoténuse et la fonction *aire* utilise la fonction *hypo* pour renvoyer l'aire de ce triangle. Recopier et compléter ces fonctions.

```
Fonction hypo(AB, AC, BC)
    h ← AB
    Si … > … et … > …
        alors h ← …
    Fin Si
    Si … > … et … > …
        alors h ← …
    Fin Si
    Renvoyer h
Fin Fonction
```

```
Fonction aire(AB, AC, BC)
    a ← AB × AC ÷ 2
    h ← …
    Si AB = h
        alors a ← …
    Fin Si
    Si AC = h
        alors a ← …
    Fin Si
    Renvoyer a
Fin Fonction
```

2. On considère le programme en Python ci-contre.

a. Quelle est la valeur de `prima(8)` ? de `prima(11)` ? de `prima(17)` ? Que penser de `prima(1)` ?

b. Recopier et compléter la phrase suivante.

La .... `prima` prend en .... n, un nombre entier ($n >$ …), et renvoie un .... indiquant si n est .... ou non.

```
import math
def prima(n):
    d=2
    while d<math.sqrt(n):
        if n%d==0:
            return False
        d=d+1
    return True
```

UNITÉ A

Variables et instructions conditionnelles

Rappels

- Une **variable** est une référence à une « boîte » contenant une valeur. Elle possède un **nom** et généralement un **type**, imposé par la valeur qui lui est **affectée**.

En Python, les types rencontrés le plus souvent sont le nombre **entier**, le nombre **flottant** (équivalent du nombre décimal), la **chaîne de caractères** (un mot) et le **booléen** (Vrai ou Faux).

- Une **instruction conditionnelle** permet de **différencier l'exécution** d'un algorithme en fonction d'une condition. Si cette condition est vraie, elle entraîne un traitement. Dans le cas contraire, soit le programme se poursuit, soit un traitement alternatif est engagé.

Exemples

- « On affecte un nombre flottant entré par l'utilisateur à la variable B » se code en Python :

```
B=float(input("Un nombre ? :"))
```

- « On double la valeur de B et on lui ajoute 1 » se code en Python :

```
B=2*B+1
```

- Voici un exemple d'instruction conditionnelle :

En langage naturel	En Python

Si $n > 3$
alors $n \leftarrow n - 1$
sinon $n \leftarrow n + 2$
Fin Si
	`if n>3:`
	`    n=n-1`
	`else:`
	`    n=n+2`

Réactivation

Corrigés p. 368

1 Voici un programme en Python :

```
x=int(input("Entrer un nombre :"))
r=x+1
r=r*r-x
```

a. Quel est le type de la variable x ?

b. Quelle est la valeur de la variable r si x vaut –2 ?

c. Affecter à une variable y le booléen True si r est égale à 13 et le booléen False sinon.

d. Pour quelles valeurs de x la variable y vaut-elle True ?

2 Écrire un programme en Python qui demande d'entrer quatre nombres entiers a, b, c et d (b et d non nuls), puis qui affiche la somme des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

3 Les prix d'un traiteur dépendent du nombre de convives. Pour moins de 50 personnes, la part coûte 13 €. À partir de la 51^{e} personne, la part coûte 2 € de moins.

Au-delà de 100 personnes, une réduction de 15 % est appliquée sur le total.

a. Vérifier qu'un repas pour 120 personnes coûte 1 207 € et qu'un repas pour 79 personnes coûte 969 €.

b. Écrire un programme en Python qui demande le nombre de convives et qui calcule le coût total du repas.

4 Voici un programme en langage naturel, dans lequel a, b, c et d sont quatre nombres entiers, coefficients de l'équation $ax + b = cx + d$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.

- Recopier et compléter ce programme pour qu'il affiche la solution (si elle existe) de cette équation.

$e \leftarrow a - c$
$f \leftarrow d - b$
Si $e = 0$
    alors **Si** $f \neq 0$
        alors afficher …
        sinon afficher …
    Fin Si
    sinon afficher …
Fin Si

5 Écrire un programme en langage naturel qui indique si un triangle est constructible en fonction des longueurs a, b et c de ses côtés.

6 La formule de Creff permet de calculer son « poids idéal » approximatif P (en kg) en fonction de sa taille T (en cm), son âge A et sa morphologie :

$$P = 0{,}9k \times (T - 100 + A \div 10)$$

où :
- $k = 1$ pour une morphologie « normale » ;
- $k = 1{,}1$ pour une morphologie « large » ;
- $k = 0{,}9$ pour une morphologie « gracile ».

- Écrire un programme en Python qui calcule le poids idéal d'un utilisateur en fonction des informations entrées.

UNITÉ B

Boucles bornées et non bornées

Rappels

- Une **boucle bornée** permet la **répétition** d'une séquence d'instructions un nombre **fini** de fois. Chaque **itération** (répétition de la séquence) est comptabilisée grâce à une variable appelée **indice**. Cet indice varie entre **deux bornes**, un **pas** lui étant ajouté à chaque itération.
- Une **boucle non bornée** (ou conditionnelle) est la **répétition** d'une séquence d'instructions, soumise à une **condition**. Tant que cette condition est vérifiée, la séquence est répétée.

Exemples

- Le programme en Python suivant affiche 0 ; 1 ; 2 et 3.

```python
for i in range(4):
    print(i)
```

- Le programme en Python suivant affiche 2 ; 4 ; 6 et 8.

```python
for i in range(2,10,2):
    print(i)
```

⚠ En Python, dans la fonction `range` :
– la borne supérieure est exclue ;
– par défaut, la borne inférieure vaut 0 et le pas vaut 1.

- Le programme en Python suivant **incrémente** (augmente) la variable x de 0,1 tant que x^3 est inférieur à 100.

```python
x=0
while x**3<100:
    x=x+0.1
```

Réactivation

Corrigés p. 368

7 À quoi sert le programme en Python ci-dessous ?

```python
import math
n=int(input("Entrez un entier n>0"))
d=1
while d<=math.sqrt(n):
    if n%d==0:
        print(d)
        print(n/d)
    d=d+1
```

8 Chaque année, une banque augmente de 1,8 % les capitaux placés sur ses comptes. Après l'augmentation du capital, elle prélève sur chaque compte 30 € annuels de frais.

a. Quel capital aura-t-on au bout de quatre ans en plaçant 2 000 € dans cette banque ?

b. Recopier et compléter le programme en langage naturel ci-dessous calculant le capital final (arrondi au centime) en fonction de la somme placée s et du nombre d'années écoulées n, saisis par l'utilisateur.

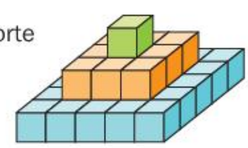
```
Pour annee allant de … à … exclu
    s ← … × … − …
Fin Pour
s ← l'arrondi de s à 10^-2
```

c. Coder ce programme en Python.

9 Un robinet fuit dans une baignoire de 500 L. Initialement de 0,05 mL par seconde, la fuite augmente de 20 % toutes les minutes.

- Écrire un programme en Python qui calcule le temps écoulé jusqu'au débordement de la baignoire.

10 **a.** Combien de cubes comporte cette pyramide de trois étages ?



b. Recopier et compléter ce programme en Python pour qu'il calcule le nombre d'étages de la pyramide la plus haute que l'on peut construire avec 10 000 cubes.

```python
cube=10000
etage=0
cote=1
while ...>=...:
    etage=...
    cube=...
    cote=...
etage=...
```

11 On lance une pièce équilibrée. Si on obtient face, on jette un dé à six faces numérotées de 1 à 6 ; sinon, on jette un dé à 10 faces numérotées de 1 à 10.

- Modéliser cette expérience aléatoire en Python, puis la simuler 10 000 fois pour obtenir expérimentalement la probabilité d'obtenir une face numérotée 5.

UNITÉ C

Les fonctions

Rappels

- Une **fonction** est une séquence d'instructions, isolée du programme principal, qui n'est exécutée que quand elle est appelée. Elle peut admettre en entrée un ou plusieurs **paramètres**. Elle **renvoie** généralement une valeur (ou une liste de plusieurs valeurs).
- Quand une fonction renvoie une valeur, elle le fait de façon exclusive : son déroulé est stoppé et plus aucune instruction de la fonction n'est évaluée.

Exemples

Ces deux fonctions en Python renvoient la même chose.

- Cette fonction affecte une variable p en fonction de la parité de n, puis renvoie la valeur de p.

```python
def syracuse(n):
    if n%2==0:
        p=n/2
    else:
        p=3*n+1
    return p
```

- Si n est pair, alors cette fonction renvoie $n \div 2$ et s'arrête. Dans le cas contraire, la séquence d'instructions se poursuit et la fonction renvoie $3n + 1$.

```python
def syracuse(n):
    if n%2==0:
        return n/2
    return 3*n+1
```

Réactivation

Corrigés p. 368

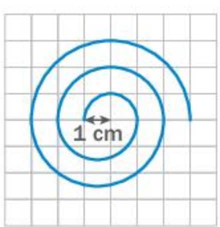
12 Voici un programme en Python (avec $r > 0$) :

```python
import math
def Interieur(x,y,r):
    if math.sqrt(x**2+y**2)<r:
        return True
    return False
```

a. Quelle est la valeur de `Interieur(1,2,3)` ?

b. À quoi sert la fonction `Interieur` ?

13 Cette spirale est constituée de demi-cercles, dont le plus petit rayon mesure 1 cm.



a. Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui prend en paramètre le nombre de demi-cercles et qui renvoie la longueur de la spirale.

```
Fonction spirale(n)
    L ← ...
    r ← ...
    Pour s allant de ... à ...
        L ← ...
        r ← ...
    Fin Pour
    Renvoyer L
Fin Fonction
```

b. Coder cette fonction en Python et vérifier que `spirale(6)` vaut environ 42,4 cm.

c. Écrire un programme utilisant cette fonction pour calculer le nombre de demi-cercles nécessaires à la réalisation d'une telle spirale à l'aide d'une ficelle de 10 m.

14 Le plan étant muni d'un repère orthonormé, la fonction `droite` renvoie les coefficients d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite passant par les points de coordonnées entières $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$.

a. Recopier et compléter cette fonction.

```python
def droite(x1,y1,x2,y2):
    a=...
    b=...
    c=...
    return [a,b,c]
```

b. On a commencé à écrire une fonction `alignement` qui renvoie un booléen indiquant si les points de coordonnées entières $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ et $(x_3 ; y_3)$ sont alignés ou non. Recopier et terminer l'écriture de cette fonction.

```python
def alignement(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    a,b,c=droite(x1,y1,x2,y2)
    ...
```

15 Le plan étant muni d'un repère orthonormé, écrire une fonction en Python renvoyant un booléen indiquant si les vecteurs de coordonnées entières $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ou non.

16 **En groupe** Écrire une fonction en Python prenant en paramètres quatre nombres a, b, c et d, et renvoyant l'ensemble $[a ; b] \cap [c ; d]$.

Aide Il faudra traiter tous les cas : intervalle, ensemble vide, etc.

UNITÉ D

Les listes

Fichiers Python
Activités, exercices, projets
Manuel numérique enseignant

OBJECTIF 1
Lire les éléments d'une liste

1 Liste et géométrie

1. La fonction `triangle` incomplète ci-dessous utilise le module `Turtle` pour tracer un triangle dont les trois sommets ont pour coordonnées $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ et $(x_3 ; y_3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

```
1  import turtle
2  def triangle(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
3      turtle.up()
4      turtle.goto(...,...)
5      turtle.down()
6      turtle.goto(...,...)
7      turtle.goto(...,...)
8      turtle.goto(...,...)
9      turtle.up()
10
11 triangle(250,200,-250,200,0,-150)
```

Aide
- `turtle.up()` relève le crayon.
- `turtle.goto(x,y)` déplace le crayon aux coordonnées $(x ; y)$.
- `turtle.down()` pose le crayon.

a. Recopier cette fonction dans un fichier Python en complétant les lignes 4, 6, 7 et 8, puis exécuter le programme afin d'obtenir la figure ci-contre.

b. La fonction `triangle` comporte beaucoup de paramètres, et son appel n'est pas facile. Pour faciliter sa compréhension, on peut stocker les coordonnées de chaque sommet dans une **liste**.
Dans le programme précédent et avant l'appel de la fonction, créer trois variables `M`, `N` et `P` et leur affecter les coordonnées des trois sommets du triangle tracé à la question **a** sous la forme de trois listes.

Aide En Python, une **liste** `L` est une énumération ordonnée d'éléments, écrits entre crochets et séparés par une virgule.
L'indice du premier élément de `L` est 0 et le $n^{\text{ième}}$ élément de `L` se note `L[n-1]`.
Par exemple, si `L=[250,200]`, alors le premier élément est `L[0]=250` et le deuxième est `L[1]=200`.

c. Adapter la fonction `triangle` pour qu'elle prenne à présent comme paramètres trois listes `A`, `B` et `C` contenant les coordonnées des trois sommets d'un triangle.

d. Remplacer l'appel `triangle(250,200,-250,200,0,-150)` par `triangle(M,N,P)`, puis exécuter le programme.

2. a. Compléter les lignes 2 et 3 de la fonction `milieu` ci-dessous, dont les paramètres `A` et `B` sont deux listes contenant les coordonnées des extrémités d'un segment et qui renvoie les coordonnées du milieu de ce segment. Ajouter ensuite cette fonction au programme de la question **1**.

```
1  def milieu(A,B):
2      xM=...
3      yM=...
4      return [xM,yM]
```

Aide Si M est le milieu du segment [AB] avec $A(x_1 ; y_1)$ et $B(x_2 ; y_2)$ alors $M\left(\frac{x_1+x_2}{2} ; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

b. En utilisant les fonctions `triangle` et `milieu`, compléter le programme pour obtenir la figure ci-contre.

Aide On pourra stocker les coordonnées des milieux des côtés du premier triangle dans des listes nommées `M1`, `M2` et `M3`.

c. Défi

Modifier le programme à l'aide d'une boucle pour obtenir la figure ci-contre.

OBJECTIF 2
Parcourir les éléments d'une liste

2 Liste et série statistique

1. a. Compléter les lignes 4, 5 et 8 de la fonction en langage naturel MAX, qui renvoie le plus grand élément d'une liste de nombres L entrée en paramètre.

```
1  Fonction MAX(L)
2      m ← L[0]
3      Pour chaque élément e de la liste L
4          Si e > ... alors
5              m ← ...
6          Fin Si
7      Fin Pour
8      Renvoyer ...
9  Fin Fonction
```

Dans cette boucle finie, e n'est pas un indice mais un élément de la liste.

b. Coder cette fonction en Python, puis la tester sur la liste `S=[-5.1,2.1,3,0.8]`.

Aide
Pour parcourir les éléments e d'une liste L, on utilise la boucle :
`for e in L:`

2. a. Coder en Python une fonction `MIN` qui renvoie le plus petit élément d'une liste de nombres entrée en paramètre, puis la tester sur la liste `S`.

b. À l'aide des fonctions `MAX` et `MIN`, coder une fonction `Etendue` qui renvoie l'étendue d'une série statistique entrée en paramètre sous la forme d'une liste de nombres, puis la tester sur la liste `S`.

OBJECTIF 3
Compléter une liste

3 Liste et simulation

Dans le cadre d'un jeu, on lance cinq fois successivement un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si les résultats de deux lancers consécutifs sont égaux, alors c'est une victoire. Dans les autres cas, c'est un échec.

1. a. La fonction `jet` renvoie une liste de cinq lancers de dés.
Donner le nombre de victoires obtenues quand les cinq lancers donnent chacune des listes suivantes.

`[1,1,2,5,6]` `[1,3,3,2,2]` `[2,1,2,1,5]` `[1,2,2,2,6]` `[1,1,1,2,2]`

b. On a codé en Python la fonction `jet` qui renvoie la variable *resultat*, liste initialement vide dans laquelle on stocke les résultats des cinq lancers du dé. Recopier et compléter les lignes 4 à 6.

```
1  import random
2  def jet():
3      resultat=[]
4      for i in range(...):
5          resultat.append(...)
6      return ...
```

Aide
- `random.randint(a,b)` renvoie un nombre entier aléatoire compris entre a et b inclus.
- `resultat.append` ajoute un élément à la fin de la liste `resultat`.

2. La fonction `victoire` prend en paramètre une liste `L` de cinq lancers de dés et renvoie le nombre de victoires obtenues suite à ces cinq lancers. Recopier et compléter les lignes 2 à 5.

```
1  def victoire(L):
2      n_victoire=...
3      for i in range(0,...):
4          if L[...]==L[...]:
5              ...
6      return n_victoire
```

Dans cette boucle finie, `i` est un nombre entier, indice de l'élément de la liste `L` que l'on souhaite observer. Attention à ne pas aller au-delà du dernier élément de `L` !

Cours

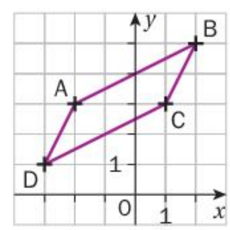
D.1 Lire les éléments d'une liste

▸ Une **liste** est un **ensemble fini et ordonné d'éléments**.
Ces éléments, énumérés entre crochets et séparés par une virgule, peuvent être de tout type (nombre entier, flottant, chaîne de caractères, etc.) ou faire référence à une variable.
▸ La **longueur d'une liste** est le nombre d'éléments qu'elle contient.
▸ L'**indice** du premier élément est 0 et l'indice du dernier élément est $n - 1$ où n est la longueur de la liste.
Le $i^{\text{ème}}$ élément de la liste L se note $L[i - 1]$, pour i nombre entier compris entre 1 et n.

Exemple Soit `L=[1,"deux",3.1,x]`.
La longueur de la liste `L` est 4.
`L[0]` vaut 1 ; `L[1]` vaut "deux" ; `L[2]` vaut 3,1 ; `L[3]` est la valeur de la variable x.

Savoir-faire Lire les éléments d'une liste

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
a. Coder en Python une fonction `parallelogramme` dont les paramètres `M`, `N`, `P` et `Q` sont des listes contenant les coordonnées entières des sommets du quadrilatère MNPQ, et qui renvoie une valeur booléenne indiquant si ce quadrilatère est un parallélogramme ou non.
b. Affecter à quatre variables `A`, `B`, `C` et `D` les listes contenant les coordonnées des sommets du quadrilatère ABCD ci-contre, puis vérifier que ABCD est bien un parallélogramme en appelant la fonction `parallelogramme(A,B,C,D)`.



Solution

a.

```python
def parallelogramme(M,N,P,Q):
    U=[N[0]-M[0],N[1]-M[1]]
    V=[P[0]-Q[0],P[1]-Q[1]]
    if U[0]==V[0] and U[1]==V[1]:
        return True
    else:
        return False
```

La variable U contient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$.
La variable V contient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{QP}$.

`M[0]` est le premier élément de la liste `M`. Il s'agit donc de l'abscisse du premier point. `M[1]` est l'ordonnée de ce point.

Si les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont égales, alors MNPQ est un parallélogramme.
Pour comparer deux listes, il faut comparer leurs éléments deux à deux.

b. Après exécution du programme, on écrit dans la console :

```
>>> A=[-2,3]
>>> B=[2,5]
>>> C=[1,3]
>>> D=[-3,1]
>>> parallelogramme(A,B,C,D)
True
>>>
```

Application Corrigés p. 368

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
a. Programmer en Python une fonction `rectangle` dont les paramètres `M`, `N`, `P` et `Q` sont des listes contenant les coordonnées entières des sommets du quadrilatère MNPQ, et qui renvoie une valeur booléenne indiquant si ce quadrilatère est un rectangle.

Aide On pourra réutiliser la fonction `parallelogramme`, puis calculer MP^2 et NQ^2 pour comparer les longueurs des diagonales de MNPQ.

b. Vérifier que le quadrilatère ABCD tel que A(–1 ; 4), B(1 ; 0), C(–1 ; –1) et D(–3 ; 3) est un rectangle.

Exercices 20, 21, 22 et 24 p. 353

D.2 Parcourir les éléments d'une liste

Pour parcourir une liste L de longueur n à l'aide d'une boucle finie, on peut faire varier :

- l'élément considéré ;

Langage naturel

Pour chaque élément e de la liste L
    Afficher l'élément e
Fin Pour

python™

```
for e in L:
    print(e)
```

- l'indice de l'élément considéré.

Langage naturel

Pour i allant de 0 à n exclu
    Afficher l'élément $L[i]$
Fin Pour

Rappel
L'indice du premier élément est 0 et celui du dernier est $n - 1$.

python™

```
for i in range(0,n):
    print(L[i])
```

Savoir-faire Parcourir les éléments d'une liste

a. Écrire en langage naturel une fonction *moyenne* prenant en paramètre une liste de nombres L et renvoyant la moyenne arithmétique de ses éléments.

b. Coder cette fonction en Python, puis la tester sur la liste `S=[3,1.6,-2,10.1,5.3]`.

Solution

a. *somme* est une variable contenant la somme de tous les éléments de L.

Fonction moyenne(L)
    somme ← 0
    Pour chaque élément e de la liste L
        somme ← *somme* + e
    Fin Pour
    Renvoyer *somme* ÷ longueur de L
Fin Fonction

ou

Fonction moyenne(L)
    n ← longueur de L
    somme ← 0
    Pour i allant de 0 à n exclu
        somme ← *somme* + $L[i]$
    Fin Pour
    Renvoyer *somme* ÷ n
Fin Fonction

e est une variable désignant successivement chaque élément de L.

i est un nombre entier variant de 0 (indice du premier élément) à $n - 1$ (indice du dernier élément).

b.

```
def moyenne(L):
    somme=0
    for e in L:
        somme=somme+e
    return somme/len(L)
```

ou

```
def moyenne(L):
    n=len(L)
    somme=0
    for i in range(0,n):
        somme=somme+L[i]
    return somme/n
```

En Python, `len(L)` renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`.

On appelle la fonction dans la console :

```
>>> moyenne([3,1.6,-2,10.1,5.3])
3.6
>>>
```

Application

Corrigés p. 368

18 **a.** Écrire en langage naturel une fonction *compter* de paramètres L, a et b renvoyant le nombre d'éléments de la liste L compris entre les nombres a et b inclus ($a < b$).

b. Coder cette fonction en Python.

c. Dans la console, affecter à la variable `S` la liste `[1,-2,3,-2,12,4,0,6,-6,1,2]` et appeler `compter(S,-2,1)`.

Exercices 23 et 25 p. 353

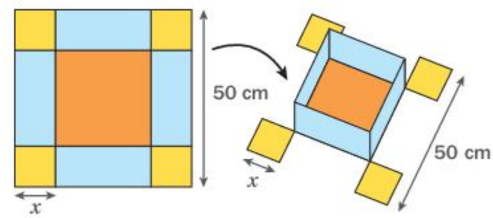
D.3 Compléter une liste

Pour modifier une liste L, on peut :
- remplacer un élément d'indice donné ;
- ajouter un élément à la fin de cette liste.

Exemples python
- On remplace le premier élément de L par 5 : `L[0]=5`
- On ajoute 5 à la fin de la liste L : `L.append(5)`

Savoir-faire Compléter une liste

Sur une feuille carrée de côté 50 cm, on construit le patron d'une boîte sans couvercle en retirant 4 carrés de côté x cm.



a. Exprimer le volume $V(x)$ de cette boîte en fonction de x.

b. Coder en Python une fonction `Boite` de paramètres a, b et p, dressant une liste des valeurs $V(x)$ quand x parcourt l'intervalle $[a\ ;\ b]$ avec un pas p, puis représentant graphiquement V.

c. Émettre une conjecture sur un encadrement à 0,1 cm près de la valeur de x pour laquelle ce volume est maximal.

Solution

a. Le pavé droit correspondant à cette boîte a pour hauteur x et pour base un carré dont le côté mesure $50 - 2x$. Donc $V(x) = x(50 - 2x)^2$.

b. Dans la fonction `Boite`, la variable x vaut initialement a et les listes `cote` et `volume` contiendront respectivement les valeurs de x variant dans $[a\ ;\ b]$ avec un pas p et les volumes correspondants $V(x)$.

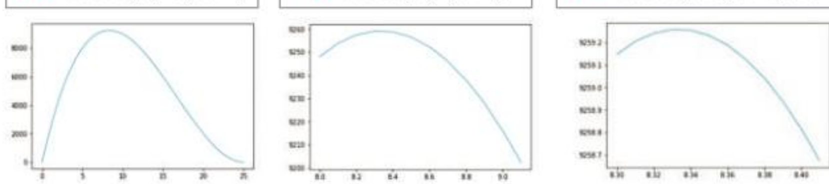
```python
import matplotlib.pyplot as graph
def Boite(a,b,p):
    x=a
    cote=[]
    volume=[]
    while x<b+p:
        cote.append(x)
        volume.append(x*(50-2*x)**2)
        x=x+p
    graph.plot(cote,volume,linewidth=1)
    graph.show()
```

On importe le module `pyplot` en utilisant un alias (`graph`) afin de ne pas recopier le chemin complet du module à chacune de ses utilisations.

On ajoute x à la liste `cote`, $V(x)$ à la liste `volume`, puis on ajoute p à x.
On recommence tant que x est inférieur à $b + p$.

`plot(X,Y,linewidth=1)` trace la ligne polygonale d'épaisseur 1 dont les coordonnées de ses points sont données par les listes `X` (pour leurs abscisses) et `Y` (pour leurs ordonnées respectives).
`show()` affiche cette représentation dans une nouvelle fenêtre.

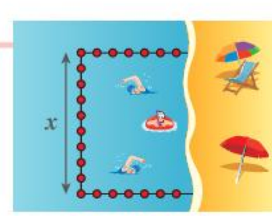
c. `>>> Boite(0,25,0.1)` `>>> Boite(8,9,0.1)` `>>> Boite(8.3,8.4,0.01)`



On peut conjecturer que le volume maximal est atteint sur l'intervalle [8,3 ; 8,4].

Application Corrigés p. 368

19 Un maître-nageur dispose d'une ligne d'eau de 75 m avec laquelle il souhaite délimiter une zone de baignade rectangulaire d'aire maximale.



a. Exprimer l'aire $A(x)$ de ce rectangle en fonction de sa longueur x.

b. Coder en Python une fonction `Zone` de paramètres a, b et p, dressant une liste des valeurs que prend la fonction A quand x parcourt l'intervalle $[a\ ;\ b]$ avec un pas p, puis représentant graphiquement A.

c. Émettre une conjecture sur un encadrement à 10 cm près de la valeur recherchée.

Exercice 26 p. 353

20 La fonction en Python `losange` prend en paramètres quatre listes contenant les coordonnées entières des points M, N, P et Q du plan muni d'un repère orthonormé. Elle renvoie un booléen indiquant si le quadrilatère MNPQ est un losange.

a. Recopier et compléter les lignes 3, 4, 5, 6 et 9.

```
1 def losange(M,N,P,Q):
2     c1=(N[0]-M[0])**2+(N[1]-M[1])**2
3     c2=...
4     c3=...
5     c4=...
6     if c1==c2 and c2==c3 and ... and ...:
7         return True
8     else:
9         return ...
```

b. En utilisant cette fonction dans un programme, vérifier que le quadrilatère ABCD dont les sommets ont pour coordonnées A(3 ; 4), B(0 ; 3), C(–1 ; 0) et D(2 ; 1) est un losange.

21 **a.** Coder en Python une fonction `parallelogramme` qui prend en paramètres trois listes contenant les coordonnées entières des points A, B et C du plan muni d'un repère orthonormé, et qui renvoie les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme.

b. On considère trois points de coordonnées respectives (12 ; 1), (–5 ; 6) et (7 ; 5). À l'aide de la fonction précédente, donner toutes les coordonnées possibles du quatrième point formant un parallélogramme.

22 **a.** Que fait la fonction *mystere* écrite ci-dessous en langage naturel, appliquée à la liste de nombres [2 , 3 , 2 , 10 , 1 , 6 , 8] ?

```
Fonction mystere de paramètre une liste L
    Pour i allant de longueur de L – 1 à 0 exclu
        Pour j allant de 0 à i exclu
            Si L[j] > L[j + 1] alors
                temp ← L[j]
                L[j] ← L[j + 1]
                L[j + 1] ← temp
            Fin Si
        Fin Pour
    Fin Pour
Fin Fonction
```

b. Coder cette fonction en Python.

23 **a.** Coder en Python une fonction `div` de paramètres n et L qui renvoie un booléen indiquant si le nombre entier n est un diviseur commun des nombres de la liste L.

b. En utilisant la fonction `div`, coder une fonction `div_commun` de paramètre L qui renvoie la liste des diviseurs communs des nombres entiers de la liste L.

c. Les longueur, largeur et hauteur d'un pavé droit sont respectivement 42 cm, 29,4 cm et 34,32 cm. On souhaite remplir ce pavé droit de cubes identiques dont l'arête a une longueur entière en millimètres.
Quel est le nombre minimum de cubes nécessaires ?

24 **1.** Donner une valeur de la médiane de chacune des listes de nombres suivantes.

a. $L = [5 , 2 , 3 , 3 , 10 , 6 , 9]$

b. $S = [6 , 2 , 4 , 7 , 2 , 3 , 5 , 6]$

2. Coder en Python une fonction `mediane` prenant en paramètre une liste de nombres et renvoyant une valeur de sa médiane.

Aide
- `L.sort()` range la liste L dans l'ordre croissant.
- `x//2` et `x%2` sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de x par 2.

3. Coder en Python une fonction `quartiles` prenant en paramètre une liste de nombres et renvoyant une liste contenant son premier et son troisième quartile.

25 Arnaud a programmé une fonction en Python qui prend en paramètres une liste de nombres L et deux nombres n et p, et qui renvoie le nombre d'éléments de L appartenant à l'intervalle $[n - p ; n + p]$:

```
def compter(L,n,p):
    for e in L:
        if abs(p-e)<n:
            total=total+1
            return total
```

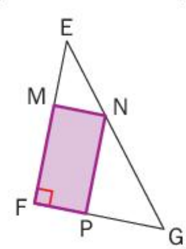
Il a cependant commis quelques erreurs et oublis.

a. Corriger le programme d'Arnaud.

b. Exécuter cette fonction dans Python avec les paramètres suivants :

$$n = 9,\ \ p = 3\ \text{ et }$$
$$L = [1 , 5 , 3 , 10 , 12 , 15 , 11 , 8 , 7 , 6 , 4 , 7].$$

26 **Modéliser** | EFG est un triangle rectangle en F, avec EF = 5 cm et FG = 4 cm.
À partir d'un point M quelconque appartenant à [EF], on trace le rectangle MNPF où N ∈ [EG] et P ∈ [FG].

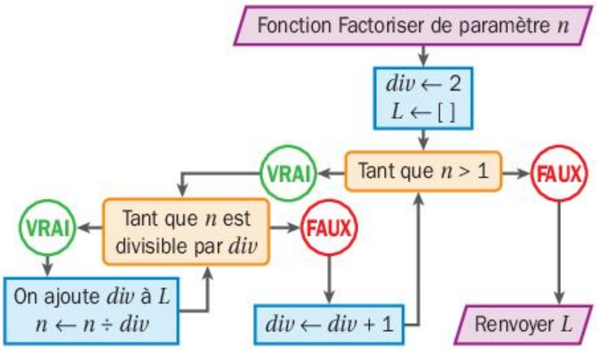


a. Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle MNPF en fonction de x = EM.

b. Coder en Python une fonction `Aire` de paramètres a, b et p, dressant une liste des valeurs que prend la fonction A quand x parcourt l'intervalle $[a ; b]$ avec un pas p, puis traçant une représentation graphique de la fonction A à l'aide de cette liste.

c. À l'aide de la fonction `Aire`, émettre une conjecture sur la valeur de EM pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.

27 Dans l'algorigramme suivant, n et div sont des nombres entiers, et L est une liste initialement vide.



a. Que renvoie Factoriser(468) ?

b. Coder la fonction `Factoriser` en Python.

c. Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie la décomposition de n en produits de facteurs premiers comme dans l'exemple ci-dessous.

```
>>> Factoriser(29700)
['2^2', '3^3', '5^2', '11']
```

Aide

- `str(x)` convertit `x` en chaîne de caractères.
- `c1+c2` concatène (regroupe) les chaînes `c1` et `c2` en une même chaîne.

28 La méthode la plus naturelle pour classer des nombres dans l'ordre décroissant consiste à isoler le plus grand de ces nombres, puis à recommencer avec les nombres restants, en les plaçant à la droite du nombre précédemment extrait. Tant qu'il reste des nombres dans la liste initiale, on continue.

a. Compléter la fonction en Python `ranger` ci-dessous qui prend en paramètres deux listes :

– la première, nommée `L`, contient les nombres à ranger dans l'ordre décroissant ;

– la seconde, nommée `R`, est initialement vide et contiendra le résultat de ce classement.

```python
def ranger(L,R):
    m=max(L)
    ....remove(m)
    ....append(m)
    if ...>0:
        return ranger(L,R)
    else:
        return ...
```

Aide

- `max(L)` renvoie la plus grande valeur de `L`.
- La fonction `ranger` est une fonction **récursive** : elle s'appelle elle-même tant que la condition d'arrêt de l'algorithme n'est pas vérifiée.

b. Défi

Réécrire la fonction `ranger` pour qu'elle ne soit plus récursive, en utilisant une boucle conditionnelle.

29 **1.** Que contient la liste `L` créée par le programme en Python suivant ?

```python
L=[]
for i in range(0,10):
    if i%3==0:
        L.append(i/10)
```

Info

La liste `L` peut être créée **en compréhension** :

`L=[i/10 for i in range(0,10) if i%3==0]`

qui peut se lire comme la liste `L` dont les éléments sont de la forme `i/10` avec `i` appartenant à $[\![0\ ;\ 9]\!]$, `i` étant divisible par 3.

2. En utilisant la syntaxe des listes en compréhension, créer :

a. la liste des nombres entiers naturels impairs inférieurs à 1 000 ;

b. la liste des nombres entiers relatifs multiples de 5 et compris entre –200 et 200 inclus.

3. Décrire par une phrase chacune des listes suivantes.

a. `H=[i for i in range(-100,101) if abs(i)>95]`

b. `M=[3*i for i in range(30,40) if i%2==0]`

c. `R=[i/100 for i in range(0,101) if i%5==0]`

d. `N=[i/2 for i in H]`

e. `P=[i for i in M if i in H]`

4. Donner les éléments des listes créées à la question **2**.

5. Créer chaque liste de la question **2** à partir d'une liste vide, à l'aide d'une boucle et de la fonction `append`.

30 Le programme en Python ci-dessous charge un texte dans une chaîne `ch`, transforme ses majuscules en minuscules, puis transforme cette chaîne en une liste `L` dont chaque élément est un caractère (lettre, espace, signe de ponctuation, etc.).

```python
fichier=open("montexte.txt","r")
ch=fichier.read()
ch=ch.lower()
L=list(ch)
```

a. Compléter ce programme avec une fonction `frequence` qui prend en paramètre la liste `L` et renvoie les fréquences d'apparition des lettres « a » à « z » dans cette liste. On ignorera tous les autres caractères dans le calcul de ces fréquences.

b. Le tableau ci-dessous indique les fréquences d'apparition des lettres « a » et « h » en français, portugais et néerlandais.

	Français	Portugais	Néerlandais
« a »	7,5 %	14,6 %	7,4 %
« h »	0,7 %	0,7 %	2,3 %

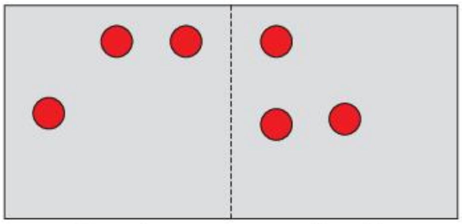
Écrire une fonction `analyse` qui prend en paramètre une liste de caractères et renvoie la langue probable dans laquelle a été écrit le texte correspondant.

c. Tester cette fonction sur un texte de longueur suffisamment significative.

Vidéos et fiches
Projets 1 et 2
Manuel numérique enseignant

Projet 1 Les urnes d'Ehrenfest

Une urne A contenant n particules est adjacente à une urne B vide. La paroi les séparant étant poreuse, une particule choisie aléatoirement passe chaque seconde d'une urne à l'autre.
Nous allons modéliser cette expérience en Python et **conjecturer le temps moyen nécessaire pour retrouver l'état initial des urnes**, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que les n particules reviennent toutes dans l'urne A.



Pour décrire la répartition des particules, on utilise une liste *urnes* dont le premier élément contient le nombre de particules dans l'urne A et le second élément le nombre de particules dans l'urne B. Par exemple, la liste [3 , 2] signifie qu'il y a 3 particules dans l'urne A et 2 dans l'urne B.

a. Écrire en Python une fonction `transfert` de paramètre *urnes* qui simule un transfert d'une particule choisie aléatoirement en modifiant la composition de la liste *urnes*.

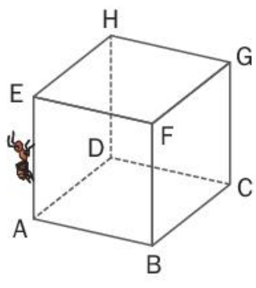
b. Écrire en Python une fonction `temps_retour` de paramètre *urnes* qui effectue des transferts entre les urnes jusqu'au retour à l'état initial et renvoie alors le temps nécessaire.

c. Écrire une fonction `temps_moyen` de paramètre entier n qui renvoie le temps moyen du retour à l'état initial d'une urne A contenant n particules sur une série de 10 000 appels de la fonction `temps_retour`.

d. Appeler la fonction `temps_moyen` pour n allant de 1 à 8, et émettre une conjecture sur le temps nécessaire pour retrouver l'état initial des urnes.

Projet 2 Une fourmi sur les arêtes d'un cube

Une fourmi se promène le long des arêtes d'un cube ABCDEFGH.
Partant du sommet A, elle se rend d'un sommet à l'autre de façon aléatoire sans jamais faire demi-tour.
Elle définit ainsi un chemin dont la longueur est le nombre d'arêtes parcourues.
On souhaite simuler en Python le cheminement de cette fourmi afin de déterminer expérimentalement la longueur minimale à parcourir pour que la probabilité qu'elle passe par le sommet G soit supérieure ou égale à 0,95.
Les chemins seront décrits à l'aide d'une liste de caractères désignant chaque sommet ; par exemple, ["A", "B", "F", "E", "A", "D"]



a. Écrire en Python une fonction `nouveau_sommet` de paramètres *position* et *interdit*, qui correspondent respectivement au sommet où se situe actuellement la fourmi et au sommet d'où elle provient. Cette fonction renvoie un sommet choisi aléatoirement parmi ceux qui sont atteignables.

b. Écrire en Python une fonction `créer_chemin` de paramètre entier L qui renvoie un chemin de longueur L sous la forme d'une liste, le premier élément étant le sommet de départ "A".

c. Écrire en Python une fonction `frequence` de paramètre entier L qui crée 100 000 chemins de longueur L et renvoie la fréquence de ceux qui contiennent le sommet "G".

d. Appeler la fonction `frequence` pour différentes longueurs L et en déduire expérimentalement la longueur minimale que la fourmi doit parcourir pour passer par le sommet G avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Problèmes interchapitres

Des problèmes mêlant des notions de différents chapitres ou permettant de découvrir de nouveaux concepts ou outils mathématiques.

★ 1 Tentez votre chance !

Partie A

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à six faces. Si on obtient le chiffre six, on perd 1 € et le jeu s'arrête. Dans les autres cas, on pioche une boule dans une urne opaque contenant deux boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher : si cette boule est rouge, on gagne 3 € ; sinon, on perd 2 €.

On note X la variable aléatoire qui à toute partie associe le « gain » obtenu.

1. a. Représenter la situation par un arbre pondéré, puis déterminer la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance $\text{E}(X)$, la variance $\text{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

2. On munit une droite $\mathcal{D}$ d'un repère $(\text{O}\,;\vec{i})$ et on considère les points A, B et C d'abscisses respectives -1, -2 et 3.

a. Montrer que l'abscisse du point G défini par :

$$\overrightarrow{\text{OG}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{OC}}$$

est égale à $\text{E}(X)$.

> **Info**
> Le point G est appelé **barycentre** des points pondérés, c'est-à-dire des points auxquels on associe un coefficient, $\left(\text{A}\,;\frac{1}{6}\right)$, $\left(\text{B}\,;\frac{1}{3}\right)$ et $\left(\text{C}\,;\frac{1}{2}\right)$.

b. Montrer que :

$$\frac{1}{6}\text{GA}^2 + \frac{1}{3}\text{GB}^2 + \frac{1}{2}\text{GC}^2 = \text{V}(X).$$

Partie B

Sur la droite $\mathcal{D}$, on place les points R, S et T d'abscisses respectives -3, 8 et -6, et on considère le point U barycentre des points pondérés $\left(\text{R}\,;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{S}\,;\frac{1}{4}\right)$ et $\left(\text{T}\,;\frac{5}{12}\right)$.

- Inventer un jeu dont l'espérance est égale à l'abscisse du point U.

★★ 2 Équations trigonométriques

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$-\sin^2(t) + \cos(t) + \cos^2(t) = 0.$$

> **Aide** On peut procéder au changement de variable suivant : $\cos(t) = x$.

c. Quelles sont les solutions dans $[-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation :

$$-\sin^2(t) + \cos(t) + \cos^2(t) > 0\ ?$$

> **Info**
> **Pour les exercices 3 et 4**
> Une variable aléatoire discrète X pouvant prendre pour valeur 0, 1, 2, etc., suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, s'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $\text{P}(X = k) = \text{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ ($k!$ se lit « k factorielle »). Pour la loi de Poisson, $\text{E}(X) = \lambda$ et $\text{V}(X) = \lambda$.

★ 3 Faites un vœu

Les Perséides sont une pluie d'étoiles filantes visibles dans l'atmosphère terrestre. Ces météores, débris de la comète Swift-Tuttle, sont observables dans l'hémisphère nord lorsqu'ils rencontrent l'atmosphère terrestre, soit à partir du 20 juillet environ et jusque vers le 25 août.

En moyenne, on peut généralement observer dix étoiles filantes sans télescope par nuit au mois d'août en Alsace. On note X la variable aléatoire qui, à une nuit choisie au hasard pendant le mois d'août en Alsace, associe le nombre d'étoiles filantes visibles sans télescope. On admet que X suit une loi de Poisson.

- Calculer la probabilité que Cathy voie cinq étoiles filantes en Alsace le 7 août, jour de ses cinq ans.

★ 4 La loi des petits nombres : un exemple

Ladislaus Bortkiewicz (1868-1931), économiste et statisticien russe d'origine polonaise, a étudié le nombre de cavaliers morts par ruade de cheval dans 10 corps d'armée pendant 20 ans. Voici le résultat de ses 200 observations (soit l'équivalent de 200 corps annuels) :

Nombre de morts (par corps d'armée)	0	1	2	3	4	5 ou plus
Nombre de corps d'armée	109	65	22	3	1	0

On note X la variable aléatoire qui, à un corps d'armée, associe son nombre de victimes par ruade de cheval.

a. Déterminer la loi de probabilité de X (on assimilera les probabilités aux fréquences observées), son espérance $\text{E}(X)$ et sa variance $\text{V}(X)$.

b. L. Bortkiewicz a eu l'idée d'approcher la loi suivie par la variable aléatoire X par une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la valeur prise pour λ, puis comparer les deux lois. Que pensez-vous de cette approximation ?

Fichiers Python et logiciel
Ex. 6 et 7
Manuel numérique enseignant

5 Suite et second degré

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par :

$$u_n = \frac{-n^2}{n-1}.$$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, vérifier que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n^2+n+1}{n(n-1)}.$$

b. En déduire la monotonie de (u_n).

6 Tracé d'une fractale

PROGRAMMATION python

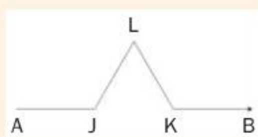
Info

Une **fractale** est un objet géométrique « infiniment morcelé » dont les détails sont invariants à toutes les échelles.

Voici les étapes de la construction d'une fractale : la courbe de Von Koch.

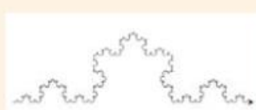
Étape 0 : On part d'un segment [AB] de longueur donnée.

Étape 1 : On divise [AB] en trois parties égales : $AJ = JK = KB = \frac{1}{3}AB$ et on construit un triangle JLK équilatéral en effaçant la base [JK].



Étape 2 : On réitère le processus pour chaque segment [AJ], [JL], [LK] et [KB].

Et ainsi de suite… :



1. a. Quelle est la longueur de la ligne brisée AB obtenue à l'étape 1 si le segment [AB] a pour longueur 1 cm ?

Info

Une **ligne brisée** (aussi appelée ligne polygonale) est une figure géométrique formée d'une suite finie de segments ayant une extremité commune.

b. En utilisant le module Turtle de Python, écrire une fonction `vonkoch_1(longueur)` qui permet de reproduire l'étape 1 pour une longueur donnée du segment [AB] en paramètre.

Aide

Importer le module Turtle en saisissant `import turtle`, puis utiliser les instructions `turtle.forward(longueur)`, `turtle.left(angle)` et `turtle.right(angle)` (avec *angle* en degrés).

c. Quelle est la longueur de la ligne brisée obtenue à l'étape 2 en fonction de la longueur AB ?

d. Recopier et compléter (lignes 6 à 12) la fonction en Python `vonkoch(n,longueur)` ci-dessous qui permet de tracer la ligne brisée à l'étape n pour une longueur donnée.

```
1 import turtle
2 def vonkoch(n,longueur):
3     if n==1:
4         vonkoch_1(longueur)
5     else:
6         ...............
7         ...............
```

Aide

Chaque segment de la ligne brisée à l'étape $n-1$ doit être remplacé par une ligne brisée à l'étape n. Les lignes 6 à 12 doivent donc être complétées par 4 appels de la fonction `vonkoch` elle-même, avec des paramètres plus petits.

2. On appelle (u_n) la suite représentant la longueur de la ligne brisée AB à l'étape n.

a. Déterminer u_0, u_1 et u_2.

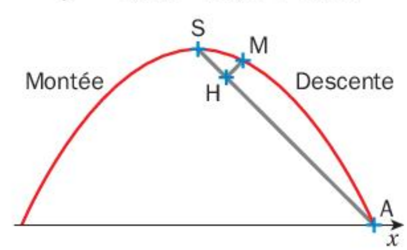
b. Justifier que (u_n) est une suite géométrique.

c. En déduire le terme général u_n en fonction de n.

7 Attention sécurité !

On modélise une partie de la structure d'un manège à sensation dans le plan muni d'un repère orthonormé par une parabole d'équation :

$$y = -0{,}25x^2 + 1{,}5x + 1{,}75.$$



1. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A, d'abscisse positive, de cette parabole avec l'axe des abscisses, ainsi que les coordonnées du sommet S de la parabole.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (AS).

2. Le gérant du manège souhaite renforcer la descente de la structure en plaçant une poutre métallique modélisée par le segment [AS] et en mettant une barre de renfort modélisée par le segment [MH] tel que [MH] est perpendiculaire à (AS) au point H et M est le point d'abscisse 4 situé sur la parabole.

Calculer la longueur de la poutre [AS] et de la barre de renfort [MH].

3. Le chef du bureau d'étude précise au gérant que la barre de renfort doit être de longueur maximale.

a. TICE À l'aide d'un logiciel, conjecturer l'abscisse du point M pour que ce soit le cas.

b. Calculer l'abscisse du point M de la parabole pour que la longueur de la barre de renfort soit maximale.

Fichier logiciel
Ex. 10
Manuel numérique enseignant

★ 8 Exploitation aurifère

Partie A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 0{,}05(x + 1)^2\mathrm{e}^{-x} + 0{,}05.$$

a. Déterminer une expression de la dérivée f' de f.

b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

c. Déterminer une équation de la tangente (d) à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 1 dans le plan muni d'un repère.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (d) ?

> **Info**
> Une fonction g a pour **limite** k en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout intervalle ouvert I contenant k, il existe un nombre réel $M > 0$ (resp. $M < 0$) tel que $\forall x > M$ (resp. $\forall x < M$), $g(x) \in \mathrm{I}$.

d. TICE À l'aide de l'outil de votre choix, conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$.

e. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

> **Info**
> La droite d'équation $y = k$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative d'une fonction g en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - k$.

f. Préciser une équation de l'asymptote horizontale (Δ) à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (Δ) ?

Partie B. Modélisation

Dans les exploitations aurifères, du cyanure est utilisé afin de récupérer l'or contenu dans le minerai. Dans les normes européennes, la dose maximale de cyanure admise dans l'eau potable est 0,05 mg/L ; pour l'OMS, cette norme est 0,07 mg/L. Taliko habite dans un village en Guyane française, près de la rivière Tampoc où se situent de nombreuses exploitations aurifères. Son peuple utilise l'eau de cette rivière pour se laver, préparer la Cassave (pain sucré en forme de soleil), boire, etc. Suite à une rupture de barrage contenant des déchets de cyanure, Taliko s'inquiète des relevés d'eau de la rivière faits par Coline, chercheuse au CNRS : d'après ces relevés, la scientifique a modélisé le taux de cyanure (en mg/L d'eau) en fonction du temps t en heures après la rupture du barrage par la fonction :

$$f : t \mapsto 0{,}05(t + 1)^2\mathrm{e}^{-t} + 0{,}05.$$

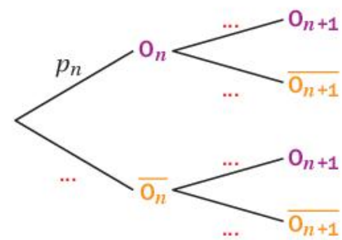
- Taliko a-t-il raison de s'inquiéter ?

★★ 9 Chutes de neige

En période de chutes importantes de neige, Hubert n'ouvre pas son magasin.
S'il neige trop un certain jour alors, dans 95 % des cas, il neigera trop le lendemain. Si les chutes de neige ne sont pas importantes dans sa ville, alors dans 85 % des cas il en sera de même le lendemain.
On note p_n la probabilité de l'évènement O_n : « Hubert ouvre son magasin le $n^{\text{ième}}$ jour ».
Lundi, date du début de la saison de neige, il y a eu une chute importante de neige dans la rue.

a. Préciser la valeur de p_1, puis calculer p_2 et p_3.

b. Recopier et compléter l'arbre suivant par les probabilités manquantes.



c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05.$$

d. Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par $u_n = p_n - 0{,}25$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

e. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis de p_n en fonction de n.

f. Si les chutes de neige durent longtemps, Hubert dit qu'il a autant de chance d'ouvrir son magasin que de tirer un trèfle dans un jeu de 32 cartes. A-t-il raison de dire cela ?

★ 10 Une belle balade TICE

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- tracer la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{4}x + 1$, puis placer le point B d'abscisse 4 sur la droite (d) ;
- créer un curseur a à valeurs réelles comprises entre -10 et 10, puis placer le point A d'abscisse a sur l'axe des abscisses ;
- créer une variable m égale à la longueur du segment [AB], puis placer le point M$(a\ ;\ m)$;
- afficher la trace de M et déplacer le point A en faisant varier le curseur a.

b. Sur quel type de courbe semble se déplacer le point M ? Valider ou corriger votre conjecture.

2. Reprendre les questions du **1** avec le point B d'abscisse -4.

3. Déterminer le type de courbe obtenue en fonction de la valeur de l'abscisse du point B.

Fichier Python
Ex. 11 et 14
Manuel numérique enseignant

11 Je m'intercale ! PROGRAMMATION python

n est un nombre entier naturel non nul.
On considère la suite (E_n) définie par $E_1 = (1 ; 1)$ et, pour $n \geqslant 2$, E_n est la liste des nombres entiers naturels obtenue en intercalant entre deux nombres de la liste E_{n-1} la somme de ces entiers. On obtient ainsi les listes $E_2 = (1 ; 2 ; 1)$ et $E_3 = (1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 1)$.

1. Écrire les listes E_4 et E_5.

2. On note N_n le nombre de nombres de la liste E_n.
a. Établir une relation entre N_{n+1} et N_n.
b. Conjecturer une expression de N_n en fonction de n.
c. Quelle serait la valeur de N_{15} ? Programmer une fonction en Python permettant de la vérifier.

3. On note S_n la somme des nombres de la liste E_n.
a. Établir une relation entre S_{n+1} et S_n.
b. Rédiger un algorithme qui calcule S_n pour un nombre entier n, avec $n \geqslant 2$.
c. Programmer cet algorithme et calculer S_{15}.

12 Un jeu presque équitable

Un sac contient 38 jetons de couleur rouge ou verte. On note n le nombre de jetons rouges.
1. Sachant qu'il y a dans le sac au moins un jeton de chaque couleur, quelles sont les valeurs possibles du nombre n ?

2. **Jeu A.** On extrait au hasard, deux fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
b. Déterminer en fonction du nombre n la probabilité d'extraire deux jetons rouges.
c. On note p_2 la probabilité d'extraire deux jetons de la même couleur.
Montrer que $p_2 = \dfrac{2n^2 - 76n + 1\,444}{1\,444}$.
d. Existe-t-il une valeur du nombre n telle que $p_2 = 0{,}5$?

3. **Jeu B.** On extrait au hasard, trois fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
a. Compléter l'arbre pondéré précédent pour décrire la nouvelle situation.
b. On note p_3 la probabilité d'extraire trois jetons de la même couleur.
Montrer que $p_3 = \dfrac{3n^2 - 114n + 1\,444}{1\,444}$.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[1 ; 37]$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 114x + 1\,444}{1\,444}$.
d. En déduire la valeur minimale de p_3 et interpréter cette valeur dans le contexte du jeu B.
e. Combien doit-il y avoir de jetons rouges dans le sac pour que p_3 soit la plus proche possible de $0{,}5$?

4. **Jeu C.** On extrait au hasard, quatre fois de suite avec remise, un jeton dans le sac.
On note p_4 la probabilité d'extraire quatre jetons de la même couleur.
Combien doit-il y avoir de jetons rouges dans le sac pour que p_4 soit la plus proche possible de $0{,}5$?

Problèmes ouverts

13 Cela tourne

On considère l'ensemble des points M d'abscisse $1 - 2\cos(\pi t)$ et d'ordonnée $2\sin(\pi t)$, t désignant un nombre réel.
- Montrer que l'ensemble des points M se situe sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

14 Équation probabiliste PROGRAMMATION python

On note (E) l'équation $x^2 + Bx + C = 0$.
B et C sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![-n ; n]\!]$ (▶ Rabat I, Notations), où n est un nombre entier naturel ; chaque nombre de $[\![-n ; n]\!]$ a la même probabilité d'apparition.

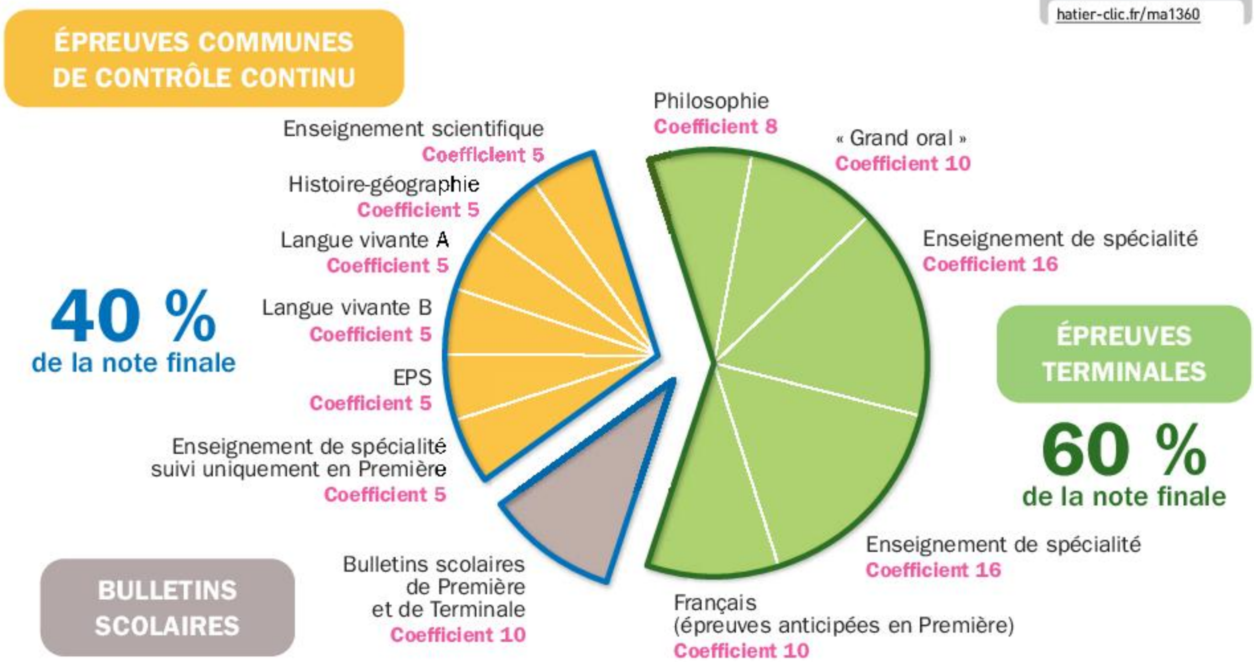
> **Info**
> Les variables aléatoires B et C suivent une **loi uniforme discrète** : elles peuvent prendre toutes les valeurs entières dans l'intervalle donné avec la même probabilité.

a. À l'aide d'une fonction en Python, déterminer la fréquence des équations sans solution réelle.
b. Que peut-on en déduire quant à la probabilité que (E) n'admette aucune solution réelle ?

Se préparer au BAC

Les épreuves du baccalauréat

Doc+
Textes officiels
hatier-clic.fr/ma1360



Le calendrier du Bac en 1re et Tle

		Le parcours d'Enzo	Le parcours d'Hélèna
Classe de Première	2e trimestre	Épreuves communes de contrôle continu	Épreuves communes de contrôle continu
		Enzo choisit de ne pas conserver la spécialité mathématiques en Terminale	*Hélèna choisit de conserver la spécialité mathématiques en Terminale*
	3e trimestre	Épreuves communes de contrôle continu dont une épreuve de mathématiques	Épreuves communes de contrôle continu
	Juin	Épreuves de français	Épreuves de français
Classe de Terminale	2e trimestre	Épreuves communes de contrôle continu	Épreuves communes de contrôle continu
	Avril-mai	Épreuves terminales : enseignements de spécialités	Épreuves terminales : enseignements de spécialités dont la spécialité mathématiques
	Juin	Épreuve de philosophie et « Grand oral » (une ou deux spécialités)	Épreuve de philosophie et « Grand oral » (une ou deux spécialités dont mathématiques)

Bulletins scolaires dont la spécialité mathématiques

Se préparer pour le « Grand oral »

▶ **Pour être à l'aise à l'oral, il faut s'entraîner tout au long de l'année !**

– Faites les questions **Maths à l'oral** proposées au fil de votre manuel.

– Présentez chaque fois que possible vos **exercices au tableau à l'oral**, à votre professeur et à la classe.

– **Relevez les bonnes méthodes** que les autres élèves utilisent lorsqu'ils présentent un exercice à l'oral.

68 Histoire des mathématiques

La mathématicienne et philosophe italienne Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) a découvert une courbe qui porte son nom : *la courbe d'Agnesi*.

a. Rechercher :
– dans quel ouvrage et en quelle année cette courbe a-t-elle été présentée par cette mathématicienne ? Quels étaient les domaines mathématiques développés dans cet ouvrage ?
– quel nom a-t-on donné à l'époque à cette courbe ? Pourquoi ?
– quelle est l'équation de cette courbe ?

Maths à l'oral
Présentez les résultats de ces recherches à l'aide d'un diaporama.

– Préparez au moins une fois dans l'année un **exposé** sur l'histoire des mathématiques ; concevez un **diaporama** pour illustrer votre exposé.

– Pendant les travaux **En groupe**, **exposez à l'oral vos idées et vos arguments** aux autres membres du groupe.

Pour présenter un exercice au tableau : la charte de l'oral !

- ✔ Préparez à l'avance l'exercice à l'écrit.
- ✔ Présentez l'énoncé de l'exercice.
- ✔ Précisez l'objectif de l'exercice.
- ✔ Articulez, parlez lentement et à voix haute.
- ✔ Expliquez à l'oral les calculs présentés, le raisonnement utilisé, la construction d'une figure, etc.
- ✔ Répondez aux questions du professeur et des autres élèves.
- ✔ Vérifiez l'exactitude mathématique de vos résultats.
- ✔ Concluez l'exercice.

▶ **Pour le jour du « Grand oral », il faut s'exercer à la présentation !**

– **Préparez à l'écrit** sur une feuille les grandes lignes de ce que vous allez dire à l'oral.

– **Apprenez par cœur les premières phrases**, cela vous permettra de vous sentir plus à l'aise dans votre présentation.

– Devant vos parents, vos amis ou même un miroir, **exercez-vous en parlant à haute voix**, en tenant votre feuille et en regardant devant vous.

– **Chronométrez-vous** : votre présentation doit durer le temps imparti, pas plus, pas moins.

– Demandez à vos parents et vos amis de vous poser des **questions** sur le contenu de votre oral.

– **Notez et suivez les conseils** que vos professeurs donneront pendant les oraux blancs.

Les bons réflexes le jour J !

- ✔ N'oubliez pas la **politesse** : dire bonjour en arrivant et au revoir à la fin de l'oral.
- ✔ Soignez votre **allure** et votre **tenue** vestimentaire : l'impression générale que vous laisserez au jury influencera son jugement. Évitez les tenues trop décontractées ou inadaptées.
- ✔ Considérez que **le stress et le trac sont des atouts** qui vont vous permettre d'être plus concentré·e.
- ✔ **Parlez posément** et lentement, assez fort pour que l'on vous entende, et **articulez**.
- ✔ Lors des questions, **écoutez les membres du jury** : ils essaieront de vous guider et de vous donner des indications.
- ✔ Si vous comprenez mal une question, **faites-la répéter**.
- ✔ **Ne lisez pas trop** votre feuille : elle doit être un simple support pour l'oral.

Doc+
Exemples de sujets
hatier-clic.fr/ma1362

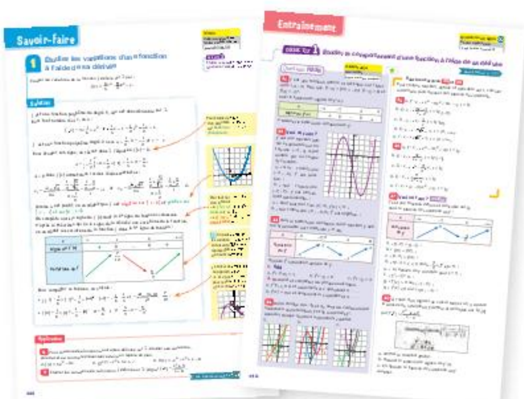
Se préparer pour l'épreuve écrite … tout au long de l'année

▸ Après chaque séance :

– relisez attentivement le **Cours** ;

– développez des automatismes sur des applications simples des définitions et propriétés avec les **Questions FLASH** ;

– entraînez-vous sur les **exercices d'application directe** :



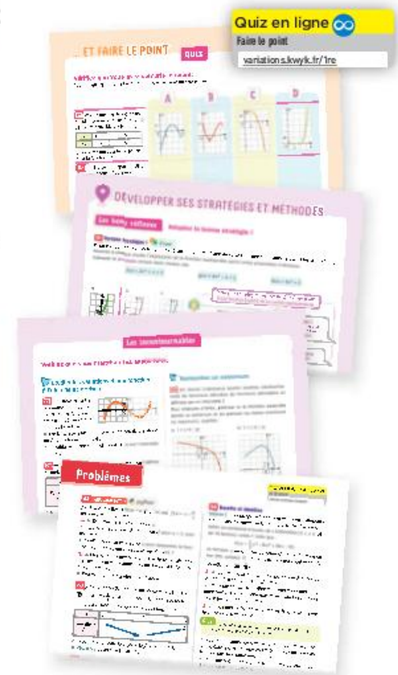
▸ Pour préparer un devoir :

– vérifiez que vous maîtrisez les définitions et propriétés du cours avec les **quiz** du manuel ou en ligne ;

– développez les bonnes **stratégies** face aux différents types d'exercices ;

– entraînez-vous sur les exercices **incontournables** ;

– confrontez-vous à des **problèmes** plus élaborés pour identifier votre niveau d'acquisition des compétences et faire le lien entre les différents objectifs du cours.

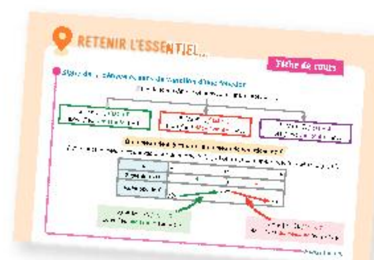


▸ Pour réviser tout au long de l'année :

– privilégiez un **entraînement régulier** plutôt qu'une révision en bloc avant chaque devoir : l'apprentissage est plus efficace lorsqu'il est étalé dans le temps que lorsqu'il est concentré sur une courte période ;

– appuyez-vous sur les **fiches de cours** de chaque chapitre ;

– élaborez vos propres fiches de révisions qui récapitulent **l'essentiel des définitions, propriétés et formules** de chaque chapitre, ainsi que **les stratégies à utiliser** pour résoudre un problème donné ;



– élaborez des **fiches de mémorisation**, en autonomie ou avec des camarades :

Au **recto**, une succession de questions.

Les questions

1. Question 1
2. Question 2

Etc.

→

Les réponses

1. Réponse à la question 1
2. Réponse à la question 2

Etc.

Au **verso**, les réponses à ces questions.

Exemples

▸ **Question :** « Quelle formule appliquer pour dériver la fonction $\frac{2x-3}{6x+1}$? »

Réponse : « $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ avec $u = 2x - 3$ et $v = 6x + 1$. »

▸ **Question :** « De quoi dépend le sens de variation d'une suite arithmétique ? »

Réponse : « Si la raison r est strictement positive, alors la suite est strictement croissante ; si r est strictement négative, alors la suite est strictement décroissante ; si $r = 0$, alors la suite est constante. »

Pour ancrer les notions dans ma mémoire, je me pose les questions plusieurs fois dans l'année.

… pour le jour de l'épreuve

▸ Dormez suffisamment longtemps !

Le cerveau a besoin de temps de sommeil pour mieux assimiler toutes les informations intégrées lors d'une journée. De plus, le jour de l'épreuve, vous serez en plus grande forme si vous avez eu un bon rythme de sommeil les semaines précédentes.
Une nuit d'environ 7 h 30 est nécessaire pour effectuer suffisamment de cycles pour traiter les apprentissages de manière efficace.

▸ Entraînez-vous régulièrement !

Un entraînement régulier sur les notions apprises est beaucoup plus efficace qu'une révision en bloc avant l'épreuve : il est préférable de réviser et s'entraîner 1 heure par jour pendant 8 jours plutôt que 8 h d'un bloc un jour donné. Le cerveau a ainsi le temps de bien structurer les apprentissages et de mieux les assimiler.

▸ Organisez vos révisions !

Il est essentiel de bien préparer son plan de révisions à l'avance, afin de les répartir sur la durée. Cela permet également de prévoir des temps de pause : une journée de révisions continue sera épuisante et peu efficace, alors que plusieurs séances entrecoupées de pauses et/ou de loisirs permettent de gagner en efficacité et en confort lors des révisions.

▸ Soignez votre alimentation !

Le jour de l'épreuve, il est important de prendre un petit-déjeuner solide et riche en sucres lents : le cerveau va solliciter beaucoup d'énergie. Une bonne hygiène de vie permet à celui-ci de mieux fonctionner : l'alimentation joue un rôle essentiel (éviter les aliments trop gras, salés ou sucrés) ainsi que l'activité physique.

▸ Gérez votre stress !

La préparation d'un examen est, par nature, stressante. Lors des révisions, une bonne organisation, un bon sommeil et une bonne hygiène de vie permettent de se sentir mieux préparé·e et d'être plus détendu·e à l'approche de l'épreuve. De plus, il est possible de travailler sa respiration et de pratiquer des exercices visant à mieux gérer son stress, comme la méditation ou la relaxation.

Travailler avec les compétences en mathématiques

« L'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de Première générale est conçu à partir des intentions suivantes :
· permettre à chaque élève de **consolider les acquis de la Seconde**, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des **concepts mathématiques** et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
· développer des **interactions avec d'autres enseignements** de spécialité ;
· **préparer au choix des enseignements de la classe de Terminale** : notamment choix de l'enseignement de spécialité de mathématiques, éventuellement accompagné de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes, ou choix de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires.
Le programme de mathématiques définit un ensemble de **connaissances** et de **compétences**, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de Seconde dans un souci de cohérence, en réactivant les **notions** déjà étudiées et y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles **notions**, à étudier de manière suffisamment approfondie. »

Extrait du Bulletin officiel spécial du 22 janvier 2019.

▶ Les compétences en mathématiques

Dans le prolongement du Collège et de la classe de Seconde, **six compétences** sont travaillées en mathématiques. En parallèle des notions, il est important d'acquérir ces compétences pour que votre formation en mathématiques soit complète.

Chercher

- Extraire et traiter des données pour analyser un problème.
- Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant des logiciels, émettre une conjecture.
- Valider, corriger une démarche.

Modéliser

- Traduire en langage mathématique une situation réelle.
- Faire une simulation en utilisant un logiciel.
- Valider ou invalider un modèle.

Représenter

- Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.) pour traiter un problème.
- Passer d'un mode de représentation à un autre.

Raisonner

- Utiliser les notions de logique pour bâtir un raisonnement.
- Démontrer en utilisant différents types de raisonnement.
- Conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture.
- Trouver des résultats partiels et les mettre en perspective.

Calculer

- Effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'une calculatrice, d'un logiciel.
- Appliquer des techniques de calculs.
- Mettre en œuvre des algorithmes simples.
- Contrôler les calculs.

Communiquer

- Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral.
- Critiquer une démarche ou un résultat.
- S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.
- Expliquer une démarche.

▶ Grille d'autoévaluation par compétences

Lorsqu'une compétence est indiquée sur une question d'un exercice, je traite la question puis je m'appuie sur cette grille d'autoévaluation pour savoir quel est mon niveau d'acquisition de la compétence.

Maîtrise… / Compétence	insuffisante	fragile	satisfaisante	très bonne
Chercher	Je ne vois aucune information dans le problème, aucune piste pour commencer à le résoudre. Je ne prends pas l'initiative de tester, d'essayer des pistes de résolution.	Je teste, j'essaie, je m'engage dans des démarches, mais je ne fais pas la distinction dans le problème entre les informations utiles ou non, je ne fais pas le lien avec mes connaissances.	Je sais extraire du problème les informations utiles et les confronter à mes connaissances pour émettre des hypothèses et m'engager dans une démarche, mais j'éprouve des difficultés à les organiser ou à les reformuler.	Je sais extraire du problème les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à mes connaissances pour émettre des hypothèses et m'engager dans une démarche qui me conduira à la solution.
Modéliser	Je ne sais pas faire le lien entre la situation donnée et les mathématiques. Je ne suis pas capable de faire une simulation sur un logiciel.	Je vois quelles sont les notions mathématiques à utiliser pour raisonner sur le problème (fonctions, suites, algèbre, probabilités, géométrie, etc.), mais je ne sais pas décrire le cadre mathématique.	Je sais transcrire la situation en un problème mathématique, mais je commets des erreurs et je manque de rigueur pour décrire le cadre mathématique (description de l'expérience, ensemble de définition, etc.).	Je sais transcrire la situation en un problème mathématique pertinent (mise en équation, choix de l'inconnue, de la suite, de l'évènement, etc.) en ayant correctement posé le cadre.
Représenter	Je ne sais pas changer de cadre (passer d'un tableau à un graphique, traduire un énoncé de géométrie en figure codée, etc.) pour résoudre un problème.	J'ai des idées de représentations, mais je ne sais pas laquelle choisir ou je fais des erreurs importantes en représentant. Je ne maîtrise pas les outils me permettant de représenter.	Je suis capable de trouver le cadre adéquat, mais je ne sais pas exploiter toutes les informations. Je ne maîtrise pas complètement les outils me permettant de représenter.	Je suis capable de trouver le cadre adéquat sans erreur et en n'oubliant aucune information. Je maîtrise les différents outils me permettant de représenter.
Raisonner	Je sais établir une conjecture mais je ne sais pas ce qu'il faut démontrer.	Je sais établir une conjecture et je sais ce qu'il faut démontrer, mais je ne sais pas mobiliser de façon efficace mes connaissances pour résoudre le problème.	Je sais ce qu'il faut démontrer, je suis capable de mobiliser mes connaissances, je maîtrise différentes méthodes pour résoudre le problème, mais mon argumentation manque de rigueur car je ne maîtrise pas encore certains raisonnements logiques.	Je sais ce qu'il faut démontrer, je suis capable de mobiliser mes connaissances, je maîtrise différentes méthodes et différents types de raisonnement logique pour analyser et résoudre le problème en argumentant de manière rigoureuse.
Calculer	Je ne maîtrise pas les techniques, même dans les cas simples.	Je manque d'automatismes, je n'arrive à traiter que des cas simples.	Je maîtrise plutôt bien les techniques, mais il m'arrive de commettre des erreurs dans des cas complexes.	Je maîtrise parfaitement les techniques, même dans des cas complexes.
Communiquer	Je n'arrive pas à rédiger de réponse ou à expliquer à l'oral mes idées. Je ne comprends pas les explications des autres.	Je sais expliquer mes réponses, mais j'ai souvent des difficultés à élaborer des phrases complètes et structurées à l'écrit ou à l'oral. J'essaie de comprendre les explications des autres.	Je sais présenter mes réponses et me faire comprendre à l'écrit ou à l'oral, mais je commets parfois des fautes d'expression. Je suis capable d'écouter et de comprendre d'autres raisonnements.	J'argumente aussi bien à l'écrit qu'à l'oral, et je sais rédiger une réponse claire et compréhensible, sans faute. Je suis capable d'écouter, de comprendre et de prendre en compte d'autres raisonnements.

TICE – Utilisation de *GeoGebra*

Cette page présente les fonctionnalités indispensables du logiciel de géométrie dynamique *GeoGebra*.

Vidéos et Doc+
Fonctions complémentaires de *Geogebra*
hatier-clic.fr/ma1366

Créer une droite perpendiculaire à une droite et passant par un point.

Créer une droite parallèle à une droite et passant par un point.

Créer une tangente à un objet passant par un point donné.

Créer un polygone à partir de ses sommets.

Créer un polygone régulier.

Créer un cercle passant par un point et de centre donné.

Créer un cercle de rayon et de centre donnés.

Mesurer un angle.

Mesurer une distance, une longueur ou un périmètre.

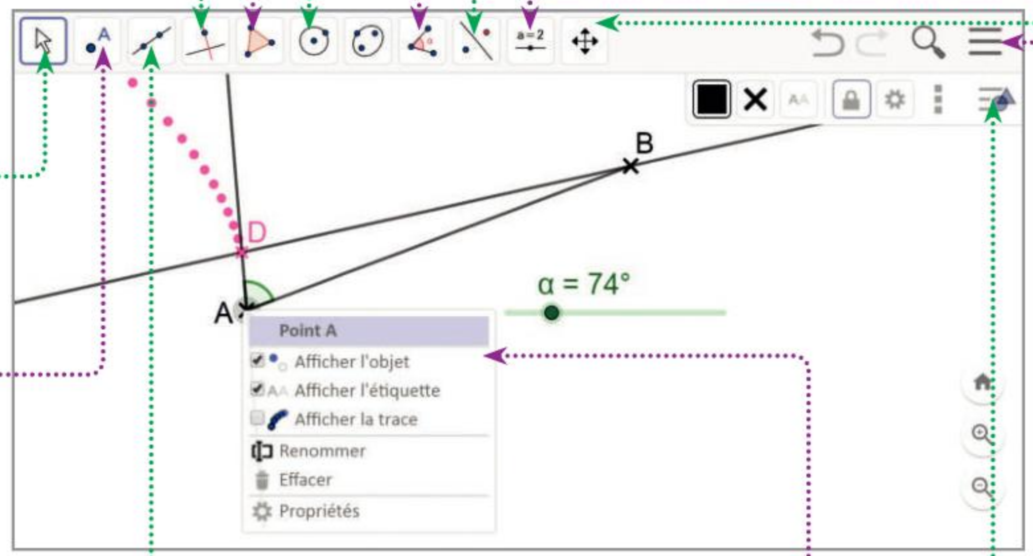
Calculer une aire.

Afficher une relation entre deux objets : égalité de mesures ou position relative.

Transformer un objet par :
- une symétrie axiale ;
- une rotation ;
- une homothétie ;
- une symétrie centrale ;
- une translation.

Créer un nombre variable sous la forme d'un curseur.

Sélectionner un objet ou le déplacer.



Déplacer la feuille.

Masquer ou montrer un objet.

Ouvrir le menu « Fichier » pour **sauvegarder ou charger** une figure.

- Fichier
- Nouveau
- Ouvrir
- Sauvegarder

Créer un point. Cet outil polyvalent cherche à déterminer le type de point en fonction du contexte : point libre, point sur un objet, intersection.

Créer un point sur un objet. Ce point ne peut être déplacé qu'au sein de l'objet dans lequel il a été créé (ligne ou zone délimitée par un polygone).

Créer un point d'intersection.

Créer un milieu ou un centre, à partir d'un segment, de deux points ou d'un cercle.

Créer une droite passant par deux points.

Créer un segment à partir de ses deux extrémités

Créer un segment de longueur donnée.

Créer une demi-droite.

Un clic droit sur un objet ouvre un **menu contextuel** permettant :
- d'**afficher** ou de **masquer** l'objet ;
- d'**afficher** ou de **masquer** son nom (étiquette) ;
- d'**activer** son **mode « trace »** (comme par exemple ici pour le point D) ;
- de **renommer** l'objet ;
- de **supprimer** l'objet.

Ouvrir la barre de style pour :
- **modifier la couleur** de l'objet ;
- **modifier le style** de l'objet : forme, épaisseur, etc. ;
- **fixer ou libérer** un objet.

TICE – Utilisation du tableur

Cette page présente des fonctionnalités des tableurs intéressantes en classe de 1re. N'hésitez pas à consulter en plus le document présentant les fonctions de base, ainsi que l'aide en ligne du tableur que vous utilisez.

Doc+
Fonctions de base des tableurs
hatier-clic.fr/ma1367a

Référence relative ou absolue à une cellule

Pour référencer de façon absolue une cellule, il faut ajouter le symbole « **$** » devant la lettre et le nombre de sa référence.

Exemple

	A	B	C	D	E
1	"Quel est votre parfum de glace préféré ?"				
2	**Parfum**	**Chocolat**	**Vanille**	**Fraise**	**TOTAL**
3	**Effectif**	24	45	56	125
4	**Fréquence**	=B3/$E$3	0,36	=D3/$E$3	

Pour calculer l'effectif total en E3, on utilise la formule =SOMME(B3:D3) qui calcule la somme du contenu de la **plage de données** délimitée par les cellules B3 à D3.

La formule de la cellule B4 contient une **référence relative** à la cellule **B3** et une **référence absolue** à la cellule **E3**.
Cela signifie que lors d'une recopie dans les cellules adjacentes, la formule s'adapte en décalant la référence à B3, mais pas celle à E3.

On a copié/collé en D4 la formule contenue dans la cellule B4. On constate que la référence à B3 est changée automatiquement en **D3**, mais que la référence à **E3** reste inchangée.

La formule étant ici recopiée en ligne, il était possible d'utiliser une **référence mixte** à la cellule E3 en saisissant $E3 ; avec cette notation, seule la référence à la colonne E est fixe.
De même, pour fixer uniquement la référence à la ligne, le symbole $ doit être placé devant le nombre : E$3.

Affichage conditionnel

Exemple On souhaite simuler un jeu de pile ou face avec le tableur.
Pour cela, la colonne B est complétée en fonction du contenu de la colonne A :

	A	B
1	1	=SI(A1=1;"Pile";"Face")
2	1	Pile
3	1	Pile
4	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;2)	Face

La formule de la cellule B1 signifie que **si** le contenu de la cellule A1 vaut 1, **alors** « Pile » est affiché ; **sinon**, « Face » est affiché.

Dans la colonne A, la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;2) renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 2 inclus.

Dénombrement

Vidéo
Une expérience aléatoire avec le tableur
hatier-clic.fr/ma1367b

Exemple À partir d'une simulation d'un relevé de tailles avec le tableur, on souhaite dénombrer les tailles selon différentes classes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Tailles** (en m)						**Taille** T	$T < 1{,}4$	$1{,}4 \leq T < 1{,}6$	$1{,}6 \leq T$
2	1,37	1,56	1,52	1,80	1,47		**Effectif**	2	5	8
3	1,66	1,38	1,78	1,94	1,65					
4	1,60	1,99	1,72	1,49	1,60					

Dans les cellules A2 à E4, la formule =1,3+0,7*ALEA() renvoie un nombre décimal compris entre 1,3 et 2 (la fonction ALEA() renvoie un nombre décimal compris entre 0 et 1).

Dans la cellule H2 la formule =NB.SI(A2:E4;"<1,4") dénombre les cellules de la plage de données A2:E4 contenant un nombre strictement inférieur à 1,4.

Dans la cellule I2 la formule =NB.SI.ENS(A2:E4;">=1,4";A2:E4;"<1,6") dénombre les cellules de la plage A2:E4 dont le contenu est à la fois supérieur ou égal à 1,4 et inférieur strictement à 1,6.

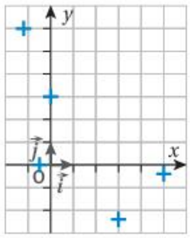
Le symbole « **&** » permet de construire une condition en faisant référence à une cellule.
Par exemple, la formule =NB.SI(A2:E4;"<"&B3) dénombre toutes les cellules de la plage A2:E4 dont le contenu est strictement inférieur à celui de la cellule B3 (ici, 1,38).

Corrigés des exercices

Chapitre 1. Suites

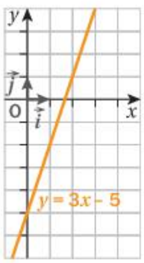
Réactivation

1

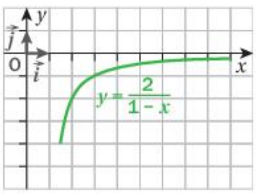


2

a.



b.



3 **a.** On note x le nombre de places achetées (x est un nombre entier naturel). Le prix payé est $y = 12 + 4x$.

Représentation a : le nombre x est un réel donc elle ne convient pas.

Représentation c : le nombre x est un entier relatif donc elle ne convient pas.

Représentation b : le nombre x est un entier naturel et les coordonnées des points placés vérifient $y = 12 + 4x$; cette représentation convient.

4 **1. a.** f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[4\,;10]$.

b. f est strictement croissante sur $[-2\,;4]$.

2. f est strictement croissante sur $[0\,;4]$ et strictement décroissante sur $[4\,;10]$.

5 **1.** f semble croissante sur $[-0{,}5\,;+\infty[$.
g semble strictement décroissante sur $[-0{,}5\,;+\infty[$.
h semble constante sur $[-0{,}5\,;+\infty[$.

2. a. k semble croissante sur $[1\,;3]$ et sur $[4\,;+\infty[$.

b. k semble décroissante sur $[-0{,}5\,;1]$ et sur $[3\,;4]$.

6

x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $f(x)$	–	0	+

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	–

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $h(x)$	+	0	–

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $k(x)$	–	0	+

7

a.

x	$-\infty$	$-1{,}4$	$+\infty$
Variations de f	↗		
Signe de $f(x)$	–	0	+

b.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Variations de g	↘		
Signe de $g(x)$	+	0	–

c.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
Variations de h	↘		
Signe de $h(x)$	+	0	–

d.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de k	↗		
Signe de $k(x)$	–	0	+

8

x	$-\infty$		$\frac{9}{4}$		6		$+\infty$
Signe de $p(x)$		–		–	0	+	
Signe de $q(x)$		+	0	–		–	
Signe de $p(x) \times q(x)$		–	0	+	0	–	

Quiz

18 A et C **19** B et D **20** A et C
21 C **22** B et D **23** B et C
24 A et C **25** A et D **26** D
27 A **28** B et C **29** B

Les incontournables

37 **a.** $u_3 = -5{,}5(3-2) + 4 = -1{,}5$;
$u_6 = -5{,}5(6-2) + 4 = -18$.

b. $v_3 = 2\sqrt{4} = 4$; $v_6 = 2\sqrt{7}$.

c. $w_3 = 5 \times 3^2 - 2 \times 3 + 6 = 45$;
$w_6 = 5 \times 6^2 - 2 \times 6 + 6 = 174$.

d. $t_3 = 1 + \frac{2}{3+1} = 1{,}5$; $t_6 = 1 + \frac{2}{6-1} = \frac{9}{7}$.

38 **a.** $u_0 = 0$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 3$; $u_3 = 4{,}5$ et $u_4 = 6$.

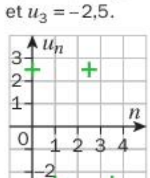
b. $v_1 = 1$; $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $v_4 = \frac{1}{2}$ et $v_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

c. $w_0 = 1$; $w_1 = 9$; $w_2 = 25$; $w_3 = 49$ et $w_4 = 81$.

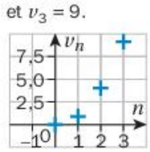
d. $t_2 = -3$; $t_3 = -1{,}5$; $t_4 = -1$; $t_5 = -0{,}75$ et $t_6 = -0{,}6$.

39

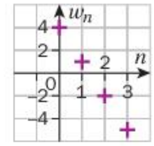
a. $u_0 = 2{,}5$; $u_1 = -2{,}5$; $u_2 = 2{,}5$ et $u_3 = -2{,}5$.



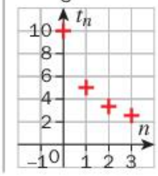
b. $v_0 = 0$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$ et $v_3 = 9$.



c. $w_0 = 4$; $w_1 = 1$; $w_2 = -2$ et $w_3 = -5$.



d. $t_0 = 10$; $t_1 = 5$; $t_2 = \frac{10}{3}$ et $t_3 = 2{,}5$.



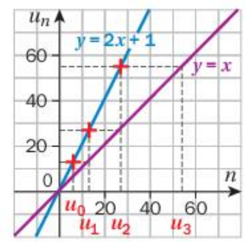
40 **a.** $u_0 = 6$; $u_1 = 4$; $u_2 = \frac{8}{3}$; $u_3 = \frac{16}{9}$ et $u_4 = \frac{32}{27}$.

b. $v_0 = -2$; $v_1 = 6$; $v_2 = -2$; $v_3 = 6$ et $v_4 = -2$.

c. $w_1 = 1$; $w_2 = 2$; $w_3 = 6$; $w_4 = 39$ et $w_5 = 1\,525$.

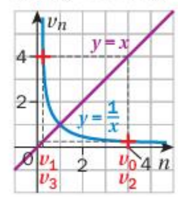
d. $t_2 = 0$; $t_3 = 1$; $t_4 = \sqrt{2}$; $t_5 = \sqrt{3}$ et $t_6 = 2$.

41 **a.**



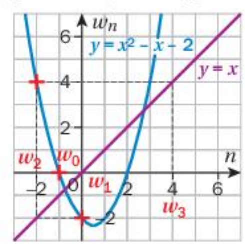
$u_0 = 6$; $u_1 = 13$; $u_2 = 27$ et $u_3 = 55$.

b.



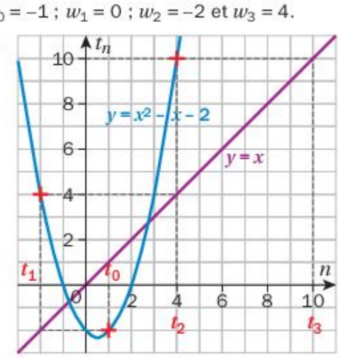
$v_0 = 4$; $v_1 = 0{,}25$; $v_2 = 4$ et $v_3 = 0{,}25$.

c.



$w_0 = -1$; $w_1 = 0$; $w_2 = -2$ et $w_3 = 4$.

d.



$t_0 = 1$; $t_1 = -2$; $t_2 = 4$ et $t_3 = 10$.

42 $u_{n+1} = 3 \times u_n^{\,2}$

43 $u_0 = 195$ et $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 5$.

44 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 8(n+1) + 3 - (8n+3)$
$= 8 > 0$
donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = 6(n+1)^2 - 2(n+1) + 5 - (6n^2 - 2n + 5) = 12n + 4 > 0$$

donc (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = -\frac{4}{n^2} < 0$

donc (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

45 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1+2}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2} > 1$$

donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1{,}5 \times 0{,}5^{n+1}}{1{,}5 \times 0{,}5^n} = 0{,}5 < 1$$

donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{0{,}5 \times 1{,}5^{n+1}}{0{,}5 \times 1{,}5^n} = 1{,}5 > 1$$

donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ et

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{5}{n+2} \times \frac{n+1}{5} = \frac{n+1}{n+2} < 1$$

donc (t_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

46 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n = f(n)$ avec $f(x) = 7 - 3x$. f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7{,}3 = f(n)$ avec $f(x) = 7{,}3$. f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc (v_n) est constante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 9n^2 + 6n + 3 = f(n)$ avec $f(x) = 9x^2 + 6x + 3$. D'après le graphique, f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Chapitre 2. Suites arithmétiques et géométriques

Réactivation

1 a. Calculer 7 % de x, revient à multiplier x par **0,07**.

b. Augmenter x de 7 %, revient à multiplier x par **1,07**.

c. Diminuer x de 7 %, revient à multiplier x par **0,93**.

d. Augmenter x de 2,8 %, revient à multiplier x par **1,028**.

e. Diminuer x de 16,4 %, revient à multiplier x par **0,836**.

2 a. $u_{n+1} = 1{,}057u_n$ et $u_0 = a$.

b. $v_{n+1} = 0{,}854v_n$ et $v_0 = b$.

3 1. b. `=B2*1,032` et **c.** `=B2+B2*0,032`.

2. c. `=C2*0,877`

3.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	-5	6
3	1	-5,1600	5,2620
4	2	-5,3251	4,6148
5	3	-5,4955	4,0472
6	4	-5,6714	3,5494
7	5	-5,8529	3,1128
8	6	-6,0402	2,7299
9	7	-6,2334	2,3941
10	8	-6,4329	2,0997
11	9	-6,6388	1,8414

4 Pour l'achat d'une voiture électrique :

- le crédit d'impôt est (en €) :

$$30\,000 \times \frac{18}{100} = 5\,400\ ;$$

- le montant final payé est (en €) :

$$30\,000 - 5\,400 = 24\,600.$$

Pour l'achat d'un véhicule polluant :

- la taxe supplémentaire est (en €) :

$$30\,000 \times 0{,}14 = 4\,200\ ;$$

- le montant final payé est (en €) :

$$30\,000 + 4\,200 = 34\,200.$$

5 a. f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

b. $\mathbb{N} \subset [0\ ;+\infty[$ donc (u_n) a la même monotonie que f : elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

6 a. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 14(n+1) + 8 - (14n + 8) = 14 > 0,$$

donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 21{,}1 - (-n^2 + 21{,}1) = -2n - 1 < 0,$$

donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

7 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{4}{5^n} > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{4} = \frac{1}{5} < 1$,

donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2n+1} > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2(n-1)+1} \times \frac{2n \quad 1}{1} = \frac{2n + 1}{2n+3} < 1,$$

donc (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$v_n = (-3)^{2n+2} = ((-3)^2)^{n+1} = 9^{n+1} > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{9^{n+2}}{9^{n+1}} = 9 > 1$,

donc (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}5n + 68 > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0{,}5(n+1) + 68}{0{,}5n + 68} = 1 + \frac{0{,}5}{0{,}5n + 68} > 1,$$

donc (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

8 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a. f est une fonction affine strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ (car $133{,}5 > 0$), donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, tels que $0 \leqslant a < b$:

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow -3a^2 > -3b^2 \Leftrightarrow -3a^2 + 2 > -3b^2 + 2$$

f est donc strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. f est une fonction affine strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ (car $-\frac{3}{2} < 0$), donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

d. f est la fonction cube, donc f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ et (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Quiz

20 C **21** B et D **22** D

23 B et D **24** A **25** B **26** C

27 D **28** D **29** C **30** D

31 D **32** A **33** A et C

Les incontournables

40 a. $u_1 = -(-7) + 22{,}5 = 29{,}5$ et $u_2 = -29{,}5 + 22{,}5 = -7$. $u_1 - u_0 = 36{,}5$ et $u_2 - u_1 = -36{,}5$. $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}$ non constant, donc (v_n) n'est pas arithmétique.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{3}$ constant, donc (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

d. $t_1 = 3{,}2 \times 44 = 140{,}8$ et $t_2 = 3{,}2 \times 140{,}8 = 450{,}56$. $t_1 - t_0 = 96{,}8$ et $t_2 - t_1 = 309{,}76$. $t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

41 a. $u_0 = 1$; $u_1 = 16$ et $u_2 = 49$.

$u_1 - u_0 = 15$ et $u_2 - u_1 = 33$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

b. $v_n = 22n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $v_0 + nr$, donc (v_n) est arithmétique de raison $r = 22$ et de premier terme $v_0 = 0$.

c. $w_n = n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 + nr$, donc (w_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $w_0 = 1$.

d. $t_1 = -4{,}8$; $t_2 = 4{,}8$ et $t_3 = -4{,}8$.

$t_2 - t_1 = 9{,}6$ et $t_3 - t_2 = -9{,}6$.

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$ donc (t_n) n'est pas arithmétique.

42 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 + 0{,}1n$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 - 10n$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 21n$.

43 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5 - 0{,}3n$.

$a_0 = 5$; $a_1 = 4{,}7$; $a_2 = 4{,}4$ et $a_3 = 4{,}1$.

b. $b_0 = 3$; $b_1 = \frac{7}{3}$; $b_2 = \frac{5}{3}$ et $b_3 = 1$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 13 + 4{,}2n$.

13 ; 17,2 ; 21,4 et 25,6.

d. $d_0 = -\frac{2}{3}$; $d_1 = \frac{7}{3}$; $d_2 = \frac{16}{3}$ et $d_3 = \frac{25}{3}$.

44 a. (a_n) est de raison $r = -0{,}3 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. (b_n) est de raison $r = -\frac{2}{3} < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. (c_n) est de raison $r = 4{,}2 > 0$, donc elle est strictement croissante.

d. (d_n) est de raison $r = 3 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

45 a. (u_n) est de raison $r = -12 < 0$, donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. (v_n) est de raison $r = 7{,}8 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

46 a. $u_0 = -8$; $u_1 = 63 \times (-8) + 2 = -502$ et $u_2 = 63 \times (-502) + 2 = -31\,624$.

$\frac{u_1}{u_0} = 62{,}75$ et $\frac{u_2}{u_1} \simeq 62{,}996$.

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

b. $v_0 = -2{,}4$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{7}$.

c. $w_1 = 1$; $w_2 = \frac{1}{1} \times 1 = 1$ et $w_3 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

$\frac{w_2}{w_1} = 1$ et $\frac{w_3}{w_2} = \frac{1}{2}$.

$\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_3}{w_2}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

47 **a.** $u_n = 8{,}4(-2)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $u_0 \times q^n$, donc (u_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 8{,}4$.
b. $v_0 = 0$; $v_1 = 13$; $v_2 = 26$ et $v_3 = 39$.
$\frac{v_2}{v_1} = \frac{26}{13} = 2$ et $\frac{v_3}{v_2} = \frac{39}{26} = 1{,}5$.
$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.
c. $w_n = 12 \times 3{,}4^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, est de la forme $w_0 \times q^n$, donc (w_n) est géométrique de raison $q = 3{,}4$ et de premier terme $w_0 = 12$.

48 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 \times 0{,}1^n$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}55 \times (-10)^n$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1\,000$.

49 **a.** (u_n) est de premier terme $u_0 = -5 < 0$ et de raison $q = 0{,}1 \in]0\,;1[$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. (v_n) est de raison $q = -10 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.
c. (w_n) est de premier terme $w_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1$, donc elle est constante sur $\mathbb{N}$, égale à 1 000.

50 **a.** (u_n) est de raison $q = 2 > 1$ et $u_0 = 6 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. (v_n) est de raison $q = -0{,}25 < 0$, donc elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

51 **a.** $S = 1 + 2 + \ldots + 101$
$= \frac{1}{2} \times 101 \times 102 = 5\,151$
b. $T = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^8$
$= \frac{1-4^9}{1-4} = 87\,381$
c. $Z = 1 - 2 + 2^2 + \ldots + (-2)^7$
$= \frac{1-(-2)^8}{1-(-2)} = -85$

52 **a.** (w_n) est arithmétique de raison $r = 2{,}4$;
donc $S = \frac{1}{2} \times 10 \times (w_0 + w_9)$,
soit $S = 5 \times (-3 - 3 + 2{,}4 \times 9) = 78$.
b. (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$;
donc $S = w_0 \times \frac{1-0{,}2^{10}}{1-0{,}2}$,
soit $S = \frac{5}{0{,}8} \times (1 - 0{,}2^{10}) = 6{,}249\,999\,36$.

Chapitre 3. Second degré

Réactivation

1 **a.** $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$
b. $(4x-5)^2 = 16x^2 - 40x + 25$
c. $(2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$
d. $(x+8)(x-8) = x^2 - 64$
e. $(3x+7)^2 = 9x^2 + 42x + 49$
f. $(2x-11)(2x+11) = 4x^2 - 121$

2 **a.** $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
b. $4x^2 + 28x + 49 = (2x+7)^2$
c. $25x^2 - 40x + 16 = (5x-4)^2$
d. $x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2$
e. $16x^2 - 49 = (4x-7)(4x+7)$

3 **a.** $(x-4)^2$ **b.** $-24(x+3)$
c. $(-x-5)(7x+19)$ **d.** $(x+4)(x+3)(x-3)$
e. $(3x-2)(x-17)$

4 **a.** $(30-2)^2 = 30^2 - 120 + 2^2 = 784$
b. $(40-1)^2 = 40^2 - 80 + 1^2 = 1\,521$
c. $(40+1)^2 = 40^2 + 80 + 1^2 = 1\,681$
d. $(70+2)^2 = 70^2 + 280 + 2^2 = 5\,184$
e. $(20-3)(20+3) = 20^2 - 3^2 = 391$
f. $(30-5)(30+5) = 30^2 - 5^2 = 875$

5 **a.** $0 \leqslant 2 + \sqrt{6} \leqslant 2 + \sqrt{7}$
donc $(2+\sqrt{6})^2 \leqslant (2+\sqrt{7})^2$.
b. $-2 + \sqrt{2} \leqslant -2 + \sqrt{3} \leqslant 0$
donc $(-2+\sqrt{2})^2 \geqslant (-2+\sqrt{3})^2$.
c. $-2 - \sqrt{3} \leqslant -2 - \sqrt{2} \leqslant 0$
donc $(-2-\sqrt{3})^2 \geqslant (-2-\sqrt{2})^2$.

6 **a.** $A^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} + 5$
$= 8 + 2\sqrt{15}$
$B^2 = \left(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{15}$
b. $A^2 = B^2$ donc $A = B$ ou $A = -B$. Or A et B sont positifs et de même signe, ainsi $A = B$.

7 **1. a.** Vrai. La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b. Faux. Contre-exemple : $x = -5$.
c. Vrai. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
d. Vrai. $(0{,}5)^2 = 0{,}25$.
2. a. « Si $x^2 \geqslant 16$ alors $x \geqslant 4$. ». Faux.
Contre-exemple $x = -5$.
b. « Si $x^2 \leqslant 4$ alors $x \leqslant 2$ ». Vrai.
c. « Si $x^2 \geqslant 1$ alors $x \leqslant -1$ ». Faux.
Contre-exemple $x = 2$.
d. « Si $x^2 = 0{,}25$ alors $x = 0{,}5$ ». Faux.
Contre-exemple $x = -0{,}5$.

8 **a.** $f(x) < 0$ si $x \in]-\infty\,;1{,}75[$;
$f(x) > 0$ si $x \in]1{,}75\,;+\infty[$;
$f(x) = 0$ si $x = 1{,}75$.
b. $g(x) > 0$ si $x \in]-\infty\,;1{,}5[$;
$g(x) < 0$ si $x \in]1{,}5\,;+\infty[$;
$g(x) = 0$ si $x = 1{,}5$.
c. $h(x) > 0$ si $x \in]-\infty\,;-0{,}4[$;
$h(x) < 0$ si $x \in]-0{,}4\,;+\infty[$;
$h(x) = 0$ si $x = -0{,}4$.
d. $k(x) < 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right[$;
$k(x) > 0$ si $x \in \left]-\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$;
$k(x) = 0$ si $x = -\frac{5}{3}$.
e. $p(x) > 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\frac{8}{3}\right[$;
$p(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$;
$p(x) = 0$ si $x = \frac{8}{3}$.
f. $q(x) > 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$;
$q(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$;
$q(x) = 0$ si $x = \frac{1}{3}$.

9 **a.**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

b.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

d.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $k(x)$		$+$	0	$-$	

10 **a.**

x	$-\infty$		1,6		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

b. $g(1{,}625) > 0$ **c.** $S = [1{,}6\,;+\infty[$

11 **a.** $\mathscr{C}_f$ semble au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-2\,;+\infty[$.
$\mathscr{C}_f$ semble en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;-2[$.
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent si $x = -2$.
b.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	

c. Sur $]-2\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ ($f(x) - g(x) > 0$).

Quiz

21 B **22** C **23** C **24** A
25 C **26** A et D **27** C **28** C
29 B **30** B et D **31** A et C

Les incontournables

37 **a.** $2{,}5(x+3)^2 - 13{,}5 = 2{,}5x^2 + 15x + 9$
$= f(x)$
b.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f		↘	$-13{,}5$	↗	

38 **a.** $h(t) = -t^2 + 2t + 3$
$-(t-1)^2 + 4 = -t^2 + 2t + 3 = h(t)$
b.

x	0		1		3
Variations de h	3	↗	4	↘	0

39 **a.** $2x^2 + 12x - 6 = 2(x+3)^2 - 24$
b. $-3x^2 + 6x + 9 = -3(x-1)^2 + 12$

40 **a.** $f_1(x) = (x+7)^2 - 6$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
Variations de f_1		↘	-6	↗	

b. $f_2(x) = (x-6)^2 + 20$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Variations de f_2		↘	20	↗	

c. $f_3(x) = -(x+3)^2 + 8$
Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f_3		↗	8	↘	

d. $f_4(x) = 4((x-1)^2 - 1) = 4(x-1)^2 - 4$.
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f_4		↘	-4	↗	

e. $f_5(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$
Le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de f_5		↘	$\frac{14}{3}$	↗	

f. $f_6(x) = -5\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 1$

Le coefficient de x^2 est négatif.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variations de f_6	$\nearrow$	1	$\searrow$

41 **a.** $a = 6$, $b = 7$ et $c = 2$. $\Delta = 1 > 0$ donc $x_1 = \frac{-7-1}{12} = \frac{-2}{3}$ et $x_2 = \frac{-7+1}{12} = \frac{-1}{2}$.

b. $a = -5$, $b = 10$ et $c = 1$. $\Delta = 120 > 0$ donc $x_1 = \frac{5-\sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{-10+\sqrt{120}}{-10} = \frac{5+\sqrt{30}}{5}$.

c. $4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

d. $a = -1$, $b = \sqrt{8}$ et $c = -19$. $\Delta = -68 < 0$ donc l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

42 **a.** On résout $-x^2 + 8x - 15 = 0$. $\Delta = 4 > 0$ donc $x_1 = \frac{-8-2}{-2} = 5$ et $x_2 = \frac{-8+2}{-2} = 3$.

$g(x) = 16x^2 - 8x + 1 = (4x-1)^2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

b. $f(x) = -(x-3)(x-5)$ et $g(x) = (4x-1)^2$.

43 **a.** On résout $2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$\Delta = 81 > 0$ donc $x_1 = \frac{-7-9}{4} = -4$ et

$x_2 = \frac{-7+9}{4} = 0{,}5$.

$f_1(x) = 2(x-0{,}5)(x+4) = (2x-1)(x+4)$

b. On résout $108x^2 - 36x + 3 = 0$.

$\Delta = 0$ donc $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.

$f_2(x) = 108\left(x \quad \frac{1}{6}\right)^2$

c. On résout $-3x^2 + x + 2 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$ donc $x_1 = \frac{-1 \quad 5}{-6} = 1$ et

$x_2 = \frac{-1 + 5}{-6} = -\frac{2}{3}$.

$f_3(x) = -3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = -(x-1)(3x+2)$

d. $f_4(x) = 49x^2 + 28x + 4 = (7x+2)^2$

$f_4(x) = 0 \Leftrightarrow (7x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{7}$.

$f_4(x) = (7x+2)^2$

44 **a.** $x_1 = 1$ est une racine évidente de f. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{7}{1} = 7$. Donc $x_1 \times x_2 = 7$, soit $x_2 = 7$.

Ainsi $f(x) = (x-1)(x-7)$.

b. $x_1 = 2$ est une racine évidente de g. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-10}{10} = -1$.

Donc $x_1 \times x_2 = -1$ soit $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ainsi $g(x) = 10(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

c. $x_1 = 2$ est une racine évidente de h. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{-12}{-1} = 12$.

Donc $x_1 \times x_2 = 12$ soit $x_2 = 6$.

Ainsi $h(x) = -(x-2)(x-6)$.

d. $x_1 = 1$ est une racine évidente de k. Le produit des deux racines x_1 et x_2 vaut $\frac{c}{a} = \frac{23}{-5}$.

Donc $x_1 \times x_2 = -\frac{23}{5}$ soit $x_2 = -\frac{23}{5}$.

Ainsi $k(x) = -5(x-1)\left(x + \frac{23}{5}\right)$.

45 **a.**

x	$-\infty$		$-7-\sqrt{6}$		$-7+\sqrt{6}$		$+\infty$
Signe de $f_1(x)$		+	0	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_2(x)$		+	

c.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_3(x)$		−	

d.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $f_4(x)$		−	0	−	

46 **1. a.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	0	−	

b.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		2,5		$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	

2.a. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\frac{1}{6}\right[\cup \left]4\,; +\infty\right[$

b. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\frac{2}{7}\right] \cup \left[2{,}5\,; +\infty\right[$

c. $\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{6}\,; 4\right[$

d. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\frac{2}{7}\right[\cup \left]2{,}5\,; +\infty\right[$

47 **a.**

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-0{,}5$		$+\infty$
Signe de $6x^2 + 7x + 2$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\frac{2}{3}\right[\cup \left]-0{,}5\,; +\infty\right[$

b. $x_1 = \frac{5 \quad \sqrt{30}}{5}$ et $x_2 = \frac{5 + \sqrt{30}}{5}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 10x + 1$		−	0	+	0	−	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \frac{5 \quad \sqrt{30}}{5}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{30}}{5}\,; +\infty\right[$

c. $49x^2 + 28x + 4 = (7x+2)^2$. C'est un carré, donc toujours positif. Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

d.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-2x^2 + 4x - 4$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

48 **a.** $7x^2 > 3x - 5 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x + 5 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $7x^2 - 3x + 5$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

b. $-x^2 + x > 1 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-x^2 + x - 1$		−	

Ainsi $\mathcal{S} = \varnothing$.

c. $2x \leqslant 5x^2 + 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x + 4 \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $5x^2 - 2x + 4$		+	

Ainsi $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

d. $8x^2 - 10 \geqslant 7x^2 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 10$
$\Leftrightarrow x \leqslant -\sqrt{10}$ ou $x \geqslant \sqrt{10}$.

Ainsi $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\sqrt{10}\right[\cup \left]\sqrt{10}\,; +\infty\right[$.

e. $\frac{4}{3}x^2 < \frac{2}{7}x + 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 < 0$.

$\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{3 - 3\sqrt{197}}{28}$ et $x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{197}}{28}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $\frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{7}x - 3$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]\frac{3-3\sqrt{197}}{28}\,; \frac{3+3\sqrt{197}}{28}\right[$

f. $(2x-3)(6x+4) > x^2 - 6$
$\Leftrightarrow 11x^2 - 10x - 6 > 0$

$11x^2 - 10x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{91}}{11}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{91}}{11}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $11x^2 - 10x - 6$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \frac{5-\sqrt{91}}{11}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{91}}{11}\,; +\infty\right[$

49 **1.** $f(x) = 0{,}75x^2 + 9x + 24$

2. $(0{,}75x + 6)(x+4) = 0{,}75x^2 + 3x + 6x + 24$
$= f(x)$

3. a. $f(0) = 0{,}75 \times 0^2 + 9 \times 0 + 24 = 24$

b. $f(-4) = [0{,}75 \times (-4) + 6](-4 + 4) = 0$

c. $f(x) = -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 - 3 = -3$
$\Leftrightarrow x = -6$

d. $f(x) < -3 \Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 - 3 < -3$
$\Leftrightarrow 0{,}75(x+6)^2 < 0$
$\Leftrightarrow (x+6)^2 < 0$

Un carré est toujours positif donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

50 **1.** $g(t) = 3t^2 + 10t - 8$

2. $(3t-2)(t+4) = 3t^2 + 12t - 2t - 8 = g(t)$

3. a. $g(3) = 49$; $g(0) = -8$.

b. $g(t) = -8 \Leftrightarrow 3t^2 + 10t - 8 = -8$
$\Leftrightarrow 3t^2 + 10t = 0 \Leftrightarrow t(3t + 10) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = -\frac{10}{3}$.

$\mathcal{S} = \left\{0\,; \frac{10}{3}\right\}$

c. $g(t) = 0 \Leftrightarrow (3t-2)(t+4) = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ ou $t = -4$.

t	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3t^2 + 10t - 8$		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -4\right[\cup \left]\frac{2}{3}\,; +\infty\right[$

Chapitre 4. Dérivation

Réactivation

1 **a.** (d_1) admet une équation de la forme $y = mx + p$ (car $x_A \neq x_B$).

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-8}{2} = -4$.

$y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 1 = -4 \times 3 + p \Leftrightarrow p = 13$.

$(d_1) : y = -4x + 13$.

b. (d_2) admet une équation de la forme $y = mx + p$ (car $x_C \neq x_D$).

$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-3}{3} = -1$.

$y_C = mx_C + p \Leftrightarrow 2 = -1 \times (-2) + p \Leftrightarrow p = 0$.

$(d_2) : y = -x$.

c. $y_E = y_F = 0$ donc (d_3) a pour équation $y = 0$.

2 (d_1) a une pente égale à 0,5.

(d_2) a une pente égale à $\frac{-2}{3}$. (d_3) a une pente égale à -1.

(d_4) a une pente égale à 3.

(d_5) a une pente égale à 0.

3 **a.** Vrai. (d_1) a une pente égale à -3 et (d_2) a une pente égale à 3.

b. Vrai. (d_3) a une pente égale à 2 et (d_4) a une pente égale à $\frac{1}{2}$.

4 (DA) admet une équation de la forme $y = mx + p$ (car $x_A \neq x_D$).

$m = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{25}{12}$.

$y_D = mx_D + p \Leftrightarrow 25 = \frac{25}{12} \times 20 + p \Leftrightarrow p = -\frac{50}{3}$.

(DA) : $y = \frac{25}{12}x - \frac{50}{3}$.

$\frac{25}{12}x_T - \frac{50}{3} = \frac{25}{12} \times 24 - \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \neq y_T$.

Donc T $\notin$ (DA) ; Lila ne trouvera pas le trésor.

5 **1.** M appartient à la courbe représentative de la fonction carré donc $y_M = a^2$. Réponse **b**.

2. La pente de (AM) vaut $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{a^2 - 1}{a - 1}$. Réponse **a**.

3. $x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a$ et $x = -a$. Réponse **c**.

6 **a.** $f_1(x) = x^3 + 5x + 7 = u(x) + v(x)$ où $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto 5x + 7$. $D = \mathbb{R}$.

b. $f_2(x) = 4x^3 = k \times u(x)$ où $u : x \mapsto x^3$ et $k = 4$. $D = \mathbb{R}$.

c. $f_3(x) = \sqrt{x} - 5x + 3 = u(x) + v(x)$ où $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto -5x + 3$. $D = [0 ; +\infty[$.

d. $f_4(x) = \frac{3x^2 + 5}{3} = x^2 + \frac{5}{3} = u(x) + v(x)$ où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \frac{5}{3}$. $D = \mathbb{R}$.

e. $f_5(x) = -3 \times \frac{1}{x} = k \times u(x)$ où $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $k = -3$. $D = \mathbb{R}^*$.

f. $f_6(x) = x^2 + 28x - 7 = u(x) + v(x)$ où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto 28x - 7$. $D = \mathbb{R}$.

g. $f_7(x) = 5 \times \frac{1}{x} = k \times u(x)$ où $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $k = 5$. $D = \mathbb{R}^*$.

h. $f_8(x) = -\frac{7}{4} \times x^3 = k \times u(x)$ où $u : x \mapsto x^3$ et $k = -\frac{7}{4}$. $D = \mathbb{R}$.

Quiz

13 A et C **14** B et C **15** B **16** B et D

17 A **18** C **19** A et B **20** A et D

21 B **22** B, C et D **23** A et C

Les incontournables

31 **a.** $t(h) = \frac{-2(2+h) + 3 - (-2 \times 2 + 3)}{h} = -2$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -2$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = -2$.

b. $t(h) = \frac{2(-1+h) - 5 - (2 \times (-1) - 5)}{h} = 2$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 2$.

c. $t(h) = \frac{2(2+h)^2 - 3 - (2 \times 2^2 - 3)}{h} = 8 + 2h$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 8$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = 8$.

d. $t(h) = 13 + 2h$. $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 13$ donc l est dérivable en 2 et $l'(2) = 13$.

32 **a.** $t(h) = \frac{\sqrt{5+h-5} - \sqrt{5-5}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 5.

b. $t(h) = 2 + 3h$. $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 2$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 2$.

c. $t(h) = \frac{\sqrt{4(2+h)-2} - \sqrt{4 \times 2 - 2}}{h}$

$= \frac{1}{\sqrt{6+h} + \sqrt{6}}$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ donc k est dérivable en 2 et $k'(2) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.

d. $t(h) = \frac{\frac{1}{h-1} - \frac{1}{0-1}}{h} = \frac{1}{h-1}$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -1$ donc l est dérivable en 0 et $l'(0) = -1$.

33 **a.** La tangente à $\mathcal{P}$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(-1) = 0$.

b. On étudie la dérivabilité de f en $a = -2$: $t(h) = 2h - 4$; $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -4$ donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

Ainsi $\mathcal{P}$ admet une tangente au point d'abscisse -2, qui a pour équation :

$$y = f(-2) + (-4)(x - (-2)),$$

soit $y = -4x - 11$.

34 **a.** $t(h) = \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 1 - (2^2 + 3 \times 2 - 1)}{h}$

$= h + 7$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f(2) + f'(2) \times (x - 2)$, soit $y = 7x - 5$.

b. $t(h) = \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{9+3h}$.

$\lim\limits_{h \to 0} t(h) = -\frac{1}{9}$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -\frac{1}{9}$. La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = f(3) + f'(3) \times (x - 3)$, soit $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$.

35 **a.** $\mathcal{T}$ a pour équation $y = -2x + 2$ donc $f'(1) = -2$.

b. $f'(a) = 0$ pour $a = 0$ et $a = 2$.

36 **a.** f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -18x^2$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -8x$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -6x + 2$.

d. k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = -6x^2 + 14x - \frac{1}{3}$.

e. l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = \frac{10x - 2}{3}$.

37 **a.** f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{6x}{5}$.

b. g dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -10x + 7{,}2$.

c. h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 16x + \frac{5}{7}$.

d. $k(x) = 9x^2 - 42x + 49$.

k dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 18x - 42$.

e. $l(x) = 5^2 - (3x)^2 = 25 - 9x^2$.

l dérivable sur $\mathbb{R}$ et $l'(x) = -18x$.

38 **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2 - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$, $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = 3(x^2 - 1) + 2x \times 3x = 9x^2 - 3$.

b. $g = u \times v$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 3x - 5$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2$, $v'(x) = 3$.

$g'(x) = -2(3x - 5) + 3(-2x + 3) = -12x + 19$.

c. $h = u \times v$ avec $u(x) = -5x^2 + 1$ et $v(x) = 2x^2 + 3x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -10x$, $v'(x) = 4x + 3$.

$h'(x) = -40x^3 - 45x^2 + 4x + 3$.

d. $k = u \times v$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = 3x - 5$. k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $v'(x) = 3$.

$k'(x) = -\frac{1}{x^2}(3x - 5) + 3 \times \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2}$.

39 **a.** $f = u \times v$ avec $u(x) = 5\sqrt{x}$ et $v(x) = 3x + 1$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 3$.

$f'(x) = \frac{45}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

b. $g = u \times v$ avec $u(x) = 10x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $u'(x) = 10$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$g'(x) = 10\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 10x = 15\sqrt{x}$.

c. $h = u \times v$ avec $u(x) = 3\sqrt{x} - 1$ et $v(x) = 2x + 1$. h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, $v'(x) = 2$.

$h'(x) = 12\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - 3$.

d. $k = u^2$ avec $u(x) = 5x + 1$. k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$.

$k'(x) = 2 \times 5(5x + 1) = 10(5x + 1)$.

40 **a.** $f = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = -2x + 4$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $v'(x) = -2$.

Donc $f'(x) = -\frac{-2}{(-2x+4)^2} = \frac{2}{(-2x+4)^2}$.

b. $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x + 6$. $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.

$g'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x-1)}{(2x+6)^2} = \frac{20}{(2x+6)^2}$.

c. $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x^2 + 1$.

$v(x) = 0$ n'a pas de solution donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$. $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.

$h'(x) = \frac{3(x^2 + 1) - 2x(3x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 6$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-6\}$. $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$.

$k'(x) = \frac{3x^2(x - 6) - x^3}{(x+6)^2} = \frac{2x^3 + 18x^2}{(x+6)^2}$.

41 **a.** $f = \frac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2$. $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2}{x^3}$.

b. $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = -3x + 1$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -3$.

$g'(x) = \frac{2(-3x+1)-(-3)(2x)}{(-3x-1)^2} = \frac{2}{(-3x-1)^2}$.

c. $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x + 1$ et $v(x) = x^2 + 5x - 1$.

L'équation $v(x) = 0$ admet deux solutions :

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}$.

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{x_1 ; x_2\}$. $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x + 5$.

$h'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{(x^2+1)^2}$.

d. $k = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. $u'(x) = 0$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$k'(x) = \frac{0 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Chapitre 5. Dérivation : applications à l'étude de fonctions

Réactivation

1 **a.** $\mathcal{S} = \{-1 ; 0 ; 1\}$

b. $f(x) > 0$ pour $x \in\,]-1 ; 0[\, \cup\,]1 ; 1,5[$.
$f(x) < 0$ pour $x \in [-1,5 ; -1[\, \cup\,]0 ; 1[$.

c.

x	$-1,5$		-1		0		1		$1,5$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2

x	-3		$\frac{1}{3}$		3
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	-3		2		3
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

x	-3		-1		1		3
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		-2		0		3
Signe de $k(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3 **a.**

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

b.

x	-3		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $(-x + 1)$		$+$	$+$		0	$-$	
Signe de $(-x - 2)$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $h(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

d. $k(x) = -(x-3)^2$, $\Delta = 0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$-$	

4 **a.** $R(x) = 120x$

b. $R(x) - C(x) = x^2 - 100x + 900$

On résout $R(x) - C(x) = 0$: $\Delta = 6\,400$, $x_1 < 0$ et $x_2 = 90$.

x	5		90		100
Signe de $R(x) - C(x)$		$-$	0	$+$	

Nombre x de pièces pour que la production soit rentable : $90 < x \leqslant 100$.

5 **a.** $I = \mathbb{R}$, $f'(x) = -15x^4$

b. $I = \mathbb{R}$, $g'(x) = 16x$

c. $I = \mathbb{R}$, $h'(x) = -14x + 3$

d. $I = \mathbb{R}$, $k'(x) = 9x^2 - 10x - \frac{1}{4}$

e. $I =]0 ; +\infty[$, $l'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3$

6 Faux : f et h ont la même dérivée qui vaut 2 mais la dérivée de g vaut $4x$.

7 $C'(x) = x + 2$ et $C'(20) = 22$.
Le coût marginal pour une production journalière de 20 L est de 2 200 €.

Quiz

12 B **13** D **14** D
15 A et D **16** B **17** C

Les incontournables

23 **a.**

x	-4		-2		2		4
Variations de f		↗		↘		↗	

b.

x	-4		-2		2		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

24

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

25 **a.**

x	-1		0		3		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.

x	-1		0		3		4
Variations de f	$-\frac{11}{6}$	↗	0	↘	$-4,5$	↗	$-\frac{8}{3}$

26 **a.** $f'(x) = -8x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	$-10,94$	↘	

b. $g'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-3x + 4)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g		↘	-7	↗	-4	↘	

c. $h'(x) = -18x^2 + 22x - 3$

$\Delta = 268$; $x_1 = \frac{11-\sqrt{67}}{18}$ et $x_2 = \frac{11+\sqrt{67}}{18}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h		↘	$h(x_1)$	↗	$h(x_2)$	↘	

d. $k'(x) = -12x + 30$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de k		↗	$62,5$	↘	

e. $l'(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de $l'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de l		↗	38	↘	2	↗	

27 **a.** $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	$-0,5$	↗	$0,5$	↘	

b. $g'(x) = \frac{7}{x^2}$

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$\Vert$	$+$	
Variations de g	$\Vert$	↗	

c. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

x	0		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$\Vert$	$+$	
Variations de h		↗	

d. $k'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de k		↗	-2	↘	$\Vert$	↘	2	↗	

28 **a.** Oui : maximum en $x = 2$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 2$ en changeant de signe.

b. Non car la dérivée est toujours positive sur I.

c. Oui : maximum en $x = 0$ car la dérivée, positive puis négative, s'annule en $x = 0$ en changeant de signe.

d. Oui : minimum en $x = -2$ car la dérivée, négative puis positive, s'annule en $x = -2$ en changeant de signe.

29 $B'(x) = -2x + 10$

x	0		5		10
Signe de $B'(x)$		+	0	–	
Variations de B		↗	16	↘	

Nombre de clés USB à produire mensuellement pour obtenir un bénéfice maximal : 5 000.
Bénéfice mensuel maximal : 16 000 €.

30 On pose ME = x et on note $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme ENZO.
$\mathscr{A}(x) = 2x^2 - 6x + 8$ et $\mathscr{A}'(x) = 4x - 6$.

x	0		$\frac{3}{2}$		4
Signe de $\mathscr{A}'(x)$		–	0	+	
Variations de $\mathscr{A}$		↘	3,5	↗	

Il existe une position du point E pour laquelle $\mathscr{A}$ est minimale : ME = 1,5.

Chapitre 6. Fonction exponentielle

Réactivation

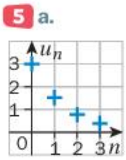
1 **a.** 3^{12} **b.** 5^6 **c.** 4^{-2}
d. 2^8 **e.** 6^{-2} **f.** 3^6

2 **a.** $5^8 \times 3^{-3}$ **b.** $10^{-7} \times 7^8$
c. $3^8 \times 10^{13}$ **d.** $2^3 \times 10^{-12}$

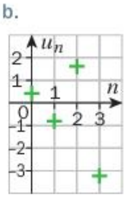
3 $\dfrac{4{,}4 \times 10^8 \times 1{,}35 \times 10^{-6}}{10^{-1}} = 5{,}94 \times 10^3$
soit 5 940 km.

4 **a.** La suite (u_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme 2.
b. La suite (v_n) n'est pas géométrique.
c. La suite (w_n) est géométrique de raison 0,2 et de premier terme –5.
d. La suite (t_n) n'est pas géométrique.

5 **a.**



b.



6 **a.** La suite (u_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme 1.
b. La suite (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme 3.
c. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 2.
d. La suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 4.

7 **a.** $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$
b. $g'(x) = 15(5x-2)^2$
c. $h'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$

8 **a.** $k'(x) = (-4)(-2x+1) = 8x - 4$
b. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = 1 + 4(x-1) = 4x - 3$.

Quiz

17 A et B **18** C **19** B **20** A
21 A **22** B et D **23** A **24** B, C et D
25 B et C **26** A et C **27** A
28 A et C **29** A et C **30** B et C

Les incontournables

37 **a.** $f'(x) = (3+3x)e^x$
b. $g'(x) = \dfrac{(2x \quad 1)e^x}{(2x+1)^2}$
c. $h'(x) = e^x\left(\sqrt{x} \quad \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
d. $k'(x) = (3x^2 + x + 3)e^x$

38 **1. c** **2. b** **3. d** **4. a**

39 **a.** e^{9x} **b.** $e^{x+2} + 1$
c. $e^{3x} - e^{2x}$ **d.** $1 - e^{x+10}$

40 **a.** $\mathscr{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ **b.** $\mathscr{S} = \varnothing$
c. $\mathscr{S} = \{-3 ; 3\}$
d. $\mathscr{S} = \left\{\frac{7}{4}\right\}$ **e.** $\mathscr{S} = \{-1 ; 3\}$
f. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

41 **a.** $\mathscr{S} =]0 ; +\infty[$ **b.** $\mathscr{S} =]-\infty ; 3]$
c. $\mathscr{S} =]-\infty ; -2[$ **d.** $\mathscr{S} = [2 ; +\infty[$
e. $\mathscr{S} =]-3 ; 2[$ **f.** $\mathscr{S} = \left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$

42 **a.** $f'(x) = -5e^{-5x+3}$.
f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = \dfrac{(6x-13)e^{2x+1}}{(3x-5)^2}$.
g est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{5}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{5}{3} ; \frac{13}{6}\right]$,
et croissante sur $\left[\frac{13}{6} ; +\infty\right[$.
c. $h'(x) = (-6x+13)e^{3x}$.
h est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{13}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{13}{6} ; +\infty\right[$.
d. $k'(x) = \dfrac{(\quad x^2 \quad x \mid 3)e^{-x+2}}{(x^2 - x - 2)^2}$
k est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right]$,
croissante sur $\left[\frac{-\sqrt{13}-1}{2} ; -1\right[$,
croissante sur $\left]-1 ; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$,
décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2} ; 2\right[$
et décroissante sur $]-2 ; +\infty[$.

43 $f : \mathscr{C}_4$ (orange) ; $g : \mathscr{C}_2$ (rouge) ;
$h : \mathscr{C}_1$ (verte) ; $k : \mathscr{C}_3$ (bleue).

44 **a.** … décroissante … $(0 ; 1)$ et $(1 ; e^{-5})$.
b. … croissante … $\left(0 ; \frac{3}{e^4}\right)$ et $(1 ; 3e)$.
c. … décroissante … $\left(0 ; -\frac{3}{e}\right)$ et $(1 ; -3e)$.

45 **a.** croissance exponentielle
b. décroissance exponentielle
c. croissance exponentielle
d. décroissance exponentielle

46 **a.** $3e^{0,69t}$ **b.** $0{,}2e^{1,1t}$
c. $(-4)e^{0,26t}$ **d.** $5e^{-0,22t}$

Chapitre 7. Fonctions trigonométriques

Réactivation

1 **a.** $\cos \widehat{IVF} = \dfrac{VI}{VF}$; $\cos \widehat{VFI} = \dfrac{IF}{VF}$
b. $\sin \widehat{IVF} = \dfrac{IF}{VF}$; $\sin \widehat{VFI} = \dfrac{VI}{VF}$
c. $\tan \widehat{IVF} = \dfrac{IF}{VI}$; $\tan \widehat{VFI} = \dfrac{VI}{IF}$

2 **a.** $\dfrac{AB}{EB} = \sin \widehat{AEB} = \cos \widehat{ABE}$
b. $\dfrac{AG}{AE} = \sin \widehat{AEG} = \cos \widehat{EAG}$
c. $\dfrac{BF}{EB} = \sin \widehat{BEF} = \cos \widehat{EBF}$

3 **a.** $\cos \widehat{MES} = \dfrac{EM}{ES} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$
b. $\cos \widehat{ESM} = \dfrac{MS}{ES} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$
c. $\cos \widehat{TSM} = \dfrac{MS}{TS} = \dfrac{4}{\sqrt{52}} = \dfrac{4}{2\sqrt{13}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

4 **a.** $\sin \widehat{PLI} = \dfrac{PI}{PL} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$; $\sin \widehat{PLI} = \dfrac{ES}{EL} = \dfrac{2}{EL}$.
b. $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{EL}$, d'où EL = 3 cm.
c. $\cos \widehat{PLI} = \dfrac{IL}{PL} = \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos \widehat{PLI} = \dfrac{SL}{EL} = \dfrac{SL}{3}$.
D'où SL = $\sqrt{5}$ cm.

5 **a.** Vrai **b.** Vrai

6 **a.** $\widehat{BAD} \approx 48{,}2°$. **b.** AC = 13,5 cm.
CE = 9 × tan $\widehat{BAD}$ ≈ 10 cm.

7 Faux, car si le triangle TIZ était rectangle en T, on aurait : $\tan 25° = \dfrac{TZ}{TI}$.
Or, $\dfrac{TZ}{TI} = \dfrac{10{,}9}{23{,}5} \approx 0{,}4638$ et $\tan 25° \approx 0{,}4663$.

8 $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{422}{1\,453}\right) \approx 17°$

Quiz

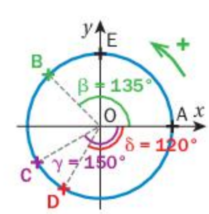
17 C **18** A et C **19** A, B, C et D
20 D **21** B **22** A **23** A, C et D
24 B **25** B **26** C **27** A
28 C **29** C

Les incontournables

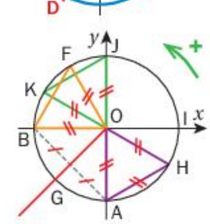
35 **1. a.** $L \approx 2{,}4$ cm **b.** $L \approx 6{,}3$ cm
2. a. $L \approx 1$ cm **b.** $L \approx 4{,}7$ cm

36 **a.** $M\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ **b.** $N\left(\dfrac{10\pi}{9}\right)$ **c.** $P\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

37
$\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{12\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6}$
$= 2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$



38 OKJ, OFB et OHA sont des triangles équilatéraux. [OG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OBA}$.



39 **a.** $-\frac{13\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}$.

Donc le point M est associé au réel $-\frac{\pi}{3}$.

b. Sur $[0 ; 2\pi]$, M est associé au réel $\frac{5\pi}{3}$.

40 **a.** Oui, car $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$.

b. Non, car $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$.

c. Oui, car $\frac{19\pi}{10} = \frac{20\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = 2\pi - \frac{\pi}{10}$.

d. Non, car $\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 4\pi - \frac{5\pi}{6}$

et $-\frac{5\pi}{6} \neq -\frac{7\pi}{6}$.

e. Non, car $\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}$

et $-\frac{2\pi}{5} \neq -\frac{6\pi}{5}$.

f. Non, car $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

41 **a.** $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0$.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42 **a.** $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}59$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0{,}81$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}95$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}97$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}26$.

$\cos\left(\ \ \frac{\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(\ \ \frac{\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

b. $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}17$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0{,}98$.

$\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}14$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \approx 0{,}99$.

$\cos\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx 0{,}9$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right) \approx -0{,}43$.

$\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx 0{,}31$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \approx -0{,}95$.

43 **a.** … l'axe des ordonnées.

b. … l'origine du repère.

44 **a.** Vrai, car elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Faux, car elle est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

c. Vrai : ce minimum unique sur $[0 ; 2\pi]$ est égal à -1 en $x = \pi$.

d. Faux, car elle est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

e. Faux, car sur $[0 ; 3\pi]$, il existe deux maxima égaux à 1 en $x = \frac{\pi}{2}$ et en $x = \frac{5\pi}{2}$.

f. Vrai.

Chapitre 8. Produit scalaire

Réactivation

1 **a.** $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{SH}$ et $\overrightarrow{ED}$.

b. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{TS}$.

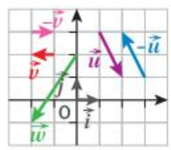
c. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{TS}$.

d. $\overrightarrow{TS}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{EF}$;

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 **a.** et **b.**



c. $-\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $-\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

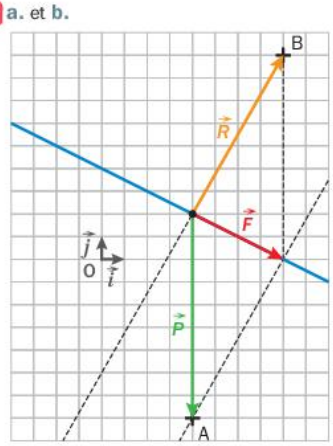
b. $D(x_D ; y_D)$. ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix}$, soit D(−3 ; −10).

c. $AB = \sqrt{(4\ \ 2)^2 + (5\ \ (\ 3))^2} = \sqrt{68}$ et

$AD = \sqrt{(\ 3\ \ 2)^2 + (\ 10\ \ (\ 3))^2} = \sqrt{74}$.

4 **a.** $\overrightarrow{AC}$ **b.** $\vec{0}$ **c.** $\overrightarrow{BA}$
d. $\overrightarrow{AO}$ **e.** $\vec{0}$ **f.** $\overrightarrow{BD}$

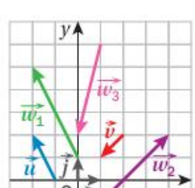
5 **a.** et **b.**



$\vec{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$, donc $\vec{F}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c. D'après le principe d'inertie, le skieur ne peut pas avoir un mouvement rectiligne uniforme car la résultante des forces n'est pas égale au vecteur nul.

6



7 **a.** A(0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1).

$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $H\left(-\frac{5}{4} ; \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$

$= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $G\left(\frac{-9}{4} ; \frac{3}{2}\right)$.

b. $\frac{-9}{4} \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right) \times \frac{3}{2} = \frac{23}{8} \neq 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, G et H ne sont pas alignés.

8 **a.** $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 8\,000\cos(30) \\ 8\,000\sin(30) \end{pmatrix}$

soit $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 4\,000 \\ 4\,000\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

donc $A(4\,000 ; 4\,000\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 6000\cos(45) \\ -6000\sin(45) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 3\,000\sqrt{2} \\ -3\,000\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

donc $B(3\,000\sqrt{2} ; -3\,000\sqrt{2})$.

b. $\overrightarrow{OR}\begin{pmatrix} 4\,000 + 3\,000\sqrt{2} \\ 4\,000\sqrt{3} - 3\,000\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

donc $R(4000 + 3000\sqrt{2} ; 4000\sqrt{3}\ \ \ 3000\sqrt{2})$.

c. L'ordonnée de $\overrightarrow{OR}$ n'est pas nulle, donc $\overrightarrow{OR}$ et $\vec{i}$ ne sont pas colinéraires, donc R n'appartient pas à (d).

Quiz

17 B et C **18** A et C **19** B et D
20 C **21** B et C **22** A et D **23** B
24 B **25** C **26** C **27** C

Les incontournables

34 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(30) = 10\sqrt{3}$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times DC = 4 \times 5 = 20$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 6 \times \cos(60) = 12$.

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 3^2) = 1$.

35 **a.** $-2\vec{u}\cdot(3\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
$= -6 \times 5^2 - 2 \times 8 = -166$

b. $(2\vec{u} - 3\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$
$= -8\vec{u}^2 + 14\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}^2 = -115$

c. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{50}$

d. $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2} = \sqrt{18}$

36 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \times (-1) + 2 \times 0 = 1$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 6 + (-3) \times 4 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

37 **a.** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, donc

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -6 \times (-3) + 2 \times (-9) = 0$.

c. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en B.

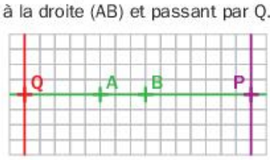
38 Avec le théorème de Pythagore dans ABD, $BD^2 = 3^2 + 4{,}5^2 = 29{,}25$.
On note C' le projeté orthogonal de C sur (AB), C'B = 2,5 et avec le théorème de Pythagore dans C'BC, $BC^2 = 3^2 + 2{,}5^2 = 15{,}25$.
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$= -(BA^2 + BD^2 - AD^2) + (BC^2 + BD^2 - CD^2)$
$= -(20{,}25 + 29{,}25 - 9) + (15{,}25 + 29{,}25 - 4)$
$= 0$
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, donc les diagonales sont bien perpendiculaires.

39 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$,
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 \times (-6) + 4 \times (-2) = 16$.
b. $AB = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ et $AC = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$.
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{16}{\sqrt{32}\sqrt{40}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
c. $\widehat{BAC} \approx 63°$.

40 **a.** $x = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(45)$
$= 41 - 20\sqrt{2}$
b. $x = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(30)$
$= 13 - 6\sqrt{3}$
c. $x = 4^2 + 5{,}5^2 - 2 \times 4 \times 5{,}5 \times \cos(60)$
$= 24{,}25$

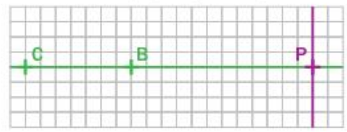
41 **a.** $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{C})$,
donc $\cos(\widehat{C}) = \dfrac{3^2 - 4{,}3^2 - 6{,}7^2}{-2 \times 4{,}3 \times 6{,}7}$, $\widehat{C} \approx 19{,}3°$.
On trouve de même $\widehat{B} \approx 28{,}3°$ et donc $\widehat{A} = 180 - \widehat{B} - \widehat{C} \approx 132{,}4°$.
b. $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 - \dfrac{BC^2}{2}$, d'où $AI^2 = 2{,}5225$
et donc $AI = \sqrt{2{,}5225}$.

42 **1. a.** On cherche P appartenant à la demi-droite [AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = 20$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = AB \times AP = 20$ et donc $AP = \dfrac{10}{3}$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 20 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$
L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par P.
b. On cherche Q appartenant à la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -10$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -AB \times AQ = -10$
et donc $AQ = \dfrac{5}{3}$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AQ}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QM} = 0$
L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par Q.
2.



43 **a.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(60)$
$= 49$, donc $BC = 7$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60) = 20$.
b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$
$= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - AB^2 = -84$
c. On cherche P appartenant à la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC} = -84$, et donc $-BP \times BC = -84$ et donc $BP = 12$.

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = -84 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BP}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$
L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (BC) et passant par P.



Chapitre 9. Géométrie repérée

Réactivation

1 **a.** $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1-3\\0-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}-1-1\\-1-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.
b. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ donc P est le milieu du segment [MN].

2 **a.** $I\left(\dfrac{2+(-3)}{2} ; \dfrac{1+1}{2}\right)$ donc $I\left(-\dfrac{1}{2} ; 1\right)$.
b. $J\left(\dfrac{-2+1}{2} ; \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$ donc $J\left(-\dfrac{1}{2} ; 1\right)$.
c. Les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

3 $\mathscr{C}$ a pour centre A et pour rayon AB.
$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^2 = AB^2$.
$AM^2 = (-2-1)^2 + (1-1)^2 = 9$
et $AB^2 = (2-1)^2 + (4-1)^2 = 1 + 9 = 10$.
$AM^2 \neq AB^2$ donc le point M n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

4 **a.** Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$: A(0 ; 2) ; B(2 ; 1) et C(0,5 ; –2).
$AB^2 = (2-0)^2 + (1-2)^2 = 5$
$AC^2 = (0{,}5-0)^2 + (-2-2)^2 = 16{,}25$
$BC^2 = (0{,}5-2)^2 + (-2-1)^2 = 11{,}25$
$AC^2 = BC^2 + AB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
b. $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times BC}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{11{,}25}}{2} = \dfrac{7{,}5}{2} = 3{,}75$ unités
L'unité correspond ici à un carré d'aire $2\,100 \times 2\,100 = 4\,410\,000$ km².
Donc l'Amérique du Sud a une superficie d'environ $3{,}75 \times 4\,410\,000 = 16\,537\,500$ km².

5 **a.** $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$ est vecteur directeur de (d_1).
$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u_2}$ est vecteur directeur de (d_2).
$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u_3}$ est vecteur directeur de (d_3).
$\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u_4}$ est vecteur directeur de (d_4).
b. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), alors une équation cartésienne de (d) est $ax + by + c = 0$; on détermine c à l'aide d'un point de la droite.
$(d_1) : -x + 2y + 4 = 0$; $(d_2) : y + 4 = 0$;
$(d_3) : x - 3 = 0$; $(d_4) : 4x + y - 1 = 0$.

6 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+3\\-2-6\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (AB). Une équation de (AB) est de la forme $2x + y + c = 0$. $B \in (AB)$ donc $2 \times 1 + (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.
Une équation de (AB) est $2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$.
2. $-2 \times 2 = -4$. Les coordonnées de C vérifient l'équation de la droite (AB), donc C appartient à (AB).
3. a. $3x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$
Le coefficient directeur de (d) est $-\dfrac{3}{4}$.
Il est différent du coefficient directeur de (AB) qui est égal à –2. Donc (d) et (AB) ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.
b. Les coordonnées du point d'intersection I de (d) et (AB) vérifient :
$$\begin{cases} y = -2x \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases}.$$
Donc $I\left(-\dfrac{1}{5} ; \dfrac{2}{5}\right)$.

7 **1. a.** $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b. $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. a. $(-1) \times 4 + 5 \times 3 = 11 \neq 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
b. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} + \sqrt{2} \times (-3) = \sqrt{18} - 3\sqrt{2} = 0$
donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

8 **a.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow -3 \times 5 - (-1) \times (2a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 8$
b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
$\Leftrightarrow (b-1)(b+2) + 5 \times (-2) = 0$
$\Leftrightarrow b^2 + b - 12 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 = 7^2$
donc $b_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ et $b_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$.

9 On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous en prenant 1 cm comme unité

Dans ce repère : A(0 ; 0) ; C(24 ; 17) ; B(21 ; 14) ;
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}21\\14\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}24\\17\end{pmatrix}$.
A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 21 & 24 \\ 14 & 17 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$,
donc les points ne sont pas alignés.

Quiz

18 B **19** A **20** B et C **21** C et D
22 B **23** D **24** C et D **25** A
26 A et C **27** A **28** D **29** B

Les incontournables

36 **a.** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0+2\\1-4\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

d. $y = \frac{5}{4}x + 2 \Leftrightarrow 5x - 4y + 8 = 0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).

37 $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $3x - 4y + 1 = 0$, c'est donc un vecteur normal à la droite (d) cherchée.
Une équation de (d) est : $4x + 3y + c = 0$ avec c un nombre réel. $K \in (d)$ donc :
$4 \times 2 + 3 \times (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = 7$.
Une équation de (d) est $4x + 3y + 7 = 0$.

38 **1. a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m) de [AB] donc une équation de (m) est $3x - 2y + c = 0$.
Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;2\right)$, donc $\frac{3}{2} - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$.
Une équation de (m) est :

$$3x - 2y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x - 4y + 5 = 0.$$

b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice (m') de [AC] donc une équation de (m') est $-x - y + e = 0$.
Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{-3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$, donc $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} + e = 0 \Leftrightarrow e = 1$.
Une équation de (m') est $-x - y + 1 = 0$.

2. Les coordonnées du centre du cercle circonscrit vérifient le système :

$$\begin{cases} 6x - 4y + 5 = 0 \\ -x - y + 1 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{10} \\ x = \frac{-1}{10} \end{cases}.$$

Le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{10}\,;\frac{11}{10}\right)$.

39 Une équation de la droite perpendiculaire à (d) passant par A est $-3x + y + c = 0$ avec c un nombre réel.
$-3 \times 1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.
Donc les coordonnées du projeté orthogonal vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ -3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2{,}2 \\ x = 0{,}4 \end{cases}.$$

Le projeté a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}\,;\frac{11}{5}\right)$.

40 **a.** La droite (DE) admet $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Une équation de (DE) est $x + y + c = 0$.
D est sur cette droite, donc :
$-1 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$.
(DE) : $x + y - 3 = 0$
La droite perpendiculaire à (DE) passant par F admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation de cette droite est $-x + y + e = 0$ avec e un nombre réel.
$-(-2) + 1 + e = 0 \Leftrightarrow e = -3$
Son équation est donc $-x + y - 3 = 0$.
Les coordonnées de H vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ -x + y - 3 - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Donc H(0 ; 3).

b. $FH^2 = 4 + 4 = 8$ donc $FH = 2\sqrt{2}$.

c. $DE^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ donc $DE = 3\sqrt{2}$.

$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{DE \times FH}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 6$.

41 **a.** $(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 25$

b. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

c. $(x - 3)(x + 8) + (y - 5)(y - 6) = 0$

42 **a.** $DE^2 = 15^2 + 9^2 = 306$;
$EF^2 = 3^2 + 5^2 = 34$; $FD^2 = 12^2 + 14^2 = 340$.
$DE^2 + EF^2 = FD^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, EFD est rectangle en E.

b. Le cercle circonscrit à DEF a pour diamètre [FD].
Une équation de ce cercle est :
$(x - 6)(x + 6) + (y + 6)(y - 8) = 0$.

43 Une équation de la médiatrice de [GH] est $x = 1$. Une équation de la médiatrice de [GI] est $x - y + 1 = 0$.
Les coordonnées du centre C du cercle circonscrit vérifient :

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Donc C(1 ; 2).
Le rayon du cercle est CI avec $CI^2 = 1^2 + 4^2 = 17$.
Une équation du cercle est donc :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 17.$$

44 **a.** Cercle de centre O(5 ; –2) et de rayon 4.

b. Cercle de centre O(–3 ; 1) et de rayon 1.

c. Cercle de centre O(1 ; 0) et de rayon 5.

d. Cercle de centre O(0 ; –2) et de rayon $\sqrt{3}$.

e. Cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

f. $4x^2 + 4(y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$.

Cercle de centre O(0 ; 2) et de rayon $\frac{3}{2}$.

45 **a.** $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$
Cercle de centre O(–2 ; 3) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b. $x^2 + 5x + y^2 - 10y = -8$
$\Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 + (y - 5)^2 = 23{,}25$
Cercle de centre O(–2,5 ; 5) et de rayon $\sqrt{23{,}25}$.

c. $x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.
Ce n'est pas un cercle.

d. $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{7}{4} < 0$
Ce n'est pas un cercle.

e. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$
$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$
Cercle de centre O(–4 ; –3) et de rayon 5.

f. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$
Ce n'est pas un cercle : c'est le point de coordonnées (–1 ; 2).

46 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 + 6 - m^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = m^2 - 4$
Cette équation est celle d'un cercle
$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) > 0$
$\Leftrightarrow m\ ]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$

47 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$.

b. Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–5 ; –1).

c. La parabole passe par les points A(2 ; 0) et B(–4 ; 0) donc l'abscisse de son sommet est égal à $\frac{2 + (-4)}{2} = -1$ et $(-1 - 2)(-1 + 4) = -9$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées (–1 ; –9).

d. $y = -2x(x - 1) - 7 = -2x^2 + 2x - 7$
$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ et $-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} - 7 = \frac{-13}{2}$.
Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{13}{2}\right)$.

48 **a.** $\frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 0.5} = -3$. Oui, la droite d'équation $x = -3$ est axe de symétrie de la parabole.

b. Le sommet a pour coordonnées (3 ; 4). Non : c'est la droite d'équation $x = 3$ qui est l'axe de symétrie.

c. $y = x^2 - 2x - 6$ donc $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.
Non : c'est la droite d'équation $x = 1$ qui est l'axe de symétrie.

d. Le sommet a pour coordonnées (–1 ; –3). Non : c'est la droite d'équation $x = -1$ qui est l'axe de symétrie.

Chapitre 10. Probabilités conditionnelles

Réactivation

1 **a.** $\overline{V}$ est l'événement « ne pas tirer une boule verte » ; $\overline{I}$ est l'événement « ne pas tirer une boule avec un numéro impair » ; $V \cap I$ est l'événement « tirer une boule verte avec un numéro impair » et $V \cup I$ est l'événement « tirer une boule verte ou une boule avec un numéro impair ».

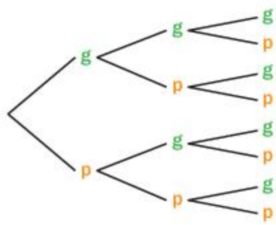
b. $\overline{V}$ contient 6 issues ; $\overline{I}$ contient 5 issues ; $V \cap I$ contient 2 issues et $V \cup I$ contient 7 issues.

2 **a.** « Tirer une boule avec le numéro 1 » est un événement élémentaire.

b. V et $\overline{V}$ sont incompatibles.
Les événements « tirer une boule avec le numéro 1 » et « tirer une boule avec le numéro 2 » sont incompatibles.

3 Les instructions **b** et **c** sont correctes.

4 **1.** On note g pour « gagné » et p pour « perdu ».



2. a. P(g, g, g) = $\frac{1}{8}$.

b. P(« au moins un client a obtenu un bon de réduction »)
= 1 − P(« aucun client n'a obtenu un bon de réduction »)
= 1 − P(p, p, p) = $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

5 **1.**

	Inscrits à l'exposition	Non inscrits à l'exposition	Total
Inscrits au théâtre	18	7	25
Non inscrits au théâtre	1	4	5
Total	19	11	30

2. a. P(« l'élève participe aux deux sorties »)
$= \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.
P(« l'élève ne participe à aucune sortie ») = $\frac{4}{30}$.

b. P(« l'élève est inscrit à l'exposition ») = $\frac{19}{30}$.
P(« l'élève n'est pas inscrit à l'exposition ») = $\frac{11}{30}$.

6 **1. a.** $\overline{C}$ est l'événement « ne pas obtenir un carreau » ; $\overline{F}$ est l'événement « ne pas obtenir une figure » ; $F \cap C$ est l'événement « obtenir une figure et un carreau » et $F \cup C$ est l'événement « obtenir une figure ou un carreau ».

b. $P(\overline{C}) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$; $P(\overline{F}) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$;
$P(F \cap C) = \frac{3}{32}$; $P(F \cup C) = \frac{17}{32}$.

2. a. P(« encore un as ») = $\frac{3}{31}$.

b. P(« un pique ») = $\frac{8}{31}$.

Quiz

13 B et C **14** D **15** A **16** C
17 A **18** B **19** C **20** C
21 B et D **22** A **23** D

Les incontournables

29 **1. a.** $P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}35 - 0{,}4 = 0{,}2$

b.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,2	0,15	0,35
$\overline{B}$	0,05	0,6	0,65
Total	0,25	0,75	1

2. a. $P_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8$; $P_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}35} = \frac{4}{7}$;
$P_A(\overline{B}) = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}2$; $P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}05}{0{,}65} = \frac{1}{13}$.

b. La probabilité de B sachant que A est réalisé vaut 0,8 ; la probabilité de A sachant que B est réalisé vaut $\frac{4}{7}$; la probabilité de $\overline{B}$ sachant que A est réalisé vaut 0,2 et la probabilité de A sachant que $\overline{B}$ est réalisé vaut $\frac{1}{13}$.

30 **1.**

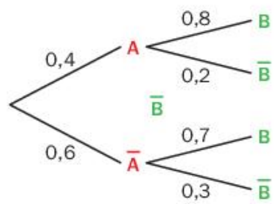
	Maths	SVT	Total
Manuel scolaire	35	30	65
Annales	15	10	25
Total	50	40	90

2. a. P(« manuel scolaire de maths ») = $\frac{35}{90}$
$= \frac{7}{18}$.

b. $P_{\text{« manuel scolaire »}}(\text{« Maths »}) = \frac{35}{65} = \frac{7}{13}$.

c. $P_{\text{« SVT »}}(\text{« Annales »}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

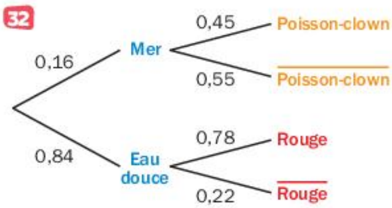
31 **a.**



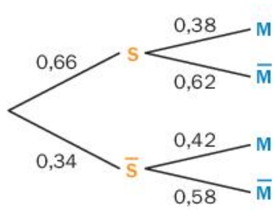
b. $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}3$.

c. $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$ et
$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.

32



33 **a.**



b. $P(S \cap M) = 0{,}38 \times 0{,}66 = 0{,}2508$ et
$P(\overline{S} \cap M) = 0{,}42 \times 0{,}34 = 0{,}1428$.

c. S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers ; on peut appliquer la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(M \cap S) + P(M \cap \overline{S})$
$= 0{,}2508 + 0{,}1428 = 0{,}3936$.
$P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0{,}2508}{0{,}3936}$
$= \frac{209}{328} \approx 0{,}637$.

d. P(M) est la probabilité que la guirlande choisie ait l'option minuteur ; $P_M(S)$ est la probabilité que la guirlande choisie fonctionne sur secteur sachant qu'elle possède l'option minuteur.

34 **a.** $P(A) \times P(B) = 0{,}21 \times 0{,}79$
$= 0{,}1659 \neq 0{,}17 = P(A \cap B)$
donc A et B ne sont pas indépendants.

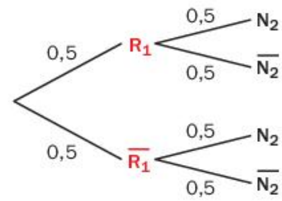
b. $P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$.
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}84 = 0{,}16 = P(A) \times P(B)$
donc A et B sont indépendants.

c. $P_A(B) = 0{,}1539 \neq P(B) = 0{,}81$
donc A et B ne sont pas indépendants.

35 A et B sont indépendants donc :
$P(B) = P_A(B) = 0{,}48$ et $P_B(A) = P(A) = 0{,}18$.
$P(A \cap B) = 0{,}18 \times 0{,}48 = 0{,}0864$.
$P(A \cup B) = 0{,}18 + 0{,}48 - 0{,}0864 = 0{,}5736$.

36 **1. a.** Comme on remet la carte dans le jeu entre les deux épreuves, celles-ci sont indépendantes.

b.



2. a. P(« deux cartes noires »)
$= P(\overline{R_1} \cap N_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

b. P(« au plus une carte rouge »)
= 1 − P(« deux cartes rouges »)
= 1 − 0,25 = 0,75.

Chapitre 11. Variables aléatoires

Réactivation

1 **a.** =D4/100

b. Oui.

c. Non, même si elle devrait rester proche de 0,1.

2 **a.**
$P(A) = 1 - (0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}16 + 0{,}19 + 0{,}17)$
$= 0{,}03$.
$P(B) = 0{,}16 + 0{,}19 + 0{,}17 = 0{,}52$.

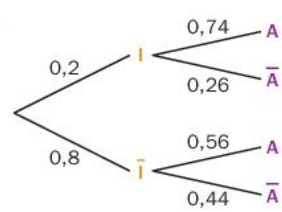
b. $0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}19 = 0{,}64$.

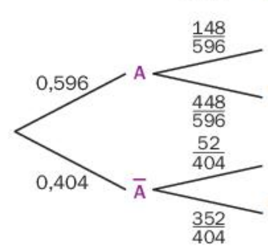
3 **a.** 0,08.

b. $0{,}017 + 0{,}475 = 0{,}492$.

c. $0{,}0073 + 0{,}045 + 0{,}017 + 0{,}0007 = 0{,}07$.

4 **a.**





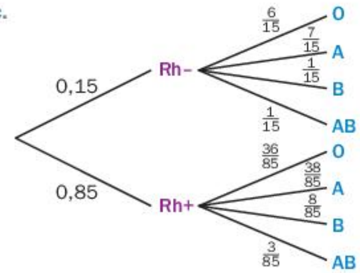
b.

	A	$\overline{A}$	Total
I	0,148	0,052	0,2
$\overline{I}$	0,448	0,352	0,8
Total	0,596	0,404	1

5 **a.** $P(Rh^-) = 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}01 + 0{,}01$
$= 0{,}15$.

b. $P(AB) = 0{,}01 + 0{,}03 = 0{,}04$.

c.



Quiz

11 A **12** D **13** C **14** B et C
15 B et D **16** B **17** D **18** D
19 D **20** B **21** B

Les incontournables

25 a. $0{,}20 + 2p + 3p + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}30 = 1$, donc $5p = 0{,}25$, soit $p = 0{,}05$.

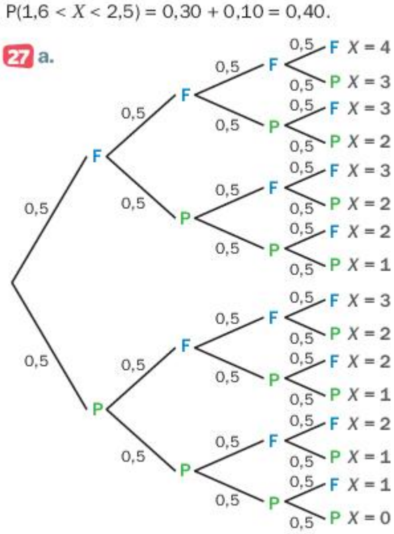
b. $P(X \geqslant 3) = 0{,}16 + 0{,}30 = 0{,}46$.
$P(X < 1) = 0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}30$.
$P(1 < X < 4) = 0{,}09 + 0{,}16 = 0{,}25$.

26 a.

x_i	0,8	1,2	1,8	2,2	2,8
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	0,30	0,10	0,20

b. $P(X < 2) = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}30 = 0{,}70$.
$P(X > 2{,}8) = 0$.
$P(1{,}6 < X < 2{,}5) = 0{,}30 + 0{,}10 = 0{,}40$.

27 a.



x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

b. $P(X < 2) = 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$.
c. $P(X \geqslant 3) = 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}3125$.
d. $P(X \leqslant 1) = 0{,}0625 + 0{,}25 = 0{,}3125$.

28 a.

```
import random
def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.16:
        return -5
    if alea<0.43:
        return 0
    if alea>=0.77:
        return 10
    else:
        return 15
```

b.

```
import random
import math

def moy(n):
    mu=0
    for simu in range(n):
        mu=mu+simu_X()
        return mu/n
```

c.

```
def e_type(n):
    mu=moy(n)
    s=0
    for simu in range(n):
        s=s+(simu_X()-mu)**2
    return math.sqrt(s/n)
```

29 1. $E(X) = 4{,}08$ et $\sigma(X) \approx 1{,}72$.

2. a.

y_j	5	6	7	8	9	10
$P(Y = y_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(Y) = E(X) + 4 = 8{,}08$.
$\sigma(Y) = \sigma(X) \approx 1{,}72$.

b.

z_j	2,3	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8
$P(Z = z_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(Z) = 2{,}3 \times E(X) = 9{,}384$.
$\sigma(Z) = 2{,}3 \times \sigma(X) \approx 3{,}956$.

c.

t_j	0	-1	-2	-3	-4	-5
$P(T = t_j)$	0,10	0,15	0,11	0,14	0,21	0,29

$E(T) = -E(X) + 1 = -3{,}08$.
$\sigma(T) = |-1|\sigma(X) \approx 1{,}72$.

30 a.

x_i	0	5	50	100
$P(X = x_i)$	$\frac{283}{300}$	$\frac{1}{30}$	0,02	$\frac{1}{300}$

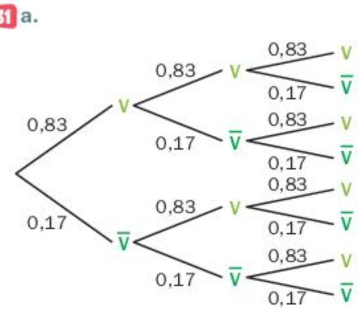
y_i	0	5	25	50
$P(Y = y_i)$	$\frac{127}{150}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{75}$

b. $E(X) = 1{,}5$ et $E(Y) = 1{,}5$.

c. $V(X) = \frac{983}{12}$ et $\sigma(X) \approx 9{,}05$.
$V(Y) = \frac{463}{12}$ et $\sigma(Y) \approx 6{,}21$.

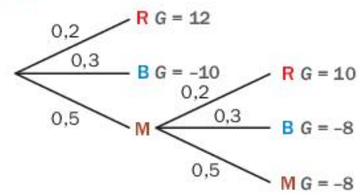
d. Les tombolas ont des gains moyens identiques (espérances égales), mais les gains sont plus dispersés pour la tombola de Noël (qui a un écart type de gain plus élevé).

31 a.



b. $P(X = 0) = 0{,}17^3$.
$P(X = 1) = 3 \times 0{,}83 \times 0{,}17^2$.
$P(X = 2) = 3 \times 0{,}83^2 \times 0{,}17$.
$P(X = 3) = 0{,}83^3$.

32 a.



Les valeurs prises par G sont : $\{-8 ; -10 ; 10 ; 12\}$.

b. $P(G = -10) = 0{,}3$.
$P(G = -8) = 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}4$.
$P(G = 10) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$.
$P(G = 12) = 0{,}2$.

Algorithmique et programmation

Réactivation

1 a. x est de type entier.
b. Le programme affiche 3.
c.

```
x=int(input("Entrer un nombre :"))
r=x+1
r=r*r-x
if r==13:
    print(True)
else:
    print(False)
```

d. $x = -4$ et $x = 3$.

3 a. $(50 \times 13 + 70 \times 11) \times 0{,}85 = 1\,207$ €.
$50 \times 13 + 29 \times 11 = 969$ €.

b.

```
n=int(input("Nombre de convives :"))
if n<=50:
    prix=n*13
else:
    prix=50*13+(n-50)*11
if n>100:
    prix=prix*0.85
print(prix)
```

4

```
e ← a − c
f ← d − b
Si e = 0
    alors Si f ≠ 0
        alors afficher
        « Pas de solution. »
        sinon afficher
        « ℝ est l'ensemble solution. »
        Fin Si
    sinon afficher « La solution est f/e. »
Fin Si
```

7 Ce programme affiche tous les diviseurs de l'entier naturel n.

8 **a.** environ 2 024,66 €.

b.

Pour *annee* allant de 1 à $n+1$ exclu
  $s \leftarrow s \times 1{,}018 - 30$
Fin Pour
Afficher l'arrondi de s à 10^{-2}

c.

```
s=2000
n=int(input("Durée du placement :"))
for annee in range(1,n+1):
    s=s*1.018-30
print(round(s,2)
```

10 **a.** $1 + 3^2 + 5^2 = 35$ cubes.

b.

```
cube=1000
etage=0
cote=0
while cube>=0:
    etage=etage+1
    cube=cube-cote**2
    cote=cote+1
print(etage-1,"étages")
```

12 **a.** `Interieur(1,2,3)` vaut `True`.

b. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, cette fonction renvoie `True` si le point de coordonnées $(x ; y)$ appartient au disque de rayon r, centré sur l'origine, frontière exclue.

13 **a.**

Fonction *spirale*(n)
  $L \leftarrow 0$
  $r \leftarrow 1$
  Pour s allant de 0 à n exclu
    $L \leftarrow L + \pi \times r$
    $r \leftarrow r + 0{,}5$
  Fin Pour
  Renvoyer L
Fin Fonction

b.

```
import math
def spirale(n):
    L=0
    r=1
    for s in range(n):
        L=L+math.pi*r
        r=r+0.5
    return L
```

c.

```
n=0
while spirale(n)<1000:
    n=n+1
print(n-1,"demi-cercles")
```

15

```
def colineaire(x1,y1,x2,y2):
    if x1*y2-x2*y1==0:
        return True
    return False
```

Application

17 **a.** et **b.**

```
def rectangle(M,N,P,Q):
    MP2=(P[0]-M[0])**2
                        +(P[1]-M[1])**2
    NQ2=(Q[0]-N[0])**2
                        +(Q[1]-N[1])**2
    if parallelogramme(M,N,P,Q)
                        and MP2==NQ2:
        return True
    else:
        return False
A=[-1,4]
B=[1,0]
C=[-1,-1]
D=[-3,3]
print(rectangle(A,B,C,D))
```

18 **a.**

Fonction compter(L,a,b)
  $cpt \leftarrow 0$
  Pour chaque élément e de la liste L
    Si $e \geqslant a$ et $e \leqslant b$
      alors $cpt \leftarrow cpt + 1$
    Fin Si
  Fin Pour
  Renvoyer cpt
Fin Fonction

b.

```
def compter(L,a,b):
    cpt=0
    for e in L:
        if e>=a and e<=b:
            cpt=cpt+1
    return cpt
```

c.

```
>>> S=[1,-2,3,-2,12,4,0,6,-6,1,2]
>>> print(compter(S,-2,1))
5
```

19 **a.** $A(x) = x \times (75 - x) \div 2$

b.

```
import matplotlib.pyplot as graph
def Zone(a,b,p):
    x=a
    cote=[]
    aire=[]
    while x<b+p:
        cote.append(x)
        aire.append(x*(75-x)/2)
        x=x+p
    graph.plot(cote,aire,linewidth=1)
    graph.show()
```

c. $x \in [37{,}45 ; 37{,}55]$

English vocabulary

ALGEBRA

Sequences

▶ Chapter 1

- **integer**: nombre entier
- **sequence**: suite
- **element/term**: élément/terme
- **rank**: rang
- **general term**: terme général
- **explicit formula**: forme explicite
- **recursion**: récurrence
- **recursive rule**: relation de récurrence
- **scatter plot**: nuage de points
- **(strictly) monotonically increasing sequence**: suite (strictement) croissante
- **(strictly) monotonically decreasing sequence**: suite (strictement) décroissante

Arithmetic and geometric sequences

▶ Chapter 2

- **arithmetic progression / sequence**: suite arithmétique
- **common difference**: raison (suite arithmétique)
- **arithmetic series**: somme des termes d'une suite arithmétique
- **geometric progression / sequence**: suite géométrique
- **common ratio**: raison (suite géométrique)
- **geometric series**: somme des termes d'une suite géométrique
- **compound interest**: intérêt composé

Quadratic functions

▶ Chapter 3

- **quadratic function**: fonction polynôme du second degré
- **standard form**: forme développée
- **factored form**: forme factorisée
- **vertex form**: forme canonique
- **parabola**: parabole
- **opened upwards parabola**: parabole tournée vers le haut
- **opened downwards parabola**: parabole tournée vers le bas
- **vertex of a parabola**: sommet d'une parabole
- **root**: racine
- **double root**: racine double
- **discriminant**: discriminant
- **quadratic equation**: équation du second degré
- **sign chart**: tableau de signes

FUNCTIONS

Differential calculus

▶ Chapter 4

- **slope**: pente/coefficient directeur
- **differentiable at a**: dérivable en a
- **derivative of f at a**: nombre dérivé de f en a
- **curve**: courbe
- **tangent**: tangente
- **derivative function**: fonction dérivée
- **linear function**: fonction affine
- **square function**: fonction carré
- **power function**: fonction puissance
- **reciprocal function**: fonction inverse
- **square root function**: fonction racine carrée

Variations of a function

▶ Chapter 5

- **increasing function**: fonction croissante
- **decreasing function**: fonction décroissante
- **static function**: fonction constante
- **monotonic function**: fonction monotone
- **sign chart**: tableau de signes
- **variation table**: tableau de variations

The exponential function

▶ Chapter 6

- **exponential function**: fonction exponentielle
- **Euler's number**: nombre d'Euler
- **exponential growth**: croissance exponentielle
- **exponential decay**: décroissance exponentielle

Trigonometric functions

▶ Chapter 7

- **unit circle**: cercle trigonométrique
- **sine**: sinus
- **cosine**: cosinus
- **tangent**: tangente
- **trigonometric functions**: fonctions trigonométriques
- **even function**: fonction paire
- **odd function**: fonction impaire
- **periodic function**: fonction périodique
- **sine wave**: sinusoïde

GEOMETRY

Dot product

Chapter 8

- **dot / scalar product**: produit scalaire
- **scalar projection**: projection orthogonale (vecteur sur vecteur)
- **zero vector**: vecteur nul
- **orthogonal vectors**: vecteurs orthogonaux
- **normal vector**: vecteur normal
- **law of cosines / cosine rule**: formules d'Al-Kashi
- **Apollonius's theorem**: théorème de la médiane
- **line**: droite
- **perpendicular bisector**: médiatrice
- **circle**: cercle
- **disk / disc**: disque
- **empty set**: ensemble vide

Coordinate geometry

Chapter 9

- **normal vector**: vecteur normal
- **expanded two-point form**: equation cartésienne
- **orthogonal projection**: projection orthogonale (point sur droite)
- **circle equation**: équation de cercle
- **radius**: rayon
- **vertex form**: forme canonique
- **parabola**: parabole
- **vertex of a parabola**: sommet d'une parabole

PROBABILITIES AND STATISTICS

Conditional probabilities

Chapter 10

- **conditional probability**: probabilité conditionnelle
- **probability of B given A**: probabilité de B sachant A
- **disjoint events**: évènements disjoints
- **law of total probability**: loi des probabilités totales
- **partition**: partition
- **tree diagram**: arbre pondéré
- **independent events**: évènements indépendants

Random variables

Chapter 11

- **random variable**: variable aléatoire
- **probability distribution / law of probability**: loi de probabilité
- **sample space**: univers
- **expected value**: espérance
- **variance**: variance
- **standard deviation**: écart type
- **law of large numbers**: loi des grands nombres

ALGORITHMIC AND COMPUTER PROGRAMMING

General vocabulary

- **input**: entrée
- **output**: sortie
- **algorithm**: algorithme
- **loop**: boucle
- **conditional**: instruction conditionnelle
- **iteration**: itération

Instructions

- **if… then … else…**: si… alors… sinon…
- **for… from… to…**: pour… allant de… à…
- **step**: pas
- **while**: tant que

LOGIC

- **conditional statement**: implication
- **converse**: réciproque
- **logical biconditional**: équivalence
- **counterexample**: contre-exemple
- **contraposition**: contraposée
- **reductio ad absurdum**: raisonnement par l'absurde
- **quantifier**: quantificateur
- **for all**: pour tout
- **exists**: il existe

Index

Table des illustrations et textes

11-hg ph © Rue des Archives
11-hd Coll. Herzog Anton Ulrich-Museum, Braunschweig ; photo : Claus Cordes
11-m ph © Leemage
11-bg ph © Leemage
11-bm ph © Tallandier / Bridgeman
11-bd Coll. Smithsonian Libraries, Washington
12-h Doc. CultureMATH ; extrait de « Iconographie commentée et petits problèmes, entretien avec Ahmed Djebbar » ; http://culturemath.ens.fr
12-b Photographie anonyme
13 ph © GettyImages / Istock
15 ph © Max Rosereau / La voix Nord / PhotoPQR / Maxppp
41-h ph © Science Photo Library / Mark Garlick / Biosphoto
41-b ph © Leemage
42 ph © DeAgostini / Leemage ; Victor Vasarely © Adagp, Paris, 2019
43 ph © Science Photo Library / SPL - Science Photo Library / Biosphoto
45 ph © Alain Le Bot / Photononstop
46 © Les 100 km à pied de Steenwerck ; https://100kmsteenwerck.fr
62 © Monika / Communauté d'agglomération Pau Béarn Pyrénées
63 © The M.C. Escher Compagny
69-hg Victor Vasarely © Adagp, Paris, 2019
69-hd ph © Dagli Orti / Werner Forman Archive / Aurimages
69-b ph © Istock
70 ph © Getty Images / Istock
71 ph © Loic Venance / AFP
72 ph © Getty Images / Istock
73 ph © Marc Szeglat / Okapia / Biosphoto
77 Droits réservés
93 ph © Michel Guenette / Getty Images Plus / Istock
95 ph © Brendan Moran / Sportsfile / Corbis / Getty Images
98 ph © Istock
100 ph © Carmen Murillo / Getty Images Plus / Istock
101 ph © Urban Wind Design / Droits réservés
102-h ph © Philippe Renault / Hemis
102-d ph © The Picture Art Collection / Alamy / Hemis
103-h ph © Getty Images / Istock
103-b ph © Getty Images / Istock
104 ph © Getty Images Plus / Istock
105-hg ph © Costa / Leemage
105-hd ph © Luisa Ricciarini / Leemage
105-m Coll. Herzog Anton Ulrich-Museum, Braunschweig ; photo : Claus Cordes
105-bg ph © Dagli Orti / Archives de l'Académie des Sciences Paris / CCI / Aurimages
105-bm ph © Academie des Sciences, Paris, France / Bridgeman Images
105-bd ph © Roger-Viollet
106-h ph © Granger / Bridgeman Images
106-bg Doc. de l'article "Le calcul différentiel de Leibniz appliqué à la chaînette", par Olivier Keller, Bibnum, 2009 ; https://journals.openedition.org/bibnum/614
106-bd Photographie anonyme
107 ph © Jon Arnold Images / Hemis
109 ph © GettyImages / Istock
110 ph © Patrick Forget / Sagaphoto
125 ph © GettyImages / Istock
130-g ph © Dagli Orti / Archives de l'Académie des Sciences Paris / CCI / Aurimages
130-m Coll. Herzog Anton Ulrich-Museum, Braunschweig ; photo : Claus Cordes
130-d ph © GettyImages / Istock
131 ph © B. Boissonnet / BSIP
132 ph © GettyImages / Istock
133-h ph © Tesson / Andia.fr
133-b ph © GettyImages / Istock
134 ph © AGE / Photononstop
135 ph © Thomas Dressler / Biosphoto
137 ph © GettyImages / Istock
139-h ph © GettyImages / Istock
139-b ph © GettyImages / Istock
149 ph © GettyImages / Istock
151 ph © Chamussy / Sipa
155 ph © Costa / Leemage
156-h ph © GettyImages / Istock
156-b ph © Torsten Becker / Westend61 / Agefotostock
158 ph © GettyImages / Istockphoto
159 ph © Bertrand Gardel / Hemis
161 ph © Getty Images/ Istock
179 ph © Gregory Gerault / Hemis
182 ph © Rick Gomez / Getty Images
183-g ph © Getty Images / Istock
183-d ph © Cristian Storto Fotografia / Getty Images / Istock
185 ph © Bertrand Rieger / Hemis
186 ph © Mario Fourmy / Sipa
187 ph © Flip Nicklin / Minden Pictures / Getty
189 ph © Istock
190 ph © Lionel Montico / Hemis
191 ph © Istock
203-g ph © JGI / Jamie Grill / Blend Images / Agefotostock
203-d ph © Istock
207 ph © Getty Images / Istock
210 ph © Rue des Archives
211-h Coll. Bibliothèque nationale de France
211-b Coll. Bibliothèque nationale de France
212 ph © Anonyme / Droits réservés
213-h ph © Science photo library / Bios
213-b ph © Sebastien Desarmaux / Godong / Photononstop
214 ph © Christophe Boisvieux / Hemis
215-hg ph © Dagli Orti / Archives de l'Académie des Sciences Paris / CCI / Aurimages
215-hd Coll. Smithsonian Libraries, Washington
215-m Coll. Archivio Giusto Bellavitis / Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti
215-bg ph © MEPL / Bridgeman Images
215-bm Peinture anonyme
215-bd ph © Selva / Leemage
216-h Domaine public
216-b ph © Raimondo Bolleta / Droits réservés
217 ph © Kjell Linder / Getty images
244 ph © Fabien Cotterau / PhotoPQR / MaxPPP
245 ph © Roger-Viollet
247 Doc. Nasa
249 ph © Marc Lester / Anchorage Daily News via AP / Sipa
251 ph © Aurélien Brusini / Hemis
252 © 2019 IGN
253-h Coll. Bibliothèque nationale de France
253-b ph © Getty Images / Istock
269-d ph © Getty Images / Istock
269-g © 2019 IGN
271-h ph © Getty Images / Istock
271-b ph © Getty Images / Istock
274 © 2019 IGN
277-h Photographie anonyme
277-b ph © Philippe Clément / Belpress / Andia
278 © 2019 IGN
279-hg ph © Musee d'Art et d'Histoire, Narbonne, France / Bridgeman Images
279-hd Coll. Smithsonian Libraries, Washington
279-m Coll. University of Cambridge, Institute of Astronomy Library
279-bg ph © Bianchetti / Leemage
279-bm ph © Josse / Leemage
279-bd ph © Alexander Makarov / Sputnik / AFP
280-h Domaine public
280-b ph © Vincent Nguyen / Riva-Press
281-h © aaa_production - Jacques Rouxel
281-b © aaa_production - Jacques Rouxel
283-h ph © F1online / Andia
283-b ph © Fotolia
284-h ph © Mary Evans Picture Library / Photononstop
284-b ph © JackF / Getty / Istock
285 ph © margouillatphotos / Getty / Istock
297 ph © Arman Zhenikeyev / Getty Images
298 ph © Paul Doyle / Alamy / Hemis
299 ph © Hana-Photo / Getty / Istock
306-h ph © Getty / Istock
306-b ph © Science Photo Library / Biosphoto
307-h ph © Andris Tkachenko / Getty / Istock
307-b ph © E+ / Getty images / Istock
308 ph © Frédéric Hanoteau / Archives Hatier
309 © Vaincre la Mucoviscidose
310 ph © John Duarte / Blend Images / Photononstop
311 ph © John Finney Photography / Getty Images
313 ph © Getty Images / iStock
314-h ph © iStock
314-b ph © Simon Webb and Duncan Nicholls / Getty Images
315 ph © Pierre Vernay / Biosphoto
331 ph © Getty / Istock
333 ph © Sean Prior / Wavebreak Media / Photononstop
336 ph © Shutterstock
338 ph © Getty Images / Istock
339-h ph © Jacques Witt / Sipa
339-b ph © Sue Barr / Image Source / Getty Images
341-h © Monty Python's Flying Circus / Droits réservés
341-b ph © Stanley Bielecki Movie Collection / Getty Images
342 ph © Fred Scheiber / 20 Minutes / Sipa
343-h ph © Granger / Bridgeman Images
343-b Coll. Draper Laboratory; restored by Adam Cuerden
349 ph © Getty Images / Istock
356-g ph © Getty Images / Istock
356-d ph © Getty Images/ Istock
358 ph © Ilya Naymushin / Reuters

Rabat III-g © Texas Instruments Incorporated
Rabat III-mg © Casio
Rabat III-md © Hewlett-Packard
Rabat III-d © NumWorks

310 Enigmes mathématiques de Lewis Carroll : 72 problèmes pour vos nuits blanches, traduit par Elisabeth Busser © Editions POLE, 1999

Édition : Hélène Fortin-Servent, Anne-Laure Culière, Nathalie Legros
Maquette : Frédéric Jély, Nicolas Balbo, Hung Ho Thanh
Mise en page : Nicolas Balbo, Catherine Vielcanet
Illustrations : Martin Maniez
Infographie : Domino
Iconographie : Marthe Pilven / Hatier Illustration

Notations

Ensembles et intervalles

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels	$]-\infty ; +\infty[$
$\mathbb{R}^*$ On lit : « $\mathbb{R}$ étoile ».	ensemble des nombres réels privé de 0	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$\mathbb{R}\backslash\{a\}$ On lit : « $\mathbb{R}$ privé de a ».	ensemble des nombres réels privé du nombre réel a	$]-\infty ; a[\cup]a ; +\infty[$
$\mathbb{R}_+^*$ / $\mathbb{R}_-^*$ On lit : « $\mathbb{R}$ plus, étoile » / « $\mathbb{R}$ moins, étoile ».	ensemble des nombres réels strictement positifs/négatifs	$]0 ; +\infty[$ / $]-\infty ; 0[$
$\mathbb{R}^2$	ensemble des couples de nombres réels	« $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ » s'écrit aussi « $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ ».
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entiers naturels	0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 458 ; 459 ; ...
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres entiers naturels privé de 0	1 ; 2 ; 3 ; ... ; 458 ; 459 ; ...
$[\![a ; b]\!]$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers compris entre a et b	$[a ; b] \cap \mathbb{Z}$ ou $\{a ; a+1 ; ... ; b-1 ; b\}$.
$\varnothing$	ensemble vide	C'est l'ensemble ne contenant aucun élément.
$\in$	« appartient à »	$5 \in \mathbb{N}$; $A \in (d)$
$\notin$	« n'appartient pas à »	$-5 \notin \mathbb{N}$; $B \notin (d)$
$\subset$	« est inclus dans »	$[-1 ; 3] \subset \mathbb{R}$
$\cap$	intersection : « et »	$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B (intersection de A et B).
$\cup$	union : « ou »	$A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (union de A et B).
$E\backslash A$ ou $\overline{A}$	complémentaire de A dans E ou « A barre »	$E\backslash A$ (ou $\overline{A}$) est l'ensemble des éléments appartenant à E mais pas à A.

Quantificateurs et symboles

$\forall$	quantificateur universel : « quel que soit », « pour tout »	$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 5 \Rightarrow x \geqslant 0$. On lit : « Pour tout nombre réel x, si x est supérieur ou égal à 5, alors x est positif. »
$\exists$	quantificateur existentiel : « il existe »	$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 5$. On lit : « Il existe un nombre réel x tel que x^2 est égal à 5. » (Il en existe même deux : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.)

Raisonnement logique

« $\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_2$ » On lit : « $\mathcal{A}_1$ implique $\mathcal{A}_2$ ».	« Si $\mathcal{A}_1$, alors $\mathcal{A}_2$. »	• $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (AB) \perp (AC)$. • $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$. ⚠ La réciproque, et donc l'équivalence, sont fausses ; une équivalence vraie est : $x^2 = 25 \Leftrightarrow (x = 5$ ou $x = -5)$.
« $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2$ » On lit : « $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont équivalentes ».	« $\mathcal{A}_1$ si et seulement si $\mathcal{A}_2$. »	• ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = AC = BC$. • Application à la résolution d'équations : $5x + 3 = -4 \Leftrightarrow 5x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$. • Application à la résolution d'inéquations : $6 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -6 \Leftrightarrow x \leqslant 3$.

Programmer en python™

Vidéos et Doc+
Programmer en Python
hatier-clic.fr/ma1ra2

En langage naturel	En Python

▶ Les fonctions

Fonction F de paramètres x et y Renvoyer $(x + y) \div 2$ **Fin Fonction**	`def F(x,y):` `    return (x+y)/2`

▶ Les listes

Une liste est un ensemble ordonné d'éléments de n'importe quel type, dont la numérotation débute à l'indice 0.

L reçoit la liste [5 ; 2,6 ; "A" ; 6]	`L=[5,2.6,"A",6]`
Taille de la liste L	`len(L)`

Premier élément de la liste L
Deuxième élément de la liste L
Dernier élément de la liste L
	`L[0]`
	`L[1]`
	`L[len(L)-1]`

Ajouter un élément n à la fin de la liste L	`L.append(n)`
Retirer l'élément n de la liste L	`L.remove(n)`
Indice de la première apparition de l'élément n dans la liste L	`L.index(n)`
Retirer l'élément situé à l'indice i de la liste L	`L.pop(i)`
Dupliquer la liste L	`L.copy()`
Ordonner la liste L dans l'ordre numérique ou alphabétique	`L.sort()`
Mélanger la liste L	`random.shuffle(L)`
Compter le nombre d'apparitions de l'élément n dans la liste L	`L.count(n)`

⚠ La numérotation des éléments d'une liste L débute toujours à 0, ainsi :
– le premier élément se situe à l'indice 0 (ici, L[0] = 5) ;
– le dernier élément se situe à l'indice « taille de L – 1 » (ici, la taille est 4 donc le dernier élément est L[3] = 6).

Pour ces deux instructions, il faut s'assurer que n est bien un élément de la liste L, sans quoi le programme renverra une erreur.

⚠ Avec le code ci-dessous, $L1$ et $L2$ font référence à la même liste et toute modification de $L1$ se répercutera sur $L2$:

```
L1=[1,2,5,6]
L2=L1
```

Pour dupliquer $L1$, il faut créer $L2$ avec le code :

```
L2=L1.copy()
```

▶ Les instructions conditionnelles

Si n est inférieur ou égal à 10
alors $n \leftarrow n + 3$
sinon $n \leftarrow n \div 2$
Fin Si
	`if n<=10:`
	`    n=n+3`
	`else:`
	`    n=n/2`

Si n appartient à la liste L
alors retirer n de la liste L
ajouter $n + 1$ à la liste L
Fin Si
	`if n in L:`
	`    L.remove(n)`
	`    L.append(n+1)`

L'indentation (décalage du code) est obligatoire : elle indique la ou les instructions qui font partie de la structure conditionnelle ou de la boucle.

Le symbole « = » affecte une valeur à une variable. Le symbole « == » teste une égalité.

▶ Les boucles (bornées et non bornées)

Pour i allant de 1 (inclus) à 6 (exclu) $n \leftarrow n \times i + 3$ **Fin Pour**	`for i in range(1,6):` `    n=n*i+3`
Tant que n est supérieur à 1 $n \leftarrow \frac{n}{2} + 1$ **Fin Tant que**	`while n>1:` `    n=n/2+1`

B est une liste vide
$L \leftarrow$ [5 ; 7 ; 3]
Pour chaque élément n de la liste L
ajouter $n + 2$ à la liste B
Fin Pour
	`B=[]`
	`L=[5,7,3]`
	`for n in L:`
	`    B.append(n+2)`

Pour chaque indice i de la liste L doubler l'élément situé à l'indice i **Fin Pour**	`for i in range(0,len(L)):` `    L[i]=L[i]*2`

Ne pas oublier que la borne supérieure déclarée (ici 6) est exclue.

Ici, n n'est pas un indice numérique mais un élément de la liste L : n prend successivement les valeurs 5, 7 et 3, et B vaut alors [7, 9, 5].

Ici, i est l'indice de l'élément traité : de 0 pour le premier à len(L) – 1 pour le dernier.

▶ Quelques instructions pour les mathématiques

x^n	`x**n`
Reste de la division euclidienne de n par p	`n%p`
Quotient de la division euclidienne de n par p	`n//p`
$\sqrt{x}$	`math.sqrt(x)`
Générer un entier aléatoire n entre a et b inclus	`n=random.randint(a,b)`

Ces instructions nécessitent `import math` ou `import random` en début de programme.

Calculatrices

Doc+
Fiches calculatrices détaillées
hatier-clic.fr/ma1ra3

	TI-83 Premium CE	CASIO GRAPH90+E (ou GRAPH35+E, sauf Python)	HP Prime	NumWorks
Étude de suites	mode SUITE	Récurrence	Suite	Suites
Entrer une expression	f(x)	*Saisir expression*	Symb Setup	Suites
Tracer un nuage de points	graphe	F6 (TABLE) F6 (GPH-PLT)	Plot Setup	Graphique
Obtenir un tableau de valeurs	2nde graphe	F6 (TABLE)	Num Setup	Tableau
Étude de fonctions	mode FONCTION	Graphe ou Table	Fonction	Fonctions
Entrer une expression	f(x)	*Saisir expression*	Symb Setup	Fonctions
Tracer une courbe	graphe	Graphe et F6 (DRAW)	Plot Setup	Graphique
Obtenir un tableau de valeurs	2nde graphe	Table et F6 (TABLE)	Num Setup	Tableau
Calculer un nombre dérivé en un point d'abscisse donné	math 8:nbreDérivé(	Exe-Mat OPTN F4 (CALC) F2 (d/dx)	CAS Settings Mem CAS 2 Calcul 1 Différencier diff(F1(x),x)	Calculs paste Calculs diff(f(x),x)
Probabilités	math PROB	Exe-Mat	Settings Mem Math 5 Probabilité	Calculs
Générer un nombre aléatoire	1:NbrAléat	OPTN F6 F3 (PROB) F4 (RAND)	4 Aléatoire	paste Aleatoire et approximation
Statistique	stats	Statistique	Stats 1 Var	Statistiques
Entrer une série (de valeurs) à une variable	ÉDIT 1:Modifier…	*Saisir série*	Num Setup	Données
Choisir une série et en obtenir un résumé statistique	CALC 1:Stats 1 Var	F2 (CALC) F2 (1-VAR)	Symb Setup	Stats
Programmation	python	python	Langage HP	python
Accéder à la liste des programmes	2nde résol PyAdaptr ou Python	Python	Shift 1 Program	Python
Créer un nouveau programme	zoom (Nouv)	F3 (NEW)	Nouveau	Ajouter un script OK
Éditer un programme	fenêtre (Édit)	F2 (OPEN)	Modifier	*Sélectionner programme* OK
Éxécuter un programme	f(x) (Exéc)	F1 (RUN)	Exec.	… OK Executer le script OK

Logique : vocabulaire

Doc+
Logique et Python
hatier-clic.fr/ma1ra4

Assertion

Une assertion est une **affirmation** : elle est soit « **vraie** », soit « **fausse** ».

Exemples

- L'assertion « 3 est un nombre entier » est vraie.
- L'assertion « 22 est égal à 4 » est fausse.
- L'assertion « $10 \geqslant 3$ » est vraie.

PROGRAMMATION python

On retrouve cette notion avec les **booléens** « `True` » et « `False` ».

⚠ « 2 plus 4 » (2 + 4) n'est pas une assertion, mais uniquement une opération.

```
>>> type(3)==int
True
>>> 22==4
False
>>> 10>=3
True
```

Connecteurs logiques

On peut combiner deux assertions à l'aide des connecteurs logiques « et » et « ou ».

- Une assertion de la forme $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ est vraie si les deux assertions sont vraies.
- Une assertion de la forme $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ est vraie si au moins une des assertions est vraie.

Exemple

L'assertion :

« "$2 \leqslant 3$" et "$3 = 2 + 1$" »

est vraie (car les deux assertions liées par « et » sont vraies).

Exemples

- L'assertion « "4 est positif" ou "-4 est positif" » est vraie (car la première assertion est vraie).
- L'assertion « "$22 = 4 + 4$" ou "$-4 \geqslant 0$" » est fausse (car les deux assertions liées par « ou » sont fausses).

PROGRAMMATION python

On peut programmer de tels tests à l'aide des mots clés « `and` » et « `or` ».

```
>>> 2<=3 and 3==2+1
True
>>> 4>=0 or -4>=0
True
>>> 22==4+4 or -4>=0
False
```

Négation

La négation d'une assertion est la proposition obtenue en énonçant « le contraire » de cette assertion.

- Si une assertion $\mathcal{A}$ est vraie, sa négation non($\mathcal{A}$) est fausse.
- Si une assertion $\mathcal{A}'$ est fausse, sa négation non($\mathcal{A}'$) est vraie.

Exemples

Assertion	Négation
« 3 est un nombre entier. » (vraie)	« 3 n'est pas un nombre entier. » (fausse)
« 22 est égal à 4. » (fausse)	« 22 est différent de 4. » (vraie)
« $10 \geqslant 3$. » (vraie)	« $10 < 3$. » (fausse)

Implication

Une implication est une assertion prenant la forme d'une **relation de cause à effet** entre deux assertions.
On explicite cette relation en l'écrivant sous la forme « Si $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}'$ ».

Exemples

- « Si un triangle ABC est équilatéral, alors AB = AC = BC » est une implication vraie.
- « Si un nombre entier est pair, alors le chiffre des unités de ce nombre vaut 4 » est une implication fausse.

L'assertion « un triangle ABC est équilatéral » est une **condition suffisante** de l'assertion « AB = AC = BC ».
L'assertion « AB = AC = BC » est une **condition nécessaire** de l'assertion « le triangle ABC est équilatéral ».

Réciproque

Pour une assertion de la forme « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ », la réciproque de cette assertion est « Si $\mathscr{A}'$, alors $\mathscr{A}$ ».

Dans ce cas, l'assertion « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ » est appelée **sens direct**.

Exemples

- La réciproque de « Si un triangle ABC est équilatéral, alors AB = AC = BC » (implication vraie) est « Si AB = AC = BC, alors le triangle ABC est équilatéral » ; cette réciproque est vraie.
- La réciproque de « Si un nombre entier est pair, alors le chiffre des unités de ce nombre vaut 4 » (implication fausse) est « Si le chiffre des unités d'un nombre entier vaut 4, alors ce nombre est pair » ; cette réciproque est vraie.

Équivalence

Une équivalence est une assertion de la forme « $\mathscr{A}$ si et seulement si $\mathscr{A}'$».
Dire qu'une équivalence est vraie signifie que les implications « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ » et « Si $\mathscr{A}'$, alors $\mathscr{A}$ » sont toutes les deux vraies.

Exemples

- « Un triangle ABC est équilatéral si et seulement si AB = AC = BC » est une équivalence vraie.
- « Un nombre entier est pair si et seulement si le chiffre des unités vaut 4 » est une équivalence fausse.

L'équivalence est fausse, car une des deux implications est fausse.

Contraposée

Pour une assertion de la forme « Si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}'$ », la contraposée de cette assertion est « Si non($\mathscr{A}'$), alors non($\mathscr{A}$) ».

Une implication et sa contraposée sont soit simultanément vraies, soit simultanément fausses.

Exemple

La contraposée de « Si un triangle ABC est équilatéral, alors AB = AC » est « Si AB ≠ AC, alors le triangle ABC **n'**est **pas** équilatéral » ; ces deux assertions sont vraies.

Quantificateurs

Si une assertion fait intervenir une variable (nombre, point, objet géométrique, etc.), on distingue les assertions employant :

- le quantificateur universel « pour tout » ou « quel que soit » dans le cas où toutes les valeurs prises par la variable vérifient l'assertion ;
- le quantificateur existentiel « il existe » dans le cas où au moins une valeur prise par la variable vérifie l'assertion.

Exemple

« Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 5, x est positif. »

Exemple

« Il existe un nombre réel z tel que $z^2 = 5$. »

Il existe même deux nombres réels tels que $z^2 = 5$: $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Ces quantificateurs permettent d'**énoncer des assertions contraires**.
Par exemple : « Quel que soit l'élève de ce lycée, il fait LV1 anglais. » est l'assertion contraire de « Il existe au moins un élève qui ne fait pas LV1 anglais. ».

Des raisonnements pour démontrer

Démontrer une équivalence

Pour démontrer l'équivalence $\mathscr{A} \Leftrightarrow \mathscr{A}'$, on montre la **double implication** $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}' \Rightarrow \mathscr{A}$.

▶ Rabat I, Notations

Exemple On considère deux nombres réels a et b.
On sait que « $a \times b = 0$ » $\Rightarrow$ « $a = 0$ ou $b = 0$ ».
La réciproque est également vraie : « $a = 0$ ou $b = 0$ » $\Rightarrow$ « $a \times b = 0$ ».
Par conséquent, on a l'équivalence : « $a \times b = 0$ » $\Leftrightarrow$ « $a = 0$ ou $b = 0$ ».

Démontrer qu'une propriété est fausse à l'aide d'un contre-exemple

Pour démontrer qu'une propriété est fausse, il suffit de **donner un cas particulier**, appelé contre-exemple, pour lequel on observe que la propriété est fausse.

Exemple On considère la propriété « Si un nombre entier est pair, alors le chiffre des unités de ce nombre vaut 4. »
Le nombre entier 2 018 est pair, mais son chiffre des unités vaut 8 et non pas 4.
C'est un contre-exemple qui permet d'affirmer que la propriété ci-dessus est fausse.

Démontrer en raisonnant par disjonction des cas

Raisonner par disjonction des cas, c'est étudier toutes les alternatives possibles d'une situation donnée.

Exemple Montrons que pour tout nombre entier n, le produit $n \times (n + 1)$ est pair.
- **Si n est pair**, on peut écrire n sous la forme $n = 2k$, où k est un nombre entier.
On a alors $n \times (n + 1) = 2k \times (2k + 1) = 2 \times [k \times (2k + 1)]$, qui est un nombre pair.
- **Si n est impair**, on peut écrire n sous la forme $n = 2k + 1$, où k est un nombre entier.
On a alors $n \times (n + 1) = (2k + 1) \times (2k + 1 + 1) = (2k + 1) \times (2k + 2)$
$= 2 \times [(2k + 1) \times (k + 1)]$, qui est un nombre pair.

Ainsi, pour tout nombre entier n (pair ou impair), le produit $n \times (n + 1)$ est pair.

Démontrer en raisonnant par l'absurde

Raisonner par l'absurde, c'est partir d'une assertion supposée vraie et démontrer qu'il y a une **incohérence**, ce qui montre que cette assertion de départ est en fait fausse.

Exemple Une fonction f est telle que $f(-2) = -4$; $f(3) = 7$ et $f(5) = 0$.
Montrons que la fonction f n'est pas croissante sur $[-2 ; 5]$.
Supposons que « f est croissante sur $[-2 ; 5]$ ». Comme $3 < 5$, on a $f(3) \leqslant f(5)$; ce qui amène ici (d'après l'énoncé) à $7 \leqslant 0$; ce résultat est incohérent.
La fonction f n'est donc pas croissante sur $[-2 ; 5]$.

Une fonction croissante conserve l'ordre.

Démontrer en raisonnant par contraposée

Pour démontrer qu'une implication est vraie ou fausse, il suffit de **démontrer que sa contraposée l'est** : c'est le raisonnement par contraposée.

Exemple
Montrons que si AB ≠ AC, alors le triangle ABC n'est pas équilatéral.
Cela revient à démontrer sa contraposée « si ABC est équilatéral, alors AB = AC » ; or cette implication est vraie par définition du triangle équilatéral.
Ainsi, l'implication « si AB ≠ AC, alors le triangle ABC n'est pas équilatéral » est vraie par contraposée.

Le triangle n'est alors pas non plus isocèle en A.

VOS AVANTAGES NUMÉRIQUES

> RESSOURCES HATIER-CLIC

Ce manuel est enrichi de **ressources numériques** en accès direct.

Repérage dans votre manuel

Vidéo
Déterminer les variations d'une suite en comparant des termes
hatier-clic.fr/ma1024

GRATUIT

Sur **www.hatier-clic.fr** j'indique le code ressource du pictogramme

> PLATEFORME *Variations*

Un site avec des **exercices d'entraînement** :
exercices de réactivation des connaissances, quiz pour faire le point.

Repérage dans votre manuel

Quiz en ligne
Faire le point
variations.kwyk.fr/1re

GRATUIT

Accès direct sur
www.variations.kwyk.fr/1re

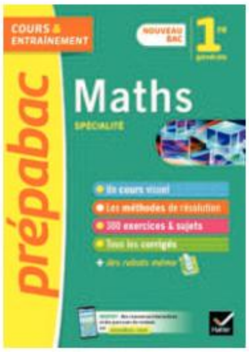
> MANUEL NUMÉRIQUE ENRICHI élève

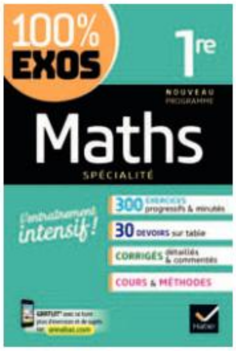
SPÉCIAL FAMILLE

L'ensemble du manuel avec des **compléments numériques** : vidéos, fiches métier, etc.

Commande sur
www.kiosque-edu.com/familles

POUR VOUS ACCOMPAGNER - SPÉCIAL RÉFORME 2019





annabac.com

N°1 des sites d'entraînement et de révision !
Plus de 9000 ressources conformes aux nouveaux programmes 2019 pour s'entraîner **de la 3e à la Tle**

- Fiches, cours audio et vidéo, quiz, annales corrigées, exercices
- Un espace de travail personnalisé

13 2271 3
ISBN 978-2-401-05405-9